TD 24 Dénombrement.

Ex 0 Soit E *et* F deux ensembles et f une application de E dans F. Montrer que :

1) $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$,
   - $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
   - $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   - $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ $\quad y-a-t-il$ $égalité$?

$\mathcal{P}(E)$ =........................ ?

2) $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap B) = f(A) \cap f(B))$.
3) $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}\langle f(A)\rangle$ $y-a-t-il$ $égalité$?
4) $(f\ injective) \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}\langle f(A)\rangle$.
5) $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) \subset B$ $y-a-t-il$ $égalité$?
6) $(f\ surjective) \Leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}\langle B\rangle) = B)$.

Ex 1 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E et $f :\begin{pmatrix} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{pmatrix}$.

1) Donner une CNS sur A et B pour que f soit injective.
2) Donner une CNS sur A et B pour que f soit surjective.
3) En déduire une CNS sur A et B pour f soit bijective.
4) Désormais f est bijective.
   a) Expliciter f^{-1}.
   b) On suppose que E est un ensemble fini. Qu'en déduit-on sur les cardinaux de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ et $\mathcal{P}(E)$? Vérifier cette égalité compte tenu des conditions vérifiées par A et B.

Ex 2 Soit E un ensemble et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition de E.

1) Justifier que : $\forall x \in E, \exists!\, i \in [\![1,n]\!] / x \in A_i$.

Pour tout $(x,y) \in E^2$, on dit que $x \sim y$ lorsque x et y appartiennent au même A_i.

2) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
3) Soit $x \in E$, on note $\bar{x} = \{y \in E / x \sim y\}$ appelée la classe d'un élément x de E . Décrire $\bar{x}$.

Ex 3

1) Un digicode est constitué d'un chiffre d'une lettre A *ou* B et d'un autre chiffre dans cet ordre. Combien de codes existe-t-il ?
2) J'ai dans ma garde-robe 17 pantalons , 15 jupes , 28 tee-shirts , 7 chemisiers , 3 paires de collants de couleurs différentes et 30 pulls . Combien ai-je de tenues différentes ?
3) En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères .Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Combien de caractères peut –on coder avec un octet (8 chiffres binaires ordonnés) ?
4) Combien de trinômes de colles différents peut-on former dans une classe de PCSI de 35 élèves ?
5) Au loto, il y a 49 numéros, une grille de loto est composée de 6 numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?
6) Une plaque d'immatriculation française est composée de deux lettres puis trois chiffres et deux lettres : $AB-123-CD$. Les lettres I, O, U ne sont jamais utilisés, les couples SS et WW non plus. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?

Ex 4 Dans un lycée de 1200 élèves , 652 pratiquent une activité sportive , 327 jouent d'un instrument et 453 ne font ni sport , ni musique . Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens .

Ex 5

1) Une agence matrimoniale souhaite faire un sondage auprès de ses clients. Elle teste son questionnaire sur un échantillon de 4 personnes parmi les 300 clients dont 120 femmes.
   a) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
   b) Quel est le nombre d'échantillons différents ne contenant aucune femme ?
   c) Quel est le nombre d'échantillons différents contenant au moins un homme et une femme ?
2) Dans une urne, il y a 15 boules numérotées de 1 à 15, les boules 1 à 5 sont blanches , les autres sont noires
   a) On tire cinq boules simultanément.
      i. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
      j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires ?
   b) On tire successivement 5 boules sans remise.
      i. En tenant compte de l'ordre combien y-a-t-il de tirages possibles ?
      j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires dans tout ordre ?

Ex 6 Déterminer le nombre d'anagrammes (sans sens) des mots suivants : SMARTPHONE , SOURIS et BONBONNE.

Ex 7

1) Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,3\}$ sur $\{1,2,3\}$.
2) Calculer le nombre d'applications de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissantes.
3) Calculer le nombre de surjections de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$.
4) Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,\dots,n\}$ dans $\{0,1\}$.
5) Déterminer le nombre d'applications f de $\{1, ,10\}$ dans $\{1,10\}$ telles que , si n pair alors $f(n)$ pair .
6) Déterminer le nombre d'applications injectives de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image.

