Corrigé du TD 5
Exponentielles complexes-Equations polynomiales-Racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes.

Ex 1 Soit α un réel. Donner les racines *carrées* complexes des nombres complexes a suivants :

1. $a = -1$
2. $a = -3$
3. $a = 2$
4. $a = cos^2(\alpha) - 1$
5. $a = -2i$
6. $a = \frac{1}{4}i$
7. $a = j$
8. $a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}$
9. $a = -2 + i$
10. $a = -12 + 16i$

1) Je cherche à écrire a sous forme d'un carré.
2) Je cherche la forme trigo sympa de $a = re^{i\theta}$, alors les racines carrées sont $\pm\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$
3) Je cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = a$ ...puis je résous un système en identifiant parties réelles , imaginaires et modules !!

1. $a = -1 = i^2$. $Donc,$ i et $-i$ sont les racines carrées complexes de a.
2. $a = -3 = i^2\sqrt{3}^2 = (i\sqrt{3})^2$. $Donc,$ $\sqrt{3}\ i$ et $-\sqrt{3}i$ sont les racines carrées complexes de a.
3. $a = 2 = (\sqrt{2})^2$. $Donc,$ $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les racines carrées complexes de 2.
4. $a = cos^2(\alpha) - 1 = -sin^2(\alpha) = i^2 sin^2(\alpha) = (i\sin(\alpha))^2$. $Donc,$ $i\sin(\alpha)$ et $-i\sin(\alpha)$ sont les racines carr
5. $a = -2i \overset{malin}{\triangleq} (1-i)^2$. $Donc,$ $1-i$ et $-1+i$ sont les racines carrées complexes de $-2i$.
6. La forme trigonométrique de a est sympa ! $a = \frac{1}{4}i = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$. Donc, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ sont les racines carrées complexes de $\frac{1}{4}i$.

   $ou\ bien\ a = \frac{1}{4}i \overset{malin}{\triangleq} \frac{1}{2\times 4}2i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2(1+i)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)\right)^2$
7. $a = j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2$. Donc $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les racines carrées complexes de j.
8. La forme trigonométrique de a est sympa !! $a = \frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-i} = \frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)} = \sqrt{2}\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{-i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = \left[2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}\right]^2$. Donc $2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}$ et $-2^{\frac{1}{4}}e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}$ sont les racines carrées complexes de $\frac{-1-\sqrt{.3}i}{i-1}$
9. La forme trigonométrique de a n'est pas sympa !! $a = -2 + i$. Je cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = -2 + i$.

$$z^2 = -2+i \Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2 = -2+i\\ |x+iy|^2 = |-2+i|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2ixy = -2+i\\ x^2+y^2 = \sqrt{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2 = -2\\ 2xy = 1\\ x^2+y^2 = \sqrt{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2 = -2\\ 2xy = 1\\ x^2+y^2 = \sqrt{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2 = \sqrt{5}-2\\ 2xy = 1\\ 2y^2 = \sqrt{5}+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2 = \frac{\sqrt{5}-2}{2}\\ xy = \frac{1}{2}\\ y^2 = \frac{\sqrt{5}+2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ xy = \frac{1}{2}\\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\end{cases} \underset{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}(5-4)} = \frac{1}{2}}{\underbrace{\Leftrightarrow}} \begin{cases}x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\end{cases}\ et\ \begin{cases}x = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}}\\ y = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\end{cases}$$

Donc, $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}$ sont les deux racines deuxièmes de $-2+i$.

10. La forme trigonométrique de a n'est pas sympa !!
    ou bien j'applique la méthode précédente
    ou bien j'écris : $a = -12 + 16i \overset{malin}{\triangleq} 16 - 4 + 2\times 4\times 2i = 4^2 + (2i)^2 + 2\times 4\times 2i = (4+2i)^2$. $Donc,$ $4+2i$ et $-(4+2i)$ sont les racines carrées complexes de $-12+16i$.

Ex 2 Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe ou (z, w) couple de complexes :

1. $e^{\bar{z}} = -5$.
2. $e^{2z} + e^z + 1 = 0$
3. $(-4-2i)z^2 + (7-i)z + 1 + 3i = 0$
4. $\begin{cases}z + \overline{w} = -1 + 2i\\ \bar{z}w = 1 + 7i\end{cases}$
5. $e^{z^2} = 1$
6. $\begin{cases}e^z + e^w = 2\\ e^{z+w} = 2\end{cases}$
7. $z^4 + 119 - 120i = 0$
8. $z^4 - 14iz^2 + 32 = 0$
9. $z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = 0$
10. $e^{3z} + 3e^{2z} + 24e^{-z} = -8$
11. $z^2\left(1 + tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)z - 4 = 0\ où\ \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$
12. $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$
13. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$

1. $Soit\ z = x + iy \in \mathbb{C}\ tq\ x, y\ réels.$

$$e^{\bar{z}} = -5 \Leftrightarrow e^{x-iy} = 5e^{i\pi} \Leftrightarrow e^x e^{-iy} = 5e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases}e^x = 5\\ \exists k \in \mathbb{Z}/-y = \pi + 2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \ln(5)\\ \exists k \in \mathbb{Z}/-y = \pi + 2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \ln(5)\\ \exists k \in \mathbb{Z}/y = -\pi + 2k\pi\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/z = \ln(5) + i(-\pi + 2k\pi)$ $.Ainsi,$ $Sol = \{\ln(5) + i(-\pi + 2k\pi)\ /k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $Soit\ z = x + iy \in \mathbb{C}\ tq\ x, y\ réels\ et\ Z = e^z.$

$$e^{2z} + e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0 \underset{\substack{\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2\ et\ Z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = j\ et\ Z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2\\ OU\ BIEN\ d'après\ le\ cours, j\ et\ j^2, les\ racines\\ troisièmes\ de\ l'unité\ sauf\ 1,\\ sont\ les\ solutions\ de\ 1+t+t^2=0.}}{\underbrace{\Leftrightarrow}} Z = j\ ou\ Z = j^2 \Leftrightarrow e^z = e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ou\ e^z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow e^x e^{iy} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ou\ e^x e^{iy} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases}e^x = 1\\ \exists k \in \mathbb{Z}/y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{cases} ou \begin{cases}e^x = 1\\ \exists k \in \mathbb{Z}/y = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ \exists k \in \mathbb{Z}/y = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{cases} ou \begin{cases}x = 0\\ \exists k \in \mathbb{Z}/y = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/z = i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\ ou\ z = i\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right).$$

$Ainsi,$ $Sol = \left\{i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), i\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)\ /k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. $\begin{cases}z + \overline{w} = -1 + 2i\\ \bar{z}w = 1 + 7i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z + \overline{w} = -1 + 2i\\ \overline{\bar{z}w} = \overline{1 + 7i}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z + \overline{w} = -1 + 2i\\ z\overline{w} = 1 - 7i\end{cases} \Leftrightarrow z\ et\ \overline{w}\ sont\ les\ racines\ de\ P(t) = t^2 + (1-2i)t + 1 - 7i.$

$Posons\ \Delta = (1-2i)^2 - 4(1-7i) = 1 + (2i)^2 - 2\times 2i - 4 + 28i = 1 - 4 - 4i - 4 + 28i = -7 + 24i = -16 + 9 + 2\times 3\times 4i = (3+4i)^2$

$t_1 = \frac{-(1-2i)-(3+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i\ \ et\ t_1 = \frac{-(1-2i)+(3+4i)}{2} = 1 + 3i.$

Par conséquent, $\begin{cases} z+\overline{w}=-1+2i \\ \bar{z}w=1+7i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2-i \\ \overline{w}=1+3i \end{cases} ou \begin{cases} z=1+3i \\ \overline{w}=-2-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-2-i \\ w=1-3i \end{cases} ou \begin{cases} z=1+3i \\ w=-2+i \end{cases}$. Ainsi, $Sol=\{(-2-i,1-3i);(1-3,-2-i)\}$.

