Sup PCSI 2023-2024 Mathématiques

PROGRAMME DE COLLE 29

Chapitre 22 Espaces préhilbertiens réels

I Produit scalaire et norme

- Définition d'un produit scalaire . Définition d'un espace préhilbertien réel E.

l'application $\varphi:\begin{pmatrix} E^2 \to \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) \mapsto (\vec{x}/\vec{y}) \end{pmatrix}$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-e-v E lorsque

- ✓ φ est bilinéaire : $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3,\ \ (\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}/\vec{z}) = \alpha(\vec{x}/\vec{z}) + \beta(\vec{y}/\vec{z})\ et (\vec{z}/\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}) = \alpha(\vec{z}/\vec{x}) + \beta(\vec{z}/\vec{y})$
- ✓ φ est symétrique : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \ (\vec{x}/\vec{y}) = (\vec{y}/\vec{x})$.
- ✓ φ est définie positive : $\forall\vec{x} \in E,\ \ (\vec{x}/\vec{x}) \geq 0\ et\ [(\vec{x}/\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}]$.

- Produit scalaire usuel (canonique) dans $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], M_n(\mathbb{R}), C^0([a,b],\mathbb{R}), \mathbb{R}[X]$.
- Règles de calcul et inégalité de Cauchy-Schwarz.
  - ✓ $\forall\vec{x} \in E, (\vec{x}/\vec{O}) = 0$
  - ✓ $\forall(\vec{x_1},\vec{x_2},\dots\vec{x_n},\vec{y_1},\vec{y_2},\dots\vec{y_p}) \in E^{n+p}, \forall(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_p) \in \mathbb{R}^{n+p}\ ,(\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{x_i}/\sum_{i=1}^p \beta_i\vec{y_i}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \alpha_i\beta_j(\vec{x_i}/\vec{y_j})$. .
  - ✓ $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \ (\vec{x}/\vec{y})^2 \overset{C.S}{\leqq} (\vec{x}/\vec{x})(\vec{y}/\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2\,\|\vec{y}\|^2$.
- Définition d'une norme .

l'application $N:\begin{pmatrix} E \to \mathbb{R} \\ \vec{x} \mapsto \|\vec{x}\| \end{pmatrix}$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-e-v E lorsque

- ✓ $\forall\vec{x} \in E, \|\vec{x}\| \geq 0$
- ✓ $\forall\vec{x} \in E, [\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}]$
- ✓ $\forall\vec{x} \in E, \forall\lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$
- ✓ $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \ \|\vec{x}+\vec{y}\| \overset{I.T}{\leqq} \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. Inégalité triangulaire

- Norme euclidienne (norme associée à un produit scalaire). Nouvelle écriture de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \ |(\vec{x}/\vec{y})| \overset{C.S}{\leqq} \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

- Identité de polarisation $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, (\vec{x}/\vec{y}) = \frac{1}{4}\,[\|\vec{x}+\vec{y}\| - \|\vec{x}-\vec{y}\|]$.

