Corrigé TD 22 Dénombrement.

Revoir l' Ex 5 TD 6

Ex 0 Soit E un ensemble et A et B deux parties de E et f :$\begin{pmatrix} \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{pmatrix}$.

1) Donner une CNS sur A et B pour que f soit injective.
2) Donner une CNS sur A et B pour que f soit surjective.
3) En déduire une CNS sur A et B pour f soit bijective.
4) Désormais f est bijective.
   a) Expliciter f^{-1}.
   b) On suppose que E est un ensemble fini. Qu'en déduit-on sur les cardinaux de $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ et $\mathscr{P}(E)$? Vérifier cette égalité compte tenu des conditions vérifiées par A et B.

1) $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \Rightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases} \Rightarrow X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$.

Alors, si $A \cup B = E$ alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \Rightarrow X = Y$. Et ainsi, si $A \cup B = E$ alors f est injective.

2) Soit $(H, K) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. $f(X) = (H, K) \Leftrightarrow \begin{cases} H = X \cap A \\ K = X \cap B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H = X \cap A \\ K = X \cap B \\ H \cup K \subset X \end{cases}$.

3) si $A \cup B \neq \emptyset$ alors il existe un élément x commun à A et B et le couple $(\{x\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent par f car si on imagine un instant que $(\{x\}, \emptyset)$ admet un antécédent X alors X contient $\{x\} = \{x\} \cup \emptyset)$ et par suite $X \cap A = \{x\} = X \cap B$ donc $X \cap B \neq \emptyset$ *ce qui contredit* $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$. *Donc*, si $A \cup B \neq \emptyset$ alors f n'est pas surjective.

   Par contre si $A \cup B = \emptyset$ alors $H \cup K$ est un antécédent de (H, K) par f.

   Donc f est surjective sietssi $A \cup B = \emptyset$.

4) f est bijective sietssi (A, B) est une partition de E.
5) f^{-1} :$\begin{pmatrix} \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(E) \\ (H, K) \mapsto H \cup K \end{pmatrix}$.
6) card$(\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)) = card(\mathscr{P}(E))$. Vérif: $card(A) + card(B) = card(E)$
7) card$(\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)) = $ card$(\mathscr{P}(A)) \times$ card$(\mathscr{P}(B)) = 2^{card(A)} \times 2^{card(B)} = 2^{card(A)+card(B)} = 2^{card(E)} =$ card$(\mathscr{P}(E))$

Ex 1 Soit E un ensemble et $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une partition de E.

1) Justifier que : $\forall x \in E, \exists!\, i \in [\![1, n]\!] / x \in A_i$.

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on dit que $x \sim y$ lorsque x et y appartiennent au même A_i.

2) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
3) Soit $x \in E$, on note $\bar{x} = \{y \in E / x \sim y\}$ appelée la classe d'un élément x de E . Décrire $\bar{x}$.

Ex 2

1) Un digicode est constitué d'un chiffre d'une lettre A *ou* B et d'un autre chiffre dans cet ordre. Combien de codes existe-t-il ?
2) J'ai dans ma garde-robe 17 pantalons , 15 jupes , 28 tee-shirts , 7 chemisiers , 3 paires de collants de couleurs différentes et 30 pulls . Combien ai-je de tenues différentes ?
3) En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères .Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Combien de caractères peut –on coder avec un octet (8 chiffres binaires ordonnés) ?
4) Combien de trinômes de colles différents peut-on former dans une classe de PCSI de 35 élèves ?
5) Au loto, il y a 49 numéros, une grille de loto est composée de 6 numéros. Quel est le nombre de grilles différentes ?
6) Une plaque d'immatriculation française est composée de deux lettres puis trois chiffres et deux lettres : $AB - 123 - CD$. Les lettres I, O, U ne sont jamais utilisés, les couples SS et WW non plus. Combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?

Ex 3 Dans un lycée de 1200 élèves , 652 pratiquent une activité sportive , 327 jouent d'un instrument et 453 ne font ni sport , ni musique . Déterminer le nombre d'élèves sportifs et musiciens .

Ex 4

1) Un digicode est constitué de trois chiffres compris entre 0 et 9 et d'une lettre A *ou* B .
   a) Combien de codes existe-t-il ne comportant que des chiffres distincts ?
   b) Combien de codes existe-t-il ne comportant que des chiffres dans un ordre strictement croissant ?
   c) Combien de codes existe-t-il comportant exactement deux chiffres égaux ?
   d) Combien de codes existe-t-il comportant au moins un 1?
   e) Soit $k \in \{0, .., 18\}$. Combien de codes dont la somme des deux premiers chiffres vaut k existe-t-il ?