$(e):(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$

Posons $\Delta=(7-i)^2-4(1+3i)(-4-2i)=49-14i-1-4(-4-12i-2i+6)=40+42i$.

4. Cherchons les racines carrées de $\Delta=40+42i$.

<u>1ère méthode</u> : On cherche $\delta=x+iy$ tel que : $(x+iy)^2=3-4i$.

$$(x+iy)^2=40+42i \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2=40+42i \\ |(x+iy)^2|=|40+42i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+i2xy=40+42i \\ |(x+iy)^2|=\sqrt{3364}=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=40 \\ 2xy=42 \\ x^2+y^2=58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=98 \\ 2y^2=18 \\ xy=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 49 \\ y=\pm 9 \\ xy=21 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} ou \begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}. Donc, 7+3i\ et -7-3i\ sont\ les\ racines\ carrées\ de\ 40+42i$.

<u>2ème méthode</u> : $\Delta=40+42i=40+2\times 7\times 3\times i=49-9+2\times 7\times 3i=7^2+(3i)^2+2\times 7\times 3i=(7+3i)^2$

Alors, $z_1=\frac{-(7-i)-(7+3i)}{2(-4-2i)}=\frac{-14-2i}{2(-4-2i)}=\frac{-7-i}{-4-2i}=\frac{(-7-i)(-4+2i)}{|-4-2i|^2}=\frac{30-10i}{20}=\frac{3-i}{2}$ et $z_2=\frac{-(7-i)+(7+3i)}{2(-4-2i)}=\frac{4i}{2(-4-2i)}=\frac{2i}{(-4-2i)}=\frac{2i(-4+2i)}{|-4-2i|^2}=\frac{-4-8i}{20}=\frac{-1-2i}{5}$ sont les solutions de (e).

5. *Soit* $z=x+iy\in\mathbb{C}\ tq\ x,y\ réels$.

$$e^{z^2}=1 \Leftrightarrow e^{x^2-y^2}e^{2ixy}=1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2-y^2}=1 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/2xy=2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/xy=k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=0 \\ \exists k\in\mathbb{Z}/xy=k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \exists k\in\mathbb{Z}/x^2=k\pi \end{cases} ou \begin{cases} y=-x \\ \exists k\in\mathbb{Z}/-x^2=k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=x \\ \exists k\in\mathbb{N}/x=\pm\sqrt{k\pi} \end{cases} ou \begin{cases} y=-x \\ \exists k\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}/x=\pm\sqrt{-k\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ \exists k\in\mathbb{N}/x=\pm\sqrt{k\pi} \end{cases} ou \begin{cases} y=-x \\ \exists k\in\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}/x=\pm\sqrt{-k\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N}/x=\pm\sqrt{k\pi}(1+i)\ ou\ x=\pm\sqrt{k\pi}(1-i)$$

$Sol=\{\pm\sqrt{k\pi}(1+i),\pm\sqrt{k\pi}(1-i)/k\in\mathbb{N}\}$.

6. Soit $z=x+iy\in\mathbb{C}\ tq\ x,y\ réels\ et\ w=a+ib\ tq\ a,b\ réels$.

$\begin{cases} e^z+e^w=2 \\ e^{z+w}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^z+e^w=2 \\ e^ze^w=2 \end{cases} \Leftrightarrow e^z\ et\ e^w$ sont les racines de $P(t)=t^2-2t+2$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\Delta=4-8=-4=(2i)^2 \\ t_1=\frac{2-2i}{2}=1-i \\ t_2=\frac{2+2i}{2}=1+i}} \begin{cases} e^z=1+i \\ e^w=1-i \end{cases} ou \begin{cases} e^z=1-i \\ e^w=1+i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^xe^{iy}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^ae^{ib}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases} ou \begin{cases} e^xe^{iy}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ e^ae^{ib}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x=\sqrt{2}\ et\ \exists k\in\frac{\mathbb{Z}}{y}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ e^a=\sqrt{2}\ et\ \exists k\in\frac{\mathbb{Z}}{b}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} ou \begin{cases} e^x=\sqrt{2}\ et\ \exists k\in\frac{\mathbb{Z}}{y}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ e^a=\sqrt{2}\ et\ \exists k\in\frac{\mathbb{Z}}{b}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=ln(\sqrt{2})=\frac{\ln(2)}{2} et\ \exists k\in\mathbb{Z}/y=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ a=\frac{\ln(2)}{2}\ et\ \exists k\in\mathbb{Z}/b=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases} ou \begin{cases} x=\frac{\ln(2)}{2}\ et\ \exists k\in\mathbb{Z}/y=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ a=\frac{\ln(2)}{2}\ et\ \exists k\in\mathbb{Z}/b=\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}.$$

Ainsi, $Sol=\{\left(\frac{\ln(2)}{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\frac{\ln(2)}{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right),\left(\frac{\ln(2)}{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\frac{\ln(2)}{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)/k\in\mathbb{Z}\}$

7. *Soit* $z=a+ib\in\mathbb{C}\ et\ \mathcal{Z}=z^2=x+iy\ tq\ a,b,x,y\ réels$.

$$z^4+119-120i=0 \Leftrightarrow \mathcal{Z}^2=-119+120i \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2=-119+120i \\ |x+iy|^2=|-119+120i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2ixy=-119+120i \\ x^2+y^2=169 \end{cases}. \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-119 \\ 2xy=120 \\ x^2+y^2=169 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2=50 \\ xy=60 \\ 2y^2=288 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=25 \\ xy=60 \\ y^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 5 \\ xy=60 \\ y^2=\pm 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=12 \end{cases} ou \begin{cases} x=-5 \\ y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow z^2=5+12i\ ou\ z^2=-5-12i=(5+12i)i^2 .$$

$$z^2=5+12i \Leftrightarrow \begin{cases} (a+ib)^2=5+12i \\ |a+ib|^2=|5+12i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+2iab=5+12i \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=5 \\ 2ab=12 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2=18 \\ xy=6 \\ 2y^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ xy=6 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ xy=6 \\ y^2=\pm 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} ou \begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$. Donc $3+2i\ et -3-2i$ vérifient $z^2=5+12i$. *Alors* $i(3+2i)\ et\ i(-3-2i)$ vérifient $z^2=-(5+12i)$.

Ainsi, $Sol=\{3+2i\ et -3-2i\ ,-2+3i,2-3i\}$.

8. *Soit* $z=a+ib\in\mathbb{C}\ et\ \mathcal{Z}=z^2=x+iy\ tq\ a,b,x,y\ réels$.

$$z^4-14iz^2+32=0 \Leftrightarrow \mathcal{Z}^2-14i\mathcal{Z}+32=0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\Delta=(-14i)^2-4\times 32=-324=(18i)^2 \\ \mathcal{Z}_1=\frac{14i-18i}{2}=-2i\ ou\ \mathcal{Z}_2=\frac{14i+18i}{2}=16i}} \mathcal{Z}=-2i\ ou\ \mathcal{Z}=16i \Leftrightarrow z^2=\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^2\ ou\ z^2=\left(4e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\ \ ou\ z=\pm 4e^{i\frac{\pi}{4}}$. Ainsi, $Sol=\{\pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},\pm 4e^{-i\frac{\pi}{4}}]\}$.

9. $z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=0$

$-i$ est racine de la fontion polynomiale $P(z)=z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i$. Factorisons $P(z)$ par $z+i$: cherchons un complexe b tel que : $\forall z\in\mathbb{C}, z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=(z+i)(z^2+bz+89)$. Il suffit de choisir b tel que: $\begin{cases} ib+89=89-16i \\ i+b=i-16 \end{cases}$. *Donc* $b=-16$ *convient*.