II Orthogonalité dans un espace préhilbertien E

- Définition de deux vecteurs de E orthogonaux : $\vec{x} \perp \vec{u}$ lorsque $(\vec{x}/\vec{u}) = 0$, d'un vecteur orthogonal à une partie X de E : $\vec{u} \perp X$ lorsque $\forall\vec{x} \in X, (\vec{x}/\vec{u}) = 0$, de deux parties de E orthogonales : $Y \perp X$ lorsque $\forall\vec{x} \in X, \forall\vec{y} \in Y, (\vec{x}/\vec{y}) = 0$
- Définition de l'orthogonal d'une partie de E. L'orthogonal $X^\perp = \{\vec{u} \in E/\forall\vec{x} \in X, (\vec{x}/\vec{u}) = 0\}$.
- L'orthogonal $X^\perp$ d'une partie X de E est un sous-espace-vectoriel de $E\ et\ \ X^\perp = (vect(X))^\perp$.
- Propriétés :
  - ✓ Si $X \subset Y$ alors $Y^\perp \subset X^\perp$.
  - ✓ Si deux ss-e-v F et G de E sont orthogonaux alors F et G sont en somme directe et G est un ss-e-v de $F^\perp$ et F est un ss-e-v de $G^\perp$
- Caractérisation de l'orthogonal d'un ss-e-v de E engendré par une famille de vecteurs :
  - ✓ Si $F = vect(\vec{u_1},\dots,\vec{u_n})$ alors $[\vec{x} \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], (\vec{x}/\vec{u_i}) = 0]$.
  - ✓ Si $F = vect(\vec{u_1},\dots,\vec{u_n})$ et $G = vect(\vec{v_1},\dots,\vec{v_p})$ alors $[F \perp G \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,j]\!], (\vec{u_i}/\vec{v_j}) = 0]$.
- Définition d'une famille orthogonale, orthonormale, d'une base orthogonale et d'une base orthonormale.
- Base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du p.s canonique . Idem dans $\mathbb{R}_n[X], M_n(\mathbb{R})$.
- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Toute famille orthonormée est libre.
- **Théorème de Pythagore :** $\vec{x} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \|\vec{x}+\vec{u}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{u}\|^2$. Et la généralisation de « $\Longrightarrow$ »: Si $(\vec{u_1},\dots,\vec{u_n})$ est une famille orthogonale alors $\|\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{u_i}\|^2 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\|\vec{u_i}\|^2$.
- **Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** : Si $(\vec{v_1},\dots,\vec{v_n})$ est une famille libre de vecteurs de E alors il existe une famille orthonormée de vecteurs $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ de E tel que $\forall i, \vec{e_i} \in vect((\vec{v_1},\dots,\vec{v_i})$.

III Espace euclidien E

- Définition d'un espace euclidien E.
- **Existence d'une BON :** tout espace euclidien de dimension non nulle possède une BON.
- **Théorème de la base incomplète** : toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée pour obtenir une BON de cet espace.
- **Ecriture dans une BON** : Soit $B = (\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$ une BON de l'espace euclidien E. Alors pour tout $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$ tels que $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k\,\vec{e_k}\ \ et\ \ \vec{y} = \sum_{k=1}^n y_k\,\vec{e_k}\ ,\ on\ a:\ \ x_k = (\,\vec{x}/\vec{e_k}\,)\,, (\vec{x}/\vec{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ et $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k{}^2}$.

IV Orthogonal d'un ss-e-v de dim. finie. Projection orthogonale sur un tel ss-e-v.