2) Une agence matrimoniale souhaite faire un sondage auprès de ses clients. Elle teste son questionnaire sur un échantillon de 4 personnes parmi les 300 clients dont 120 femmes.
   a) Quel est le nombre d'échantillons différents possibles ?
   b) Quel est le nombre d'échantillons différents ne contenant aucune femme ?
   c) Quel est le nombre d'échantillons différents contenant au moins un homme et une femme ?

3) Dans une urne, il y a 15 boules numérotées de 1 à 15, les boules 1 à 5 sont blanches , les autres sont noires
   a) On tire cinq boules simultanément.
      i. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
      j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires ?
   b) On tire successivement 5 boules sans remise.
      i. En tenant compte de l'ordre combien y-a-t-il de tirages possibles ?
      j. Combien de tirages donnent deux boules blanches et 3 boules noires dans tout ordre ?

Ex 5 Déterminer le nombre d'anagrammes (sans sens) des mots suivants : SMARTPHONE , SOURISpet BONBONNE.

Smartphone est un mot de 10 lettres toutes distinctes. Donc construire un anagramme de Smartphone revient à placer ces 10 lettres distinctes dans 10 cases différentes, il y a donc autant d'anagrammes de Smartphone que de permutations d'un ensemble à 10 éléments soit 10! anagrammes .

Souris est un mot de 6 lettres dont deux lettres sont égales et les autres toutes distinctes. Donc construire un anagramme de Souris revient à choisir deux places parmi les 6 pour placer les deux lettres S puis à placer les 4 autres lettres distinctes dans les 4 places restantes. Le nombre d'anagrammes de Souris est donc égal à $\underbrace{\binom{6}{2}}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de places}\\ \text{pour les } S}} \underbrace{4!}_{\substack{\text{nombres de}\\ \text{possibilités}\\ \text{pour les autres lettres}}}$

Bonbonne est un mot de 8 lettres dont deux B, deux 0, trois N et un E. Donc construire un anagramme de Souris revient à :
choisir deux places parmi les 8 pour placer les des deux lettres B .
choisir deux places parmi les 6 restantes pour placer les des deux lettres O.
choisir trois places parmi les 4 restantes pour placer les trois lettres N

Le nombre d'anagrammes de Bonbonne est donc égal à $\underbrace{\binom{8}{2}}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de places}\\ \text{pour les } B}} \underbrace{\binom{6}{2}}_{\substack{\text{nombres de}\\ \text{possibilités}\\ \text{pour } O}} \underbrace{\binom{4}{3}}_{\substack{\text{nombres de}\\ \text{possibilités}\\ \text{pour } N}}$.

Ex 6
1) Calculer le nombre de surjections de {1,2,3} sur {1,2,3} .
2) Calculer le nombre d'applications de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissantes.
3) Calculer le nombre de surjections de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$.
4) Calculer le nombre de surjections de $\{1,2,\dots,n\}$ dans {0,1}.
5) Déterminer le nombre d'applications f de {1, ,10} dans {1,10} telles que , si n pair alors $f(n)$ pair .
6) Déterminer le nombre d'applications injectives de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image.

1) Comme {1,2,3} est un ensemble fini,[f est une surjection de {1,2,3} sur {1,2,3} sietssi f est une permutation de {1,2,3}]. Donc le nombre de surjections de {1,2,3} sur {1,2,3} est égal au nombre de permutations de {1,2,3} donc est égal à 3! .

2) Construire une application de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissante revient à
1. Choisir les p images distinctes (car f strictement croissante donc injective) .
2. Ordonner ces images pour savoir qui est $f(1), f(2),\dots,f(p)$.