Ainsi, $\forall z\in\mathbb{C}, z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=(z+i)(z^2-16z+89)$.

Posons alors $\Delta=(16)^2-4\times 89=-100=(10i)^2$, $z_1=8+5i\ et\ z_2=8-5i$. D'après le cours, $(z^2-16z+89)=(z-z_1)(z-z_2)$. Et par suite, $\forall z\in\mathbb{C}, z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=(z+i)(z-z_1)(z-z_2)$.

Ainsi, $Sol=\{8+5i,8-5i,-i\}$.

10. Soit (e) l'équation $z^2\left(1+tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)+4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)z-4=0$ *d'inconnue complexe* z ($\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$ *est un paramètre*).

Comme $1+tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)>0,(e)$ est polynomiale de degré 2.

Posons $\Delta=\left(4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2+16\left(1+tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=16=4^2$

$$z_1=\frac{-4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)-4}{2\left(1+tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{-2itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)-2}{\frac{1}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}=cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[-2itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)-2\right]=-2isin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos(\alpha)-1-isin(\alpha)=-1-e^{i\alpha}$$

$$z_1=\frac{-4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+4}{2\left(1+tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)}=\frac{-2itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2}{\frac{1}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}=cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[-2itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2\right]=-2isin\left(\frac{\alpha}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+2cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos(\alpha)+1-isin(\alpha)=1+e^{-i\alpha}.$$

Ainsi, $Sol=\{-1-e^{i\alpha},1+e^{-i\alpha}\}$.

11. $(3z^2+z+1)^2+(z^2+2z+2)^2=0 \Leftrightarrow (3z^2+z+1)^2-i^2(z^2+2z+2)^2=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(3z^2+z+1)^2-(iz^2+2iz+2i)^2}_{identité\ remarquable\ a^2-b^2}=0 \Leftrightarrow \big(3z^2+z+1-(iz^2+2iz+2i)\big)\big(3z^2+z+1+(iz^2+2iz+2i)\big)=0$

$\Leftrightarrow 3z^2+z+1-(iz^2+2iz+2i)=0\ ou\ 3z^2+z+1+(iz^2+2iz+2i)=0 \Leftrightarrow (3-i)z^2+(1-2i)z+(1-2i)=0\ ou\ (3+i)z^2+(1+2i)z+(1+2i)=0$

Posons $\Delta_1=(1-2i)^2-4(3-i)(1-2i)=-7+24i=-16+9+2\times3\times4i=(3+4i)^2$

$et\ z_1=\frac{-1+2i-(3+4i)}{2(3-i)}=\frac{-4-2i}{2(3-i)}=\frac{(-2-i)(3+i)}{|3-i|^2}=\frac{-5-5i}{10}=\frac{-1-i}{2}\ et\ z_2=\frac{-1+2i+(3+4i)}{2(3-i)}=\frac{2+6i}{2(3-i)}=\frac{(1+3i)(3+i)}{|3-i|^2}=\frac{10i}{10}=i$

Posons $\Delta_2=(1+2i)^2-4(3+i)(1+2i)=-7-24i=-16+9-2\times3\times4i=(3-4i)^2=\overline{\Delta_1}$

$et\ z_3=\frac{-1-2i-(3-4i)}{2(3+i)}=\overline{z_2}=\frac{-1+i}{2}\ et\ z_4=\frac{-1-2i+(3-4i)}{2(3+i)}=\overline{z_2}=-i.$

Ainsi, $Sol=\{\frac{-1-i}{2},\frac{-1+i}{2},i,-i\}$.

12. $z^4+6z^3+9z^2+100=0 \Leftrightarrow z^2(z^2+6z+9)+100=0 \Leftrightarrow z^2(z+3)^2+100=0 \Leftrightarrow \big(z(z+3)\big)^2-(10i)^2=0$

$\Leftrightarrow z(z+3)-10i=0\ ou\ z(z+3)+10i=0 \Leftrightarrow z^2+3z-10i=0\ ou\ z^2+3z+10i=0$

Posons $\Delta_1=9+40i=25-16+2\times5\times4i=(5+4i)^2\ et\ z_1=\frac{-3-(5+4i)}{2}=-4-2i\ \ et\ z_2=\frac{-3+(5+4i)}{2}=1+2i$

Posons $\Delta_2=9-40i=25-16-2\times5\times4i=(5-4i)^2\ et\ z_3=\frac{-3-(5-4i)}{2}=-4+2i\ \ et\ z_4=\frac{-3+(5-4i)}{2}=1-2i$

Ainsi $Sol=\{-4-2i\ ,-4+2i,\ 1+2i\ ,\ 1-2i\}$.

Ex 3 Donner les racines $n^{ièmes}$ des complexes a suivants et les représenter dans le plan complexe (i.e. le plan muni d'un repère orthonormé direct) :

1. $a=-1$ $n=8$
2. $a=7-24i$ $n=4$.
3. $a=-8i$ $n=6$
4. $a=j$ $n=10$
5. $a=\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}$ $n=5$
6. $a=e^{2ix}-1$ $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,\pi[$
7. $a=\frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}$ $n=6$

1. $a=-1=e^{i\pi}$. Donc $e^{\frac{i\pi}{8}}$ est une racine huitième de -1. $Sol=\{e^{\frac{i\pi}{8}}e^{\frac{2ik\pi}{8}}/k\in[\![0,7]\!]\}$.
2. $a=7-24i=16-9-2\times4\times3i=(4-3i)^2$. Donc, $4-3i$ est une racine deuxième complexe de $7-24i$.

$Je\ cherche\ z=x+iy\ tel\ que : z^2=4-3i.$

$$z^2=4-3i \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=4\\2xy=-3\\x^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2=9\\xy=-\frac{3}{2}\\2y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\\xy=-\frac{3}{2}\\y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{3}{\sqrt{2}}\\y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}ou\ \begin{cases}x=-\frac{3}{\sqrt{2}}\\y=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

Lorsque n= 4 et la forme trigo de a n'est pas sympa, , on peut chercher une racine carrée d'une racine carrée .

Donc, $\frac{3-i}{\sqrt{2}}$ est une racine carrée de $4-3i$ et donc une racine quatrième de $7-24i$. Comme $1,-1,i$ et $-i$ s

$\frac{3-i}{\sqrt{2}},-\frac{3-i}{\sqrt{2}},i\frac{3-i}{\sqrt{2}}=\frac{1+3i}{\sqrt{2}}\ et\ (-i)\frac{3-i}{\sqrt{2}}=\frac{-1+3i}{\sqrt{2}}$ sont les racines quatrièmes de $7-24i$.

Ainsi, $Sol=\{\frac{-1+3i}{\sqrt{2}},\frac{1+3i}{\sqrt{2}},\frac{3-i}{\sqrt{2}},\frac{-3+i}{\sqrt{2}}\}$

Pour déterminer les racines nièmes de a,
- écrire a sous forme trigo $a=re^{i\beta}$
- trouver une racine nième particulière : $\sqrt[n]{r}e^{\frac{i\beta}{n}}$
- multiplier cette racine nième par les n racines nièmes de l'unité.

3. $a=-8i=8e^{\frac{i3\pi}{2}}$.Donc $8^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i3\pi}{12}}=8^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i\pi}{4}}$ est une racine quatrième de $-8i$. Ainsi, $Sol=\{8^{\frac{1}{6}}e^{\frac{i3\pi}{12}}e^{\frac{2ik\pi}{6}}/k\in[\![0,5]\!]\}$.
4. $a=j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ Donc $e^{\frac{i2\pi}{30}}=e^{\frac{i\pi}{15}}$ est une racine dixième de j. Ainsi, $Sol=\{e^{\frac{i\pi}{15}}e^{\frac{2ik\pi}{10}}/k\in[\![0,9]\!]\}$.
5. $a=\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\sqrt{6}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$. Donc $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{10}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$ est une racine cinquième de $\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}$. Ainsi, $Sol=\{\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{10}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}e^{\frac{2ik\pi}{5}}/k\in[\![0,4]\!]\}$.
6. $a=e^{2ix}-1=2isin(x)e^{ix}=2sin(x)e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$.