- **Théorème sur le supplémentaire orthogonal** Si F est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel alors $F^{\perp}$ est le seul ss-e-v de E, orthogonal à F et supplémentaire de F dans E i.e. $F \oplus F^{\perp} = E \; et \; F^{\perp} \perp F$. $F^{\perp}$est alors appelé le supplémentaire orthogonal de F.
- Si F est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel alors la projection orthogonale sur F notée p_F est alors la projection sur F et parallèlement à $F^{\perp}$.
- Caractérisation du projeté orthogonal sur F :
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$ est le seul vecteur de E qui vérifie : $\begin{cases} p_F(\vec{x}) \in F \\ \vec{x} - p_F(\vec{x}) \in F^{\perp} \end{cases}$.
  - ✓ $Si\ B = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ est une base de F alors $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x})$ est le seul vecteur de E qui vérifie:
$$\begin{cases} p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{u_k} \\ \forall j \in [\![1, n]\!], (\vec{x} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{u_k} / \overrightarrow{u_j}) = 0 \end{cases}.$$
  - ✓ $Si\ B = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est une BON de F alors $\forall \vec{x} \in E, p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{e_k} / \vec{x}) \overrightarrow{e_k}$.
- Projeté orthogonal sur une droite vectorielle : Soit $D = vect(\vec{u})$, droite vectorielle engendrée par $\vec{u}$. $\forall \vec{x} \in E, p_D(\vec{x}) = \frac{(\vec{x}/\vec{u})}{(\vec{u}/\vec{u})} \vec{u}$.
- Caractérisation du projection orthogonale: Si E est un espace euclidien et F est un ss-e-v de E alors
$$f \text{ est la projection orthogonale sur } F \text{ si et seulement si } \begin{cases} f \in \mathscr{L}(E) \\ f \circ f = f \\ Im(f) \perp Ker(f) \end{cases}.$$
- Distance à un ss-e-v de dimension finie F:
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, \forall \vec{f} \in F, \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| \leq \|\vec{x} - \vec{f}\|$.
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, \; d(\vec{x}, F) = \inf\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\} = \min\{\|\vec{x} - \vec{f}\| / \vec{f} \in F\} = \|p_{F^{\perp}}(\vec{x})\| = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$
- Hyperplan dans un espace euclidien: Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E.
  - ✓ Tout vecteur $\vec{N}$ engendrant $H^{\perp}$ est un vecteur normal à H.
  - ✓ Soit $(\vec{e_i})$ $une\ BON\ de\ E$. Si $\vec{N} = \sum_{i=0}^{n} a_i \vec{e_i}$ normal à H alors $H = \{\sum_{i=0}^{n} x_i \vec{e_i} / \sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0\}$.
  - ✓ $\forall \vec{x} \in E, d(\vec{x}, H) = \frac{|(\vec{x}/\vec{N})|}{\|\vec{N}\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}}$.

Chapitre 21 Dénombrement

I Compléments sur les ensembles

Soit E un ensemble .
$\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les parties de E.
$A\ et\ B$ sont deux ensembles disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$.
$(A_1, A_2, \dots, A_m)$ est une partition de E lorsque : $\forall i, A_i \subset E\ et\ \bigcup_{i=1}^{m} A_i = E\ et\ (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$.
La réunion est distributive sur l'intersection et l'intersection est distributive sur la réunion.
$\mathfrak{R}$ est une **relation d'équivalence** sur E lorsque : $\mathfrak{R}$ met en relation deux par deux des éléments de E et vérifie :
$\forall x \in E, x\, \mathfrak{R}\, x$. ($\mathfrak{R}$ est réflexive)
$\forall (x, y) \in E^2, x\, \mathfrak{R}\, y \Rightarrow y\, \mathfrak{R}\, x$ ($\mathfrak{R}$ symétrique)
$\forall (x, y, z) \in E^3, (x\, \mathfrak{R}\, y\ \ et\ y\, \mathfrak{R} z \Rightarrow x\, \mathfrak{R}\, z)$ ($\mathfrak{R}$ transitive) Soit $x \in E$.
La classe de x est noté $cl(x)$ ou $\bar{x}$ $des\ élements\ de\ E\ en\ relation\ avec\ x\ par\ \mathfrak{R}\ i.e. \bar{x} = \{y \in E / x\mathfrak{R}y\}$.
L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathfrak{R}$ est une partition de $\boldsymbol{E}$.

II Ensembles finis

- $card(E)$, le cardinal d'un ensemble fini E, est le nombre d'éléments distincts de E.
- **Cardinal d'un sous ensemble et cas d'égalité**

Si $A \subset E\ tel$ que E est fini alors A est finie, $card(A) \leq card(E)$ et $(card(A) = card(E) \Longleftrightarrow A = E)$.

- **Cardinal d'une réunion deux ensembles disjoints. Cardinal d'une union finie d'ensembles deux à deux disjoints.**

Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles deux à deux <u>disjoints</u> alors $card \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} card E_i$.

- **Cardinal d'une partition de $\boldsymbol{E}$.**

Si la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une partition de E alors $cardE = \sum_{i=1}^{n} cardA_i$.