En effet , on peut d'abord remarquer qu'une application strictement croissante de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ étant injective, les entiers $f(1), f(2),\dots,f(p)$ sont tous distincts dans $\{1,\dots,n\}$. Par conséquent, si $p > n$ alors $\{1,\dots,n\}$ ne contient pas p valeurs distinctes donc il n'existe aucune application strictement croissante de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. De plus, considérons $y_1, y_2,\dots,y_p$ des entiers distincts choisis parmi les n entiers 1,2,…,n. Ordonnons ces entiers de manière strictement croissante : $y_{i_1} < y_{i_2} < \dots < y_{i_p}$ tels que $\{i_1, i_2,\dots,i_p\} = \{1,2,\dots,p\}$. Alors il existe une et une seule application de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissante qui vérifie : $\forall k \in [\![1,p]\!], f(k) = y_{i_k}$. Nous venons de démontrer qu'en notant A l'ensembles de applications strictement croissantes de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ et B l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$ contenant p éléments , $\varphi: (f \mapsto \{f(1), f(2),\dots,f(p)\})$ est bijective de A sur B.

Il existe donc autant d'applications strictement croissantes de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ que de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Ainsi, le nombre d'applications de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ strictement croissantes est $\binom{n}{p}$.

3) Construire une surjection de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\dots,n\}$, c'est :
1.Choisir l'élément c de $\{1,2,\dots,n\}$ qui aura deux antécédents

2. Choisir les deux éléments a et b de $\{0,1,2,\ldots,n\}$ qui auront la même image
3. Construire une bijection de $\{0,1,2,\ldots,n\}\backslash\{a,b\}$ sur $\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{c\}$.

En effet , considérons f une surjection de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\ldots,n\}$. Alors f n'est pas une bijection (car $card\{0,1,..,n\} \neq card(\{1,2,\ldots,n\})$ et tout élément de $\{1,2,\ldots,n\}$ doit avoir au moins un antécédent par f . Comme $card\{0,1,..,n\} = card(\{1,2,\ldots,n\}) + 1$, un unique élément de $\{1,2,\ldots,n\}$ aura exactement deux antécédents par f et les autres éléments de $\{1,2,\ldots,n\}$ auront exactement un antécédent par f . puisque

si deux éléments distincts a et b de $\{1,2,\ldots,n\}$ ont deux antécédents (par f) chacun : a_1,a_2,b_1,b_2 alors $card(\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,b_1,b_2\}) = n+1-4 = n-3 < n-2 = card(\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{a,b\})$ donc il n'existe pas de surjection de $\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,b_1,b_2\}$ sur $\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{a,b\}$... donc une telle f n'existe pas.

De même si un élément a de $\{1,2,\ldots,n\}$ a trois antécédents (par f) : a_1,a_2,a_3, $card(\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,a_3\}) = n+1-3 = n-2 < n-1 = card(\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{a\})$ donc il n'existe pas de surjection de $\{0,1,..,n\}\backslash\{a_1,a_2,a_3\}$ sur $\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{a\}$ donc une telle f n'existe pas.

Alors, le nombre de surjection de $\{0,1,..,n\}$ sur $\{1,2,\ldots,n\}$ est $\underbrace{n}_{\substack{choix\ de\\ c}} \underbrace{\binom{n+1}{2}}_{\substack{choix\ des\ deux\\ antécédents\ de\ c}} \underbrace{(n-1)!}_{\substack{nombre\ de\ bijection\\ d'un ensemble\ de\ (n-1)\\ éléments\ dans\ un\ ensemble\\ de\ n-1\ éléments}}$.

4) Il n'existe que deux applications de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\{0,1\}$ qui ne sont pas des surjections : l'application constante égale à 0 et celle constante égale à 1. Donc le nombre de surjections de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\{0,1\}$ est donc égal au nombre total d'applications de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\{0,1\}$ auquel on ôte 2 soit $2^n - 2$.

5) Construire une application f de {1, ,10} dans {1,10} telles que , si n pair alors $f(n)$ pair , revient à :

1.Construire une application de $\{2,4,6,8,10\}$ sur $\{2,4,6,8,10\}$
1.Construire une application de $\{1,3,5,7,9\}$ sur $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Le nombre d' applications f de {1, ,10} dans {1,10} tq (n pair$\Longrightarrow f(n)$ pair) est donc $\underbrace{5^5}_{\substack{nbre\\ d'applications\\ d'un\ ensemble\ de\ cardinal\ 5\\ dans\\ un\ ensemble\ de\ cardinal\ 5}} \times \underbrace{10^5}_{\substack{nbre\\ d'applications\\ d'un\ ensemble\ de\ cardinal\ 5\\ dans\\ un\ ensemble\ de\ cardinal\ 10}}$.

6) $card(\{1,2,..,p\}) = p$ et $card(\{1,\ldots,n\}) = n$.