$Si\ x\in]0,\pi[,alors\ sin(x)>0\ \ par\ conséquent,\sqrt[n]{2sin(x)}e^{i\left(\frac{x}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)}$ est une racine $n^{ième}$ de $e^{2ix}-1$. Ainsi, $Sol=\{\sqrt[n]{2sin(x)}e^{i\left(\frac{x}{n}+\frac{\pi}{2n}\right)}e^{\frac{2ik\pi}{n}}/k\in[\![0,n-1]\!]\}$.

Si $x=0$ alors $a=0$ et par conséquent, $Sol=\{0\}$.

7. $a=\frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}=\frac{1+\frac{icos(\theta)}{sin(\theta)}}{1-\frac{icos(\theta)}{sin(\theta)}}=\frac{\frac{\sin(\theta)+icos(\theta)}{\sin(\theta)}}{\frac{\sin(\theta)-icos(\theta)}{\sin(\theta)}}=\frac{\sin(\theta)+icos(\theta)}{\sin(\theta)-icos(\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$. Donc $e^{i\left(\frac{2\theta}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{\theta}{3}\right)}$ est une racine sixième de $\frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}$. Ainsi, $Sol=\{e^{i\left(\frac{\theta}{3}\right)}e^{\frac{2ik\pi}{6}}/k\in[\![0,5]\!]\}$.

Ex 4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue z complexe (n désigne un entière naturel non nul):

1. $(z-1)^n=(z+1)^n\ où\ n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
2. $1-i(1-z)^4=0$
3. $z^n=3^n$
4. $z^8=\bar{z}$
5. $64(z-1)^6+(z+1)^6=0$
6. $z^4-z^3+z^2-z+1=0$
7. $z^8+z^4+1=0$
8. $(z-i)^3+(z-i)^2(z+i)+(z-i)(z+i)^2+(z+i)^3=0$
9. $(1-i)\bar{z}^8+\big(1-i\sqrt{3}\big)z=0$
10. $z^5+z^6+\cdots.+z^n=0\ où\ n\geq5.$
11. $z^6+z^3(1+z)^3+(1+z)^6=0$
12. $z^{2n}-2z^n\cos(\alpha)+1=0$ où $\alpha\in[0,\pi]$
13. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=2\cos(\alpha)$ où $\alpha\in[0,\pi]$

1. Soit $n\in\mathbb{N}\{0,1\}\ et\ (e)\colon(z-1)^n=(z+1)^n$d'inconnue z complexe.

Je remarque que 1 n'est pas solution de cette équation . Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

z solution de (e) sietssi $(z-1)^n=(z+1)^n$ sietssi $\frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}=1$

sietssi $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$

sietssi $Z^n=1$ où $Z=\frac{z+1}{z-1}$

sietssi Z est une racine nième de l'unité.

sietssi $Z=1\ ou\ Z=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ ou $Z=e^{i\frac{4\pi}{n}}\ ou\ \ldots Z=e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$

sietssi il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $Z=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

sietssi il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que $\frac{z+1}{z-1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

sietssi il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que$(z+1)=e^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-1)$

sietssi il existe $k\in[\![0,n-1]\!]$ tel que$\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)z=-(e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1)$

sietssi il existe $k\in[\![1,n-1]\!]$ tel que$z=-\frac{(e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1)}{\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)}=-\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}{-2isin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}}=-icotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

ATTENTION A NE PAS DIVISER PAR ZERO :

Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$.

$1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}=0$ sietssi $e^{i\frac{2k\pi}{n}}=1$ sietssi $k=0$.

Donc je dois ôter la valeur $k=0$ pour avoir le droit de diviser .

De plus , pour $k=0$, $\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)z\neq-(e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1)$

Donc le cas « k=0» est impossible …. mais ce n'est pas grave il nous reste les autres cas qui, eux, n'aboutissent pas à une impossibilité !!

Ainsi ,$Sol=\{-icotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)/\ k\in[\![1,n-1]\!]\}$.

$z^n=a$
signifie que :
z est une racine nième de a.

2. *Notons* $(e): 1 - i(1-z)^4 = 0$. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Posons* $Ƶ = 1 - z$.

z solution de $(e) \Leftrightarrow Ƶ^4 = \frac{1}{i} \Leftrightarrow Ƶ$ *est une racine quatrième de* $-i \underbrace{\Leftrightarrow}_{-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}} \exists k \in [\![0,3]\!] / Ƶ = e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,3]\!] / 1 - z = e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,3]\!] / z = 1 - e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}}$.

Ainsi, $Sol = \{1 - e^{-i\frac{\pi}{8}} e^{i\frac{2k\pi}{4}} / k \in [\![0,3]\!]\}$.

3. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. $z^n = 3^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{3}\right)^n = 1 \overset{**}{\Leftrightarrow} \frac{z}{3}$ *est une racine nième de l'unité* $\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] / \ \frac{z}{3} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] / \ z = 3e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Ainsi, $Sol = \{3e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

4. $z = 0$ vérifie $z^8 = \bar{z}$.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. *Posons* $z = re^{i\theta}$ *où* $r = |z| \in \mathbb{R}^{+*}$ *et* θ *l'argument principal de* z.

$$z^8 = \bar{z} \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^8 = re^{-i\theta} \Leftrightarrow r^8 e^{i8\theta} = re^{-i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^8 = r \\ \exists k \in \mathbb{Z} / 8\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases} \overset{car\ r \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r^7 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / 8\theta = -\theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\overset{car\ r \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / 9\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{2k\pi}{9} \end{cases} \overset{car\ \theta \in [0, 2\pi[}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in [\![0,8]\!] / \theta = \frac{2k\pi}{9} \end{cases}$$

Ainsi, $Sol = \{0, e^{i\frac{2k\pi}{9}} / k \in [\![0,8]\!]\}$.

$Ƶ^n = a$ **
signifie que :
$Ƶ$ est une racine nième de a.

5. $z = 1$ *ne* vérifie *pas* $64(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$.

$$64(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow \frac{(z+1)^6}{(z-1)^6} = -64 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -64 \overset{**}{\Leftrightarrow} \frac{z+1}{z-1} \text{ est une racine 6ième de } -64$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{-64 = i^6 2^6 = (2i)^6} \exists k \in [\![0,5]\!] / \frac{z+1}{z-1} = 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] / z + 1 = 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}(z-1) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] / \left(2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1\right) z = 1 + 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$$

Donc, $2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$ *,tq* $k \in [\![0,5]\!]$*,sont les 6 racines 6ièmes de* -64.

On ne peut pas arranger car $2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}$ *et* 1 *n'ont pas le même module …*

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{car \left|2ie^{\frac{2ik\pi}{6}}\right| = 2 \neq 1 = |1| \text{ donc } 2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} \neq 1} \exists k \in [\![0,5]\!] / z = \frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1}.$$

Ainsi, $Sol = \{\frac{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} + 1}{2ie^{\frac{2ik\pi}{6}} - 1} / k \in [\![0,5]\!]\}$.

6. $z = -1$ *ne vérifie pas* $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$. *Soit* $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\}$.

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow (-z)^4 + (-z)^3 + (-z)^2 + (-z) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{4} (-z)^k = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ z \neq -1} \frac{(-z)^5 - 1}{-z-1} = 0 \Leftrightarrow (-z)^5 = 1$$

$$\overset{**}{\Leftrightarrow} -z \text{ est une racine 5ième de l'unité} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,4]\!] / -z = e^{\frac{2ik\pi}{5}} \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ z \neq -1} \exists k \in [\![1,4]\!] / z = -e^{\frac{2ik\pi}{5}}.$$

Ainsi, $Sol = \left\{-e^{\frac{2ik\pi}{5}} / k \in [\![1,4]\!]\right\}$.