Ex 8 Soit E un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ contenant a entiers pairs et b entiers impairs. Montrer en utilisant E que : $\sum_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}=\binom{a+b}{p}$.En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ où $n\in\mathbb{N}$.

Soit E ensemble de cardinal N.

- Nombre de p-uplets d'éléments de E =.........
- Nombre de p-uplets d'éléments de E à composantes distinctes =......
- Nombre de sous-ensembles de E à p éléments=......
- Nombre de façon de choisir dans E, p éléments distincts =..
- Nombre de façon d'ordonner les N éléments de E =.......
- Nombre d'applications de E dans un ensemble fini F =......
- Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans E = ... ?

Ex 9 Soit $(p,n)\in\mathbb{N}^{*2}$ et $E=\{1,\dots,n\}$ Déterminer :

1) le nombre de couple (x,y) d'éléments de E tels que $x+y=n$.
2) le nombre de couple (x,y) d'éléments distincts de E .
3) le nombre de couple (x,y) d'éléments de E tels que $x>y$.
4) le nombre u_n de couple (x,y) d'éléments de E tels que x ou y impair . Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}$.
5) le nombre de p-uplets $(x_1,x_2,..,x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1<x_2<\dots<x_p$.
6) le nombre de p-uplets $(x_1,x_2,..,x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1\le x_2\le\dots\le x_p$.

Ex 10 Soit un ensemble fini E de cardinal n où $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair , que celles de cardinal impair .
2) Calculer $\sum_{A\subset E}(-1)^{card(A)}$.
3) Dénombrer les couples (X,Y) de $[P(E)]^2$ tels que $X\subset Y$.
4) Dénombrer les couples (X,Y) de $[P(E)]^2$ tels que $X\cap Y=\emptyset$.
5) Soit $p\in[\![0,n]\!]$ et $F=\{(X,Y)\in P(E)^2/X\cap Y=\emptyset\ et\ card(X\cup Y)=p\}$. En dénombrant F, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}.$$

Ex 11 Pour tout entier naturel n non nul, on pose D_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n=\{1,\dots,n\}$.
Par convention , $D_0=1$.

1) Montrer que : pour tout entier n non nul, $D_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$ puis que $D_n\le n!$.
2) Soit $f(x)=e^{e^x-1}$.
   a. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0 de la forme : $f(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{a_k}{k!}x^k+o_0(x^N)$.
   b. En utilisant la relation, $f'(x)=e^xf(x)$ vérifiée par f en tout réel x, montrer que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (D_n).
   c. En déduire une relation entre a_n et D_n .
   d. Calculer alors D_2 , D_3 , D_4 , D_5 , grâce au DL , puis D_6 grâce à 1) .

Ex 12 Pour tout n un entier naturel non nul , on note a_n le nombre de façon qu'à le père noël de distribuer n cadeaux à n enfants sans qu'aucun enfant ne reçoive le cadeau qu'il a demandé (sachant que dans sa hotte , ce père noël a exactement les n cadeaux commandés par les n enfants !!) .

1) Calculer a_1,a_2,a_3.
2) Montrer que : pour tout entier naturel $n\ge1$, $a_{n+2}=(n+1)(a_n+a_{n+1})$.
3) Montrer que : pour tout entier naturel $n\ge1$, $a_{n+1}-(n+1)a_n=(-1)^{n+1}$.
4) Montrer que : pour tout entier naturel $n\ge1$, $\frac{a_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
5) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange , déterminer un équivalent simple de a_n.

Ex 13 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On trace dans le plan , n droites en respectant les 2 règles suivantes :

- Deux droites ne sont jamais parallèles. ●● Trois droites ne sont jamais concourantes.

On note T_n le nombre de triangles construits à partir de ces n droites.

1) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
2) En déduire de T_n en fonction de n.

Ex 14 Soit p et q deux entiers naturels donnés. Un robot se déplace sur un quadrillage, démarre du point $O(0,0)$ pour rejoindre le point $A(p,q)$ en se déplaçant vers la droite ou vers le haut. Combien y a -t-il de chemins possibles ?