Donc, si $p > n$ alors il n'existe aucune injection de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$. Désormais supposons que $p \leq n$.
Construire une application f injective de $\{1,2,..,p\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$ qui admettent 1 dans leur image, revient à

1. Choisir l'unique antécédent a de 1 par f parmi les entiers $1,2,..,p$.
2. Construire une injection de $\{1,2,..,p\}\backslash\{a\}$ sur $\{2,\ldots,n\}$

Le nombre d' applications injectives de $\{1,2,..,p\}$dans $\{1,\ldots,n\}$qui admettent 1 dans leur image est donc

$\underbrace{p}_{\substack{nbre\ d'antécédents\\ possibles\ pour\ 1}} \times \underbrace{A_{n-1}^{p-1}}_{\substack{nbre\\ d'applications\ injectives\\ d'un\ ensemble\ de\ cardinal\ p-1\\ dans\\ un\ ensemble\ de\ cardinal\ n-1}}$ (cette formule reste valable si $p > n$ puisque dans ce cas $p-1 > n-1$ donc $A_{n-1}^{p-1} = 0$)

Ex 7 Soit E un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$ contenant a entiers pairs et b entiers impairs. Montrer en utilisant E que : $\sum_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k} = \binom{a+b}{p}$.En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ $où\ n \in \mathbb{N}$.

Notons A l' ensemble de parties de E à p éléments .

Comme $card(E) = a+b$, $card(A) = \binom{a+b}{p}$.

Comptons d'une autre manière ce nombre de parties de E à p éléments. Notons $\forall k \in [\![0,p]\!]$, A_k l'ensemble des aprties de E à p éléments contenant k élémenets pairs. Alors $(A_0, A_1, \ldots, A_p)$ est une partition de A . Donc $card(A) = \sum_{k=0}^{p} card(A_k)$

Consrtuire un élément de A_k revient à

1. Choisir les k éléments pairs parmi les a appartement à E si possible (i.e. si $k \leq a$).
2. Choisir les $p-k$ autres éléments qui sont necéssairement impairs et choisis parmi les b appartement à E si possible (i.e. si $p-k \leq b$).

Donc, $card(A_k) = \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$ valable si $k > a$ ou $p-k > b$ car dans ce cas $A_k = \emptyset$ donc $card(A_k) = 0 = \binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$).

Ainsi, $\binom{a+b}{p} = cardA = \sum_{k=0}^{p}\binom{a}{k}\binom{b}{p-k}$.

Ex 8 Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $E = \{1,\ldots,n\}$ Déterminer :

1) le nombre de couple (x,y) d'éléments de E tels que $x+y=n$.
2) le nombre de couple (x,y) d'éléments distincts de E .
3) le nombre de couple (x,y) d'éléments de E tels que $x > y$.
4) le nombre u_n de couple (x,y) d'éléments de E tels que x ou y impair . Calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}$.

5) le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, .., x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$.
6) le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, .., x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p$.

1) $card\{(1, n-1), (2, n-2), \dots, (n-1, 1)\} = n-1$
2) $card\{(x,y) \in \{1, \dots, n\}^2 / x \neq y\} = A_n^2 = n(n-1)$
3) $Notons\ A_k = \{(k,y) \in \{1, \dots, n\}^2 / k > y\}\ et\ A = \{(x,y) \in \{1, \dots, n\}^2 / x > y\}$. Alors $(A_2, A_3, \dots, A_n)$ est une partition de A donc $card(A) = \sum_{k=1}^{n} card(A_k) \underbrace{=}_{car\ A_k = \{(k,k-1),(k,k-2),\dots,(k,1)\}} \sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.
4) $u_n = cardB$ où $B = \{(x,y) \in \{1, \dots, n\}^2 /\ x$ ou y impair$\}$.

$B = E^2 \backslash \{(x,y) \in \{1, \dots, n\}^2 /\ x$ et y pairs $\}$

$Or, C = \{(x,y) \in \{1, \dots, n\}^2 /\ x$ et y pairs $\} = \begin{cases} \{2,4,6, \dots, n\} \times \{2,4,6, \dots, n\} si\ n\ pair \\ \{2,4,6, \dots, n-1\} \times \{2,4,6, \dots, n-1\} si\ n\ pair \end{cases}$. Donc $card(C) = \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right)^2 si\ n\ pair \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 si\ n\ impair \end{cases}$.