7. $z^8 + z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow Ƶ^2 + Ƶ + 1 = 0 \Leftrightarrow Ƶ = j$ *ou* $Ƶ = j^2 \Leftrightarrow z^4 = j$ *ou* $z^4 = j^2 \overset{**}{\Leftrightarrow} z$ *est une racine 4ième de* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ *ou de* $j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow z = e^{\frac{i\pi}{6}}$ *ou* $z = ie^{\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ *ou* $z = -e^{\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{-5i\pi}{6}}$ *ou* $z = -ie^{\frac{i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ *ou* $z = e^{-\frac{i\pi}{6}}$ *ou* $z = ie^{\frac{-i\pi}{6}} = e^{\frac{i\pi}{3}}$ *ou* $z = -e^{-\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{6}}$ *ou* $z = -ie^{-\frac{i\pi}{6}} = e^{\frac{-i2\pi}{3}}$.

$Sol = \{e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i2\pi}{3}}, e^{\frac{-5i\pi}{6}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{-i2\pi}{3}}\}$.

8. $(-i)$ *n'est pas solution. Soit* z *un complexe différent de* $-i$. *On pose* $Ƶ = \frac{z-i}{z+i}$.

$$(z-i)^3 + (z-i)^2(z+i) + (z-i)(z+i)^2 + (z+i)^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow Ƶ^3 + Ƶ^2 + Ƶ + 1 = 0 \Leftrightarrow Ƶ \neq 1 \text{ et } \frac{Ƶ^4 - 1}{Ƶ - 1} = 0$$

$\overset{**}{\Leftrightarrow} Ƶ$ *est une racine quatrième de l''unité et* $Ƶ \neq 1 \Leftrightarrow Ƶ = i$ *ou* $Ƶ = -i$ *ou* $Ƶ = -1$

$\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = i$ *ou* $\frac{z-i}{z+i} = -i$ *ou* $\frac{z-i}{z+i} = -1 \Leftrightarrow .z - i = i(z+i)$…

9. $z = 0$ *est solution évidente de* $(1-i)\bar{z}^8 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z = 0$. Cherchons les autres solutions :

Soit $z = re^{i\theta}$ *un complexe non nul tel que* $r > 0$ *et* θ *réel.*

$$(1-i)\bar{z}^8 + \left(1 - i\sqrt{3}\right)z = 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{z}^8}{z} = -\frac{(1-i\sqrt{3})}{(1-i)} \Leftrightarrow \frac{r^8 e^{-i8\theta}}{re^{i\theta}} = \frac{e^{i\pi} 2e^{-\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} \Leftrightarrow r^7 e^{-i9\theta} = \sqrt{2}e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} r^7 = \sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \overset{car\ r \in \mathbb{R}^{+*}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{14}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \end{cases}.$$

Ainsi, $Sol = \{\, 0;\ 2^{\frac{1}{14}} e^{i\left(\frac{11\pi}{12} + 2k\pi\right)} / k \in \mathbb{Z}\}$.

10. $z = 1$ *ne* vérifie *pas* $z^5 + z^6 + \cdots. + z^n = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$.

$$z^5 + z^6 + \cdots. + z^n = 0 \Leftrightarrow \frac{z^{n-5+1} - 1}{z - 1} = 0 \Leftrightarrow z^{n-4} = 1 \overset{**}{\Leftrightarrow} \exists k \in [\![0, n-5]\!] / \ z = e^{\frac{2ik\pi}{n-4}} \overset{car\ z \neq 1}{\Leftrightarrow} \exists k \in [\![1, n-5]\!] / \ z = e^{\frac{2ik\pi}{n-4}}.$$

Ainsi $Sol = \{e^{\frac{2ik\pi}{n-4}} / \ k \in [\![1, n-5]\!]\}$.

11. $z = -1$ *ne* vérifie *pas* $z^6 + z^3(1+z)^3 + (1+z)^6 = 0$. Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1\}$.

$$z^6 + z^3(1+z)^3 + (1+z)^6 = 0 \Leftrightarrow \frac{z^6}{(1+z)^6} + \frac{z^3(1+z)^3}{(1+z)^6} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+z}\right)^6 + \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + 1 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{Ƶ = \left(\frac{z}{1+z}\right)^3} Ƶ^2 + Ƶ + 1 = 0 \Leftrightarrow Ƶ = j \text{ ou } Ƶ = j^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 = j \text{ ou } \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 = j^2 \overset{**}{\Leftrightarrow} \frac{z}{1+z} \text{ est un racine troisième de } j \text{ ou de } j^2 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2]\!] / \frac{z}{z+1} = e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z}{z+1} = e^{\frac{-2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2]\!] / \frac{z}{z+1} = e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } \frac{z}{z+1} = e^{\frac{-2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2]\!] / z = (z+1)e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } z = (z+1)e^{\frac{-2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2]\!] / z\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}\right) = e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \text{ ou } z\left(1 - e^{\frac{-2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}\right) = e^{\frac{-2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \forall k \in [\![0,2]\!], \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \neq 0 [2\pi] \text{ donc } , e^{\frac{\pm 2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}} \neq 1} \exists k \in [\![0,2]\!] / z = \frac{e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}}{\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{9}} e^{\frac{2ik\pi}{3}}\right)} = \frac{e^{\frac{2i\pi}{9} + \frac{2ik\pi}{3}}}{-2isin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)}} = \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)}}{-2isin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)} = \frac{e^{i\left(\frac{11\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right)}}{2sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)} \text{ ou } z = \frac{e^{i\left(\frac{7\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right)}}{2sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)}.$$

Ainsi, $Sol = \{\frac{e^{i\left(\frac{7\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right)}}{2sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)}; \frac{e^{i\left(\frac{11\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right)}}{2sin\left(-\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}\right)} / \ k \in [\![0,2]\!]\}$.

12. *Soit z un complexe . Posons* $Ƶ = z^n$.

$z^{2n}-2z^n\cos(\alpha)+1=0 \Leftrightarrow \mathbb{Z}^2-2\mathbb{Z}\cos(\alpha)+1=0.$

Posons $\Delta=(2\cos(\alpha))^2-4=4(\cos^2(\alpha)-1)=4(-\sin^2(\alpha))=2^2i^2\sin^2(\alpha)=\left(2i\sin(\alpha)\right)^2$.

$\mathbb{Z}_1=\frac{2\cos(\alpha)+2i\sin(\alpha)}{2}=e^{i\alpha}\ et\ \mathbb{Z}_2=\frac{2\cos(\alpha)-2i\sin(\alpha)}{2}=e^{-i\alpha}$.

$Donc\ z^{2n}-2z^n\cos(\alpha)+1=0 \Leftrightarrow \mathbb{Z}=\mathbb{Z}_1\ ou\ \mathbb{Z}=\mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow\ z^n=e^{i\alpha}\ ou\ z^n\ =e^{i\alpha} \overset{**}{\Leftrightarrow} z\ est\ une\ racine\ nième\ de\ e^{i\alpha}\ ou\ de\ e^{-i\alpha} \Leftrightarrow \exists k\in [\![0,n-1]\!]/\ z=e^{\frac{i\alpha}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}} ou\ z=e^{-\frac{i\alpha}{n}}e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$

Ainsi, $Sol=\{e^{\frac{i\alpha}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}};e^{-\frac{i\alpha}{n}}e^{-\frac{2ik\pi}{n}}/k\in[\![0,n-1]\!]\}.$

$Rque$: si $\alpha\in\{0,\pi\}$ alors $\Delta=0\ et\ \mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}_1$et $e^{\frac{i\alpha}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=e^{-\frac{i\alpha}{n}}e^{-\frac{2ik\pi}{n}}$ donc on écrira plus simplement $Sol=\{e^{\frac{i\alpha}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}/\ k\in[\![0,n-1]\!]\}.$

13. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=2\cos(\alpha)$ où $\alpha\in[0,\pi]$.