- **Cardinal d'un complémentaire**

Soit A et B deux sous-ensembles de E. $card\bar{A} = cardE - cardA$ et $card(B \backslash A) = cardB - card(A \cap B)$.

- **Cardinal d'une réunion de deux ensembles quelconques**

Soit $E\ et\ F$ deux ensembles. $card(E) + card(F) = card(E \cup F) + card(E \cap F)$.

- **Cardinal d'un produit cartésien et de $\boldsymbol{E^q}$ (ensemble des $\boldsymbol{q}$-uplets d'éléments de $\boldsymbol{E}$) .**

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Si $E_1, E_2, \ldots, E_q$ sont des ensembles finis alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_q$ est fini $et\ card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_q) = card(E_1) \times card(E_2) \times \ldots \times card(E_q)$.

Si E est un ensemble fini alors $card(E^q) = (card(E))^q$. Autrement dit, $card(E)^q$ est le nombre de q-uplets d'éléments d'un ensemble fini de cardinal p.

III $q-uplets\ et$ Applications entre ensembles finis

- **Relation entre application injective (resp. surjective-bijective) et cardinal**

Soit $E\ et\ F\ \ deux\ ensembles\ finis$.
S' il existe une application $f: E \to F$ injective alors $card(E) \leq card(F)$.
S'il existe une application $f: E \to F$ surjective de E sur F alors $card(E) \geq card(F)$.

Si E est fini et f bijective de E sur F alors F est fini et de même cardinal que E.
Si F est fini et f bijective de E sur F alors E est fini et de même cardinal que F.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est injective si et ssi elle est surjective ssetssi elle est bijective

- **Définition d'un arrangement .**

Pour tous entiers naturels p et q,
on pose : $A_p^q = \begin{cases} p(p-1)\ldots(p-q+1) = \frac{p!}{(p-q)!} & si\ q \leq p \\ 0 & si\ q > p \end{cases} = q!\binom{p}{q}$. $A_p^q\ est$ l'arrangement de q éléments choisis parmi p.

- **Nombre de $q-uplets\ d'éléménts\ (+distincts)\ d'un\ ensemble\ fini$.**

$card(E)^q$ est le nombre de q-uplets d'éléments d'un ensemble fini de cardinal p.
Le nombre de q-uplets d'éléments de l'ensemble fini E à composantes toutes distinctes est $A_{card(E)}^q$.

- **Nombre d'applications (+ injectives)$où\ E\ et\ F\ sont\ finis$.**

L'ensemble des applications de E dans F,deux ensembles finis, est un ensemble fini de cardinal $card(F)^{card(E)}$.

Si E et F sont finis alors le nombre d'applications de E dans F **injectives** est $A_{card(F)}^{card(E)}$

- **Permutations de E.**

Une permutation d'un ensemble fini E est une bijection de E sur E.

Le nombre de permutations d'un ensemble fini de cardinal p est $p!$.

III Ensemble des parties d'un ensemble fini

Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal p est $\binom{p}{k}$.

L'ensemble des parties d'un ensemble fini de cardinal p est un ensemble fini de cardinal 2^p.
Autrement dit, $card(\mathscr{P}(E)) = 2^{card(E)}$.

Questions de cours :

1. **Inégalité de Cauchy-Schwarz.**
2. **Théorème sur le supplémentaire orthogonal : si F est un ss-e-v de dimension finie d'un espace préhilbertien réel alors $F^\perp$ est le seul ss-e-v de E, orthogonal à F et supplémentaire de F dans E et $(F^\perp)^\perp = \mathrm{F}$.**
3. **Retrouver le nombre de q-uplets d'éléments choisis parmi n éléments et le nombre d'applications entre deux ensembles finis.**
4. **Retrouver le nombre de q-uplets à composantes distinctes choisis parmi n éléments et le nombre d'injections entre deux ensembles finis.**
5. **Retrouver le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à p éléments.**