Alors $u_n = card(B) = card(E \times E) - cardC = \begin{cases} n^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2 si\ n\ pair \\ n^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 si\ n\ impair \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{4}n^2 si\ n\ pair \\ \frac{3}{4}n^2 + n - \frac{1}{4}\ si\ n\ impair \end{cases}$.

Donc, $v_n = \frac{u_n}{n^2} = \begin{cases} \frac{3}{4} si\ n\ pair \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}\ si\ n\ impair \end{cases}$. Donc $\lim_{n \to +\infty} v_{2n} = \frac{3}{4} = \lim_{n \to +\infty} v_{2n+1}. Ainsi\ \lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{4}$.

5) Construire un p-uplet $(x_1, x_2, .., x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$, revient à

1. Choisir p éléments distincts parmi les n éléments de E (imoosible si $p > n$).
2. Ordonner ces p éléments de manière strictement croissantes pour le ranger deans le p-uplet.

Donc, le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, .., x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ est $\underbrace{\binom{n}{p}}_{\substack{nbre\ de \\ façon\ de\ prendre \\ p\ éléméents\ parmir\ n}} \times \underbrace{1}_{\substack{nbre\ de\ ùfacons\ de\ les \\ ordonner}}$

6) Soit A l'ensemble des p-uplets $(x_1, x_2, .., x_p)$ d'éléments de E tels que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p$.

Soit B l'ensemble des p-uplets $(y_1, y_2, .., y_p)$ d'éléments de $[\![1, n+p-1]\!]$ tels que $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$.D'après 5) ; $card(B) = \binom{n+p-1}{p}$.

Cosntruisons une bijection de A sur B :

Si $x_1, x_2, .., x_p$sont des entiers tels que $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p \leq n$ alors $1 \leq x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 < \cdots < x_p + p - 1 \leq n + p - 1$.

Soit f définie sur A par : $f(x_1, x_2, .., x_p) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2 .., x_p + p - 1)$.

Alors, d'après ce qui précède, $\forall (x_1, x_2, .., x_p) \in A, f(x_1, x_2, .., x_p) \in B$. De plus, f est bijective de A sur B . En effet,

$Soit\ (y_1, y_2, .., y_p) \in B$.

$$f(x_1, x_2, .., x_p) = (y_1, y_2, .., y_p) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + 1 \\ y_3 = x_3 + 2 \\ \vdots \\ y_p = x_p + p - 1 \\ x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - 1 \\ x_3 = y_3 - 2 \\ \vdots \\ x_p = y_p - (p-1) \\ x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_p \end{cases}.$$

Comme $y_1, y_2, .., y_p\ sont\ des\ entiers\ tels\ que\ 1 \leq y_1 < y_2 < .. < y_p \leq n + (p-1)$, nous pouvons affirmer que : $1 \leq y_1 \leq y_2 - 1 \leq y_3 - 2 \leq .. \leq y_p - (p-1) \leq n$. Ainsi, $\left(y_1, y_2 - 1, y_3 - 2, .., y_p - (p-1)\right)$ est l'unique antécédent de $(y_1, y_2, .., y_p)$par f.

J'en déduis que $card(A) = card(B) = \binom{n+p-1}{p}$.

Ex 9 Soit un ensemble fini E de cardinal n où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair , que de parties de cardinal impair .
2) Calculer $\sum_{A \subset E} (-1)^{card(A)}$.
3) Dénombrer les couples (X, Y) de $\mathscr{P}(E)^2$tels que $X \subset Y$.
4) Dénombrer les couples (X, Y) de $\mathscr{P}(E)^2$tels que $X \cap Y = \emptyset$.
5) Soit $p \in [\![0, n]\!]\ et\ F = \{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2 / X \cap Y = \emptyset\ \ et\ card(X \cup Y) = p\}$. En dénombrant F, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

1) Soit $\Phi = \{X \subset E / card(X)\ pair\}$ et $\Gamma = \{X \subset E / card(X)\ impair\}$. Comme $\Gamma\ et\ \Phi$ sont des ss-ensembles de $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(E) est\ fini\ (\ de\ cardinal\ 2^n)$, $\Gamma\ et\ \Phi$ sont finis.

Soit a un élément de E.