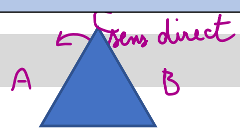
- $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\bar{j}=\frac{1}{j}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}.$
- $1, j$ et j^2 sont les racines 3ièmes de l'unité, $j^3=1.$
- $1+j+j^2=0.$
- j et j^2 sont les deux solutions de $1+z+z^2=0.$
- $\forall p\in\mathbb{Z},\ j^p=e^{2ip\frac{\pi}{3}}=\begin{cases}1 \quad si\ p=3k\\ j\ si\ p=3k+1\\ j^2 si\ p\equiv 3k+2\end{cases}\ tq\ k\in\mathbb{Z}.$

Ex 5 Résoudre le système $(S)\begin{cases}x+jy+j^2z=0\\ j^2x+y+jz=0\\ jx+j^2y+z=0\end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$.

$$(S)\begin{cases}x+jy+j^2z=0\\ j^2x+y+jz=0\\ jx+j^2y+z=0\end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+j^{2L_1}\\ L_3\leftarrow L_3+jL_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x+jy+j^2z=0\\ 0=0\\ 0=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-jy-j^2z.$$

$Ainsi,$ $Sol=\{(-jy-j^2z,y,z)/y,z\in\mathbb{C}^2\}$

Ex 6 Soit $a,b\ et\ c$ trois complexes distincts et $A,B\ et\ C$ leurs images ponctuelles respectives.
Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin)si et ssi $a+bj+cj^2=0$



ABC est équilatère direct **sietssi** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB=AC$

sietssi $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\ et\ |b-a|=|c-a|$

sietssi $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\ et\ \left|\frac{b-a}{c-a}\right|=1$

sietssi $\frac{c-a}{b-a}=1e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\underbrace{\textbf{sietssi}}_{car\ e^{i\frac{\pi}{3}}=-j^2=1+j}\quad \frac{c-a}{b-a}=1+j$

sietssi $(c-a)-(1+j)(b-a)=0$

sietssi $ja-(1+j)b+c=0$

sietssi $a-\left(\frac{1}{j}+1\right)b+\frac{1}{j}c=0$

$\underbrace{\textbf{sietssi}}_{car\ \frac{1}{j}=\bar{j}=j^2}\quad a+(j^2+1)b+j^2c=0$

$\underbrace{\textbf{sietssi}}_{car\ 1+j+j^2=1}\quad a+jb+j^2c=0.$

Ex 7

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^4)$ sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $A(1)$ et $P(1+z^2)$ sont alignés.

1) Si $M=P$ ou $M=Q$ ou $P=Q$ alors les points $M,P\ et\ Q$ sont alignés.

Or $M=P \Leftrightarrow z^2=z \Leftrightarrow z(z-1)=0 \Leftrightarrow z=0\ ou\ z=1.$

$M=Q\ \Leftrightarrow z^4=z \Leftrightarrow z(z^3-1)=0 \Leftrightarrow z(z-1)(z^2+z+1)=0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ les\ solutions\\ de\ 1+z+z^2=0\\ sont\ les\ racines\ 3ièmes\\ de\ l'unité\ sauf\ 1}} z=0\ ou\ z=1\ ou\ z=j\ ou\ z=j^2.$

$P=Q\ \Leftrightarrow z^4=z^2 \Leftrightarrow z^{2(z^2-1)}=0 \Leftrightarrow z^2(z-1)(z+1)=0 \Leftrightarrow z=0\ ou\ z=1 ou\ z=-1.$

Donc finalement, si $M\in\{O,A(1),B(-1),C(j),D(j^2)\}$ alors M,P et Q sont alignés.

Prenons maintenant $z\notin\{0,1,-1;j;j^2\}$. Alors, M,P et Q sont distincts. Par conséquent,

M,P et Q sont alignés $\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{PQ}\right)\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^4-z^2}{z^2-z}\right)\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^2(z-1)(z+1)}{z(z-1)}\right)\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(z(z+1)\right)\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow z(z+1)\in\mathbb{R}^*$

$\Leftrightarrow z(z+1)=\overline{z(z+1)} \Leftrightarrow z(z+1)=\bar{z}(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z^2-\bar{z}^2+z-\bar{z}=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+1)=0 \Leftrightarrow z=\bar{z}\ ou\ 2Re(z)=-1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\ ou\ Re(z)=-\frac{1}{2}.$

$\Leftrightarrow M\ est\ sur\ l'axe\ réel\ ou\ sur\ la\ droite\ D\ vertciale\ d'équation\ x=-\frac{1}{2}.$

Ainsi, *Sol=D ∪ (Ox) puisque les points 0,A,B,C et D sont aussi dans cet ensemble.*

2) Si $M=A$ (i.e $z=1$) ou $A=P$ (i.e $z=0$) ou $P=M$ ((i.e $z=e^{i\frac{\pi}{3}} z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$) alors les points $M,P\ et\ A$ sont alignés.

(en effet , $P=M \Leftrightarrow 1+z^2=z \Leftrightarrow z^2-z+1=0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta=1-4=-3=(i\sqrt{3})^2} z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}\ ou\ z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$) .

Donc finalement, si $M\in\{O,A(1),C\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right),D\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\}$ alors A, M et P sont alignés.

Prenons maintenant $z\notin\left\{0,1,e^{i\frac{\pi}{3}},e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$. Alors, M,P et Q sont distincts. Par conséquent,

M,P et A sont alignés $\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{PA}\right)\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{1+z^2-1}{z-1}\right)\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^2}{(z-1)}\right)\equiv 0[\pi] \Leftrightarrow a \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)}\in\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)}=\overline{\left(\frac{z^2}{(z-1)}\right)} \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)}=\frac{\bar{z}^2}{(\bar{z}-1)}$

$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1)=\bar{z}^{2(\bar{z}-1)} \Leftrightarrow z(z\bar{z})-\bar{z}(z\bar{z})-(z^2-\bar{z}^2)=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})|z|^2-(z-\bar{z})(z+\bar{z})=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[|z|^2-(z+\bar{z})]=0$

$\Leftrightarrow z-\bar{z}=0\ ou\ |z|^2-(z+\bar{z})=0 \Leftrightarrow z=\bar{z}\ ou\ |z|^2=2Re(z) \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\ ou\ x^2+y^2-2x=0 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\ ou\ (x-1)^2-1+y^2=0$

$\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\ ou\ (x-1)^2+y^2=1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\ ou\ |z-1|^2=1 \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\ ou\ |z-1|=1 \Leftrightarrow M\ est\ sur\ l'axe\ réel\ ou\ AM=1$

$\Leftrightarrow M\ est\ sur\ l'axe\ réel\ ou\ M\ est\ sur\ le\ cercle\ de\ centre\ A\ et\ de\ rayon\ 1.$

Comme O, D et C sont sur le cercle de centre A et de rayon 1, je peux conclure que $Sol=C(A,1)\cup(axe\ réel).$

Ex 8 Calculer j^p suivant les valeurs de l'entier naturel p puis placer les points M_p d'affixe j^p dans le plan complexe. En déduire les valeurs des sommes : $U_n=\sum_{0\le k\le n}\binom{3n}{3k}$, $V_n=\sum_{0\le k\le n}\binom{3n}{3k+1}$ et $W_n=\sum_{0\le k\le n}\binom{3n}{3k+2}$.

a. $j^p = e^{2ip\frac{\pi}{3}} = \begin{cases} 1 \quad si\ p \equiv 0[3] \\ e^{2i\frac{\pi}{3}}\ si\ p \equiv 1[3] \\ e^{4i\frac{\pi}{3}}\ si\ p \equiv 2[3] \end{cases} = \begin{cases} 1 \quad si\ p \equiv 0[3] \\ j\ si\ p \equiv 1[3] \\ j^2\ si\ p \equiv 2[3] \end{cases}$.

b. $(1+j)^{3n} = \sum_{p=0}^{3n} \binom{3n}{p} j^p = \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 0[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 1[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 2[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j^p = \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 0[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} + \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 1[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j + \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 2[3]}}^{3n} \binom{3n}{p} j^2$

$(-j^2)^{3n} = U_n + V_n j + W_n j^2$ .Donc, $(-1)^{3n} j^{6n} = U_n + V_n j + W_n j^2$.

Donc, $(-1)^n = U_n + V_n j + W_n j^2 = U_n + V_n\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + W_n\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}[V_n - W_n]$.Donc, par unicité des parties réelles et imaginaires d'un complexe, $U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n = (-1)^n$ et $V_n - W_n = 0$. De plus, $U_n + V_n + W_n = \sum_{p=0}^{3n} \binom{3n}{p} = 2^{3n} = 8^n$. Ainsi $U_n, V_n\ et\ W_n$ vérifient le système linéaire :

$\begin{cases} V_n - W_n = 0. \\ U_n + V_n + W_n = 8^n \\ U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n = (-1)^n \end{cases}$. Donc $\begin{cases} V_n = W_n. \\ U_n + 2V_n = 8^n \\ U_n - V_n = (-1)^n \end{cases}$ Donc $\begin{cases} V_n = W_n. \\ 3V_n = 8^n - (-1)^n \\ 3U_n = 8^n + 2(-1)^n \end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases} V_n = \frac{1}{3}[8^n - (-1)^n]. \\ V_n = \frac{1}{3}[8^n - (-1)^n] \\ U_n = \frac{1}{3}[8^n + 2(-1)^n] \end{cases}$.

Ex 9 Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = z(1-z)$. Démontrer, en utilisant la forme canonique de f, que : $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

$f(z) = -z^2 + z = \underbrace{-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}_{forme\ canonique\ de\ f}$ donc $\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \overset{car\ |-Z|=|Z|}{\cong} \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right| \overset{1ère\ I.T.}{\lesssim} \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4}$.

Par conséquent, $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

Ex 10 Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$. On considère l'équation (e): $z^2 - 2^{\alpha+1}cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.

1. Résoudre cette équation ; on note $z_1\ et\ z_2$ les solutions.
2. Soit A , B et O les points d'affixe $z_1, z_2\ et\ 0$. Déterminer les valeurs de α pour que OAB soit équilatéral.

1. Posons $\Delta = \left(-2^{\alpha+1}cos(\alpha)\right)^2 - 4 \times 2^{2\alpha} = 2^{2\alpha+2}cos^2(\alpha) - 2^{2\alpha+2} = 2^{2\alpha+2}(cos^2(\alpha) - 1) = 2^{2\alpha+2}\left(-sin^2(\alpha)\right) = (2^{\alpha+1})^2 i^2 sin^2(\alpha) = [2^{\alpha+1}\sin(\alpha)\, i]^2$.
Alors $z_1 et\ z_2$, ci-dessous, sont les solutions de (e). On remarque que si $\alpha = 0$ alors $\Delta = 0\ et\ z_1 = z_2$.

$z_1 = \frac{2^{\alpha+1}cos(\alpha) + 2^{\alpha+1}\sin(\alpha)i}{2} = 2^\alpha cos(\alpha) + 2^\alpha \sin(\alpha)\, i = 2^\alpha e^{i\alpha}$ et $z_2 \overset{car\ (e) est\ à\ coeff\ réels.}{\cong} \bar{z}_1 = 2^\alpha e^{-i\alpha}$.

2. OAB est un triangle équilatéral$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ OA = OB \neq 0 \end{cases}$.
Or , $|z_1| = 2^\alpha = |z_2|$. Pour toute valeur de α, $OA = OB = 2^\alpha \neq 0$.
De plus, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)[2\pi] \equiv \arg(z_2) - \arg(z_1)\, [2\pi] \equiv \alpha - (-\alpha)[2\pi] \equiv 2\alpha[2\pi]$. Par conséquent, OAB est un triangle équilatéral$\Leftrightarrow$
$\left[\exists k \in \mathbb{Z} / (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \Leftrightarrow \left[\exists k \in \mathbb{Z} / 2\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] \Leftrightarrow \left[\exists k \in \mathbb{Z} / \alpha = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$.
Ainsi, les valeurs de α pour que OAB soit équilatéral sont tous les réels de la forme $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ tels que $k \in \mathbb{Z}$.

Ex 11 1) Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z) = 2z^3 - (4+2i)z^2 - (34-10i)z + 56 + 72i$ sachant que P a une racine réelle.
2) Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^4 + (1-\sqrt{3})z^3 + (2-\sqrt{3})z^2 + (1-\sqrt{3})z + 1$ en utilisant $Z = z + \frac{1}{z}$.

1) Notons r cette racine réelle de P . Alors $P(r) = 2r^3 - (4+2i)r^2 - (34-10i)r + 56 + 72i \overset{*}{\cong} 0$ donc, en conjuguant de part et d'autre d' cette égalité, j'obtiens : $\overline{P(r)} = \overline{2r^3 - (4+2\imath)r^2 - (34-10\imath)r + 56 + 72\imath} = 0$. Puis en utilisant les règles de calcul sur les conjugués, $2\bar{r}^3 - \overline{(4+2\imath)}\bar{r}^2 - \overline{(34-10\imath)}\bar{r} + \overline{56+72\imath} = 0$ Alors, puisque r est réel, on obtient : $2r^3 - (4-2i)r^2 - (34+10i)r + 56 - 72i \overset{**}{\cong} 0$.

En effectuant $(**) - (*)$, j'obtiens : $4ir^2 - 20ir - 144i = 0$ et par suite : $r^2 - 5r - 36 = 0$. Or, $r^2 - 5r - 36 \overset{car\ 9\times(-4)=-36\ et\ 9+(-5)=5}{\cong} (r-9)(r+4)$.
Ainsi $r = 9\ ou\ r = -4$. Or, $P(9) \neq 0\ et\ P(-4) = 0$. j'en conclus que $r = -4$ est l'unique racine réelle de P.
Alors je peux factoriser $P(z)$ par $z + 4$. Je cherche alors un nombre complexe b tel que :
$\forall z \in \mathbb{C}, 2z^3 - (4+2i)z^2 - (34-10i)z + 56 + 72i = (z+4)(2z^2 + bz + 14 + 18i)$.
Or, $(z+4)(2z^2 + bz + 14 + 18i) = 2z^3 + (8+b)z^2 + (4b + 14 + 18i)z + 56 + 72i$. Donc, prenons b tel que : $\begin{cases} 8 + b = -(4+2i) \\ 4b + 14 + 18i = -(34-10i) \end{cases}$. Par conséquent, $b = -(12+2i)$ convient.
Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = 2z^3 - (4+2i)z^2 - (34-10i)z + 56 + 72i = (z+4)(2z^2 - (12+2i)z + 14 + 18i) = 2(z+4)(z^2 - (6+i)z + 7 + 9i)$.
Posons $\Delta = (6+i)^2 - 4(7+9i) = 7 - 24i = 16 - 9 - 2 \times 4 \times 3i = (4-3i)^2$ et $z_1 = \frac{6+i+4-3i}{2} = 5 - i\ et\ z_2 = \frac{6+i-4+3i}{2} = 1 + 2i$.
Alors $z^2 - (6+i)z + 7 + 9i = (z - z_1)(z - z_2)$ et enfin $P(z) = 2(z+4)(z-z_1)(z-z_2) = 2(z+4)(z-(5-i))(z-(1+2i))$.
2)$P(0) \neq 0$ donc 0 n'est pas racine de P. Soit z un complexe non nul. Posons $\mathbb{Z} = z + \frac{1}{z}$. Alors $\mathbb{Z}^2 = z^2 + \frac{1}{z^2} + 2$.
Alors, $P(z) = z^4 + (1-\sqrt{3})z^3 + (2-\sqrt{3})z^2 + (1-\sqrt{3})z + 1 = z^2\left(z^2 + (1-\sqrt{3})z + (2-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right)$