Posons $f : \Phi \to \Gamma$ telle que $f(X) = \begin{cases} X \cup \{a\}\ si\ a \notin X \\ X \backslash \{a\}\ si\ a \in X \end{cases}$ et $g : \Gamma \to \Phi$ telle que $g(X) = \begin{cases} X \cup \{a\}\ si\ a \notin X \\ X \backslash \{a\}\ si\ a \in X \end{cases}$.

Alors $g\circ f=id_\Phi$ et $f\circ g=id_\Gamma$. Donc f est bijective et ainsi, $card(\Gamma)=card(\Phi)$.
De plus, (Γ,Φ) est une partition de $\mathcal{P}(E)$. Donc, $card(\Gamma)+card(\Phi)=card(\mathcal{P}(E))=2^n$. Donc $2card(\Gamma)=2^n$ et ainsi, $card(\Phi)=card(\Gamma)=2^{n-1}$.

2) $$\sum_{A\subset E}(-1)^{card(A)}=\sum_{A\in\mathcal{P}(E)}(-1)^{card(A)}\underbrace{=}_{car\ (\Gamma,\Phi)\ est\ une\ partition\ de\ \mathcal{P}(E)}\sum_{A\in\Phi}(-1)^{card(A)}+\sum_{A\in\Gamma}(-1)^{card(A)}$$
$$=\sum_{A\in\Phi}1+\sum_{A\in\Gamma}(-1)=card(\Phi)-card(\Gamma)=0.$$

3) Soit $\Omega=\{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2/X\subset Y\}$ et $\Omega_k=\{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2/X\subset Y\ et\ card(Y)=k\}\subset\Omega$.
Alors $(\Omega_0,\Omega_1,\dots,\Omega_n)$ est une partition de Ω car
- Si $k\neq k'$ alors $[(X,Y)\in\Omega_k\Longrightarrow cardY=k\Longrightarrow cradY\neq k'\Longrightarrow(X,Y)\notin\Omega_{k'}]$ ce qui signifie que $\Omega_k\cap\Omega_{k'}=\emptyset$.
- $\forall k,\Omega_k\subset\Omega\ donc\ \bigcup_{k=0}^n\Omega_k\subset\Omega\ et$ Si $(X,Y)\in\Omega$ alors Y est fini et en posant $k=card(Y)\ alors\ (X,Y)\in\Omega_k$.
  Ainsi, $\Omega=\bigcup_{k=0}^n\Omega_k$.

Par conséquent, $card(\Omega)=\sum_{k=0}^n card(\Omega_k)$. Déterminons $card(\Omega_k)$:
Construire un élément de $\Omega_k$revient à :
1. Choisir une partie Y de E à éléments.
2. Choisir un sous-ensemble X de Y .

Donc, $card(\Omega_k)=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{choix\\ de\ Y\\ =\\ nbre\ de\\ parties\ à\ k\\ éléments\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ n\ éléments}}\underbrace{2^k}_{\substack{choix\ de\ X\\ =\\ nbre\ de\ parties\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ k\ éléments}}$

J'en déduis que $card(\Omega)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}2^k=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}1^{n-k}2^k\overset{FBN}{=}(1+2)^n=3^n$.

4) Soit $\Omega'=\{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2/X\cap Y=\emptyset\}$
Soit $f:\Omega\to\Omega'\ telle\ que\ f((X,Y))=(X,\bar{Y})\ et\ \ g:\Omega'\to\Omega\ telle\ que\ g((X,Y))=(X,\bar{Y})$. Alors $f\circ g=id_\Omega\ et\ g\circ f=id_{\Omega'}$. Donc f est bijective de Ω sur Ω' et par suite, $card(\Omega')=card(\Omega)=3^n$.

5) Soit $p\in[\![0,n]\!]\ et\ F=\{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2/X\cap Y=\emptyset\ \ et\ card(X\cup Y)=p\}$.
Première méthode pour dénombrer F : Construire un élément de F revient à :
1. Choisir une partie de E à p éléments. $\to X\cup Y$
2. Choisir dans cette partie un sous-ensemble X (le reste de l'ensemble constituera nécessairement Y)

Donc $card(F)=\underbrace{\binom{n}{p}}_{\substack{choix\ pour\\ X\cup Y\\ =\\ nbre\ de\ parties\\ à\ p\ éléments\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ n\ élément.}}\underbrace{2^p}_{\substack{choix\ pour\ X\\ dans\ X\cup Y\\ =\\ nbre\ de\ parties\ dans\\ un\ ensemble\ à\\ p\ éléments}}$.

Deuxième méthode pour dénombrer F : Soit $F_k=\{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2/X\cap Y=\emptyset\ \ et\ card(X\cup Y)=p\ et\ card(X)=k\}$
Alors $(F_k)_{k=0..p}$est une partition de F.Donc $cardF=\sum_{k=0}^p card(F_k)$ Dénombrons F_k: Construire un élément de F_k revient à :
3. Choisir une partie de E à k éléments. $\to X$
4. Choisir une partie de $\bar{X}$ à $p-k$ éléments $\to Y$.

$Donc\ card(F_k)=\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{nbre\\ de\ parties\ de\ E\\ à\ k(=card(X))\ éléments}}\underbrace{\binom{n-k}{p-k}}_{\substack{nbre\ de\ parties\\ à\ o-k\ éléments\\ dans\ un\ ensemble\\ à\ n-k(=card\bar{X}\ )\ éléments}}$

Ainsi, $2^p\binom{n}{p}=cardF=\sum_{k=0}^p\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$

Ex 10 Pour tout entier naturel n non nul, on pose D_n le nombre de partitions de l'ensemble $E_n=\{1,\dots,n\}$.
Par convention , $D_0=1$.
1) Montrer que : pour tout entier n non nul, $D_{n+1}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}D_k$ puis que $D_n\leq n!$.
2) Soit $f(x)=e^{e^x-1}$.
   a. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0 de la forme : $f(x)=\sum_{k=0}^N\frac{a_k}{k!}x^k+o_0(x^N)$.
   b. En utilisant la relation, $f'(x)=e^xf(x)$ vérifiée par f en tout réel x, montrer que (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (D_n).
   c. En déduire une relation entre a_n $et\ D_n$.
   d. Calculer alors D_2,D_3,D_4,D_5, grâce au DL , puis D_6 grâce à 1) .

1. $E_1=\{1\}$. Il existe une unique partition de E_1. Donc $D_1=1=\binom{1}{0}D_0$.

Soit $E_{n+1} = \{1,2,3,\dots,n+1\}$ et P_{n+1} l'ensemble des partitions de E_{n+1}. Toute partition de E_{n+1} est constituée de parties de E_{n+1} dont l'une contient l'élément $n+1$. Cette partie A contenant $n+1$ est de cardinal $p \in [\![1, n+1]\!]$.
Notons K_p l'ensemble des partitions de E_{n+1} dont la partie A contenant $n+1$ est de cardinal p.
Alors $p \neq q \Longrightarrow K_p \cap K_q = \emptyset$ et $\bigcup_{q=1}^{n+1} K_q = P_{n+1}$. Par conséquent, $D_{n+1} = card(P_{n+1}) = \sum_{p=1}^{n+1} card(K_p)$.
Cherchons $card(K_p)$: Pour construire une partition de K_p,

- il faut choisir la partie A contenant $n+1$: cette partie est de cardinal p mais l'un de ces éléments est connu : il s'agit de l'élément $n+1$. Il faut donc choisir les autres éléments de A : on choisit ces $p-1$ autres éléments parmi les n éléments restants de E_{n+1}. J'ai donc $\binom{n}{p-1}$ choix pour A.
- Il faut choisir les autres parties de la partition. Ces autres parties vont couvrir $E_{n+1}\backslash A$. Choisir ces autres parties, c'est donc choisir une partition de l'ensemble $E_{n+1}\backslash A$ qui contient $n+1-p$ éléments. J'ai donc D_{n+1-p} choix pour ces autres parties.

Comme deux parties A différentes donnent deux partitions différentes et deux partitions de $E_{n+1}\backslash A$ différents donneront deux partitions de E_{n+1} différentes, j'en déduis que $card\,(K_p) = \binom{n}{p-1} D_{n+1-p}$.
Et par suite, $D_{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1} D_{n+1-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} D_{n-p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
Montrons par récurrence forte sur n que $\forall n, D_n \leq n\,!$.
$D_0 = 1 \leq 0!$, puis $D_1 = 1 \leq 1!$ et enfin $D_2 = 1 + 1 = 2 \leq 2!$.
Soit n un entier naturel supérieur à 2. Supposons que $\forall k \in [\![0, n]\!], D_k \leq k!$. Alors $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! =$
$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\leq}_{\substack{car\ \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\ tend \\ vers\ e\ en\ croissant}} e(n!) \underbrace{\leq}_{car\ n\geq 2} (n+1)!$ OK .
Donc $\forall n, D_n \leq n!$

3) Soit $f(x) = e^{e^x - 1}$.

a. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc Taylor-Young assure que f admet le développement limité à tout ordre N au voisinage de 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k!} x^k + o_0(x^N)$ et $a_k = f^{(k)}(0)$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x f(x)$. Alors en appliquant Leibniz, j'obtiens : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} exp^{(n-k)}(x) f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x f^{(k)}(x)$.
Donc, $a_n = f^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$. Ainsi, (a_n) vérifie la même relation de récurrence que (D_n).

c. $a_0 = f(0) = 1 = \mathrm{D}_0$. Soit n un entier naturel. Supposons que $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k = D_k$.
Alors, $D_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = a_{n+1}$. J'en déduis que $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = D_k$.

d. $f(x) = e^{e^x - 1} = e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5)} \overset{\substack{u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \\ \lim_{x\to 0} u(x) = 0}}{\cong} 1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{6} + \frac{u(x)^4}{24} + \frac{u(x)^5}{120} + o_0(x^5)$

$$\text{avec} \begin{cases} u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o_0(x^5) \\ u(x)^2 = x^2 + x^3 + \frac{7x^4}{12} + \frac{x^5}{4} + o_0(x^5) \\ u(x)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{5x^5}{4} + o_0(x^5) \\ u(x)^4 = x^4 + 2x^5 + o_0(x^5) \\ u(x)^5 = x^5 + o_0(x^5) \end{cases} .$$

Donc, $f(x) = \cdots$.

Ex 11 Pour tout n un entier naturel non nul , on note a_n le nombre de façon qu'à le père noël de distribuer n cadeaux à n enfants [sans qu'aucun enfant ne reçoive le cadeau qu'il a demandé](**)(sachant que dans sa hotte , ce père noël a exactement les n cadeaux commandés par les n enfants !!) .

1) Calculer a_1, a_2, a_3.
2) Montrer que : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+2} = (n+1)(a_n + a_{n+1})$.
3) Montrer que : pour tout entier naturel ≥ 1 , $a_{n+1} - (n+1)a_n = (-1)^{n+1}$.
4) Montrer que : pour tout entier naturel ≥ 1 , $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
5) Grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange , déterminer un équivalent simple de a_n.

1) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$.

2) On considère $n+2$ cadeaux distincts numérotés de 1 à $n+2$ et $n+2$ enfants distincts numérotés de 1 à $n+2$. Il y a deux façons disjointes pour le père noël de livrer à cas enfants, ces cadeaux avec la contrainte (**) :

<u>1ère façon</u> : cadeau 1 à l'enfant $k \neq 1$ et cadeau k à l'enfant 1.

Le père noël choisit l'enfant k qui reçoit le cadeau 1, parmi les enfants numérotés de 2 à $n+2$: il a $n+1$ choix. Et ensuite, le père noël donne le cadeau k à l'enfant 1.

Il reste alors à distribuer les n cadeaux $2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+2$ aux n enfants $2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+2$ avec la contrainte (**) : il a a_n choix. Ainsi, il y a $(n+1)a_n$ distributions possibles de cette première manière.

<u>2ème façon</u> : cadeau 1 à l'enfant $k \neq 1$ et cadeau k n'est pas distribué à l'enfant 1.

Le père noël choisit l'enfant k qui reçoit le cadeau 1, parmi les enfants numérotés de 2 à $n+2$: il a $n+1$ choix.

Il reste alors à distribuer les $n+1$ cadeaux $2,3,\ldots,k-1,k,k+1,\ldots,n+2$ aux $n+1$ enfants $1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n+2$ avec la contrainte : l'enfant 1 ne reçoit pas le cadeau k, l'enfant 2 ne reçoit pas le cadeau 2, l'enfant 3 ne reçoit pas le cadeau 3,.. l'enfant $k-1$ ne reçoit pas le cadeau $k-1$, l'enfant $k+1$ ne reçoit pas le cadeau $k+1$,…, l'enfant n ne reçoit pas le cadeau n. : il a a_{n+1} choix. Ainsi, il y a $(n+1)a_{n+1}$ distributions possibles de cette deuxième manière.

J'en déduis que $a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + (n+1)a_n$ distributions possibles.