$$= z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + (1-\sqrt{3})\left(z + \frac{1}{z}\right) + (2-\sqrt{3})\right) = z^2\left(\mathbb{Z}^2 - 2 + (1-\sqrt{3})\mathbb{Z} + (2-\sqrt{3})\right) = z^2\left(\mathbb{Z}^2 + (1-\sqrt{3})\mathbb{Z} - \sqrt{3}\right) = z^2(\mathbb{Z} - \sqrt{3})(\mathbb{Z} + 1)$$

$$= z^2\left(z + \frac{1}{z} - \sqrt{3}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) == z^2\left(\frac{z^2 + 1 - \sqrt{3}z}{z}\right)\left(\frac{z^2 + 1 + \sqrt{3}z}{z}\right) = (z^2 - \sqrt{3}z + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)$$

Posons $\Delta_1 = 3 - 4 = -1 = i^2$ et $z_1 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{6}}\ et\ z_2 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}\ \ et\ z_1 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -e^{i\frac{\pi}{6}}\ et\ z_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = -e^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\left(z + e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$.

Ex 12 Calculer de deux manières les racines quatrièmes de $1 + i\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $cos\frac{13\pi}{12}$ et $sin\frac{13\pi}{12}$.

<u>1ère méthode</u> : $a = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ est une racine quatrième de a et les complexes $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}$ sont les 4 racines quatrièmes de a.
<u>2ème méthode</u> :

- Cherchons $z = x + iy$ tel que $z^2 = a$.

$$z^2=a \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=a\\ |z^2|=|a|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2=a\\ |z|^2=|a|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2ixy=1+i\sqrt{3}\\ x^2+y^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=1\\ 2xy=\sqrt{3}\\ x^2+y^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2=3\\ 2xy=\sqrt{3}\\ 2y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\frac{3}{2}\\ xy=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ y^2=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\\ xy=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$. Donc, $b=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i)$ est une racine carrée complexe de a.

- Cherchons $z=x+iy$ tel que $z^2=b$.

$$z^2=b \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=b\\ |z^2|=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+iy)^2=b\\ |z|^2=|b|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+2ixy=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\\ x^2+y^2=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ 2xy=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ x^2+y^2=\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\\ 2xy=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 2y^2=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\ xy=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ y^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\ xy=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ y=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases}x=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\ y=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\\ y=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\end{cases}$. Ainsi, $c=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$ est une racine carrée de b. Alors $c^4=(c^2)^2=b^2=a$. Donc, c est une racine quatrième de a. Par conséquent, $c, ci, -c\ et -ic$ sont les quatre racine quatrième de a.

Ainsi, $\left\{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}, -i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}+\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}\right\}=\left\{2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}, 2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}, -2^{\frac{1}{4}}ie^{i\frac{\pi}{12}}\right\}$. En comparant le signe des parties réelles et imaginaires de ces quatre complexes, je peux affirmer que $2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{13\pi}{12}}=-2^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{12}}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$ i.e. $2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)+2^{\frac{1}{4}}\left(\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}-i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$. Ains, $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}=-\frac{1}{\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Vérification : $2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})-1=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)$ OK !

Ex 13 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$ où P et Q sont les points images des racines carrées complexes de z .

Soit z un complexe.

- Si $\underline{z=0}$ alors 0 est la seule racine carrée de z et par suite $M=P=Q=O$. Donc $\overrightarrow{MP}=\vec{O}=\overrightarrow{MQ}$ $et\ par\ conséquent, \overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$.
- <u>Traitons maintenant le cas $z\neq 0$.</u> Alors z a deux racines carrées distinctes et opposées : $\delta\ et -\delta$.

Cherchons les valeurs de z tels que $z=\pm\delta$: $z=\pm\delta \Leftrightarrow z^2=\delta^2 \Leftrightarrow z^2=z \Leftrightarrow z=0\ ou\ z=1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ ici\ z\neq 0} z=1$.

Alors si $z=1$ alors $M=P\ ou\ M=Q\ donc\ \overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$.

- <u>Traitons maintenant le cas $z\neq 0\ et\ z\neq 1$.</u> Alors $M\neq P\ et\ M\neq Q$. Donc $\overrightarrow{MP}\neq\vec{O}\ et\ \overrightarrow{MQ}\neq\vec{O}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MQ}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\arg\left(\frac{-\delta-z}{\delta-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\arg\left(\frac{-\delta-z}{\delta-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\arg\left(\frac{-\delta(1+\delta)}{\delta(1-\delta)}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\arg\left(\frac{-(1+\delta)}{(1-\delta)}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\arg\left(\frac{\delta+1}{\delta-1}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

$\overset{\substack{où\ Aff(A)=1\\ Aff(B)=-1}}{\Leftrightarrow}$ $\exists k\in\mathbb{Z}/\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{BP}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow P$ est sur le cercle de diamètre $[A,B]\Leftrightarrow P$ est sur le cercle trigonométrique

$\Leftrightarrow|\delta|=1 \Leftrightarrow |\delta|^2=1 \Leftrightarrow |\delta^2|=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle trigonométrique et $\underbrace{M\neq A}_{car\ ici\ z\neq 1}$.

Ainsi, en considérant les trois cas, $Sol=\{O\}\cup C(O,1)$.

Ex 14 Soit a un réel et $n\in\mathbb{N}^*$. Notons (e) l'équation : $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}$

1. Soit z une solution de (e). Calculer $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$. En déduire géométriquement que toutes les solutions de (e) sont réelles.
2. Justifier qu'il existe un et un seul réel α dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha)=a$. Qui est α ?
3. Résoudre (e) dans $\mathbb{C}$, donner les solutions de (e) en fonction de α et sous une forme qui permette de lire qu'elles sont réelles.

1. Soit z une solution de (e). Alors, $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}$ $donc$ $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n=\left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right|=\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|=\frac{|1+ia|}{|1-ia|}=\frac{|1+ia|}{|\overline{1+ia}|}\overset{car\ |Z|=|\bar{Z}|}{=}1$. Alors, comme $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|$ est un réel positif, j'en déduis que $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|=1$. De plus, $\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|=\left|\frac{\frac{1}{i}+z}{\frac{1}{i}-z}\right|=\left|\frac{-i+z}{-i-z}\right|=|-1|\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|$. J'en déduis que : $\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$.

   Notons M le point d'affixe z. Alors $1=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=\frac{|z-i|}{|z+i|}\overset{\substack{Aff(A)=i\\ Aff(B)=-i}}{=}\frac{MA}{MB}$. Donc $MA=MB$. J'en déduis que M est sur la médiatrice de $[A,B]$. Or cette médiatrice est l'axe réel. J'en conclus que M est sur l'axe réel ; autrement dit, z est réel.

2. La fonction tangent est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x)=-\infty$. Par conséquent, le théorème de TVI assure que le réel a admet un antécédent par tan dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente étant strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, le réel a admet un unique antécédent α par tan dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Par définition $\alpha=Arctan(a)$.
3. Soit z un complexe tel que : $1-iz\neq 0\ i.e.\ z\neq\frac{1}{i}=-i$.

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia} \Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+itan(\alpha)}{1-itan(\alpha)} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\\ \frac{1+itan(\alpha)}{1-itan(\alpha)}=\frac{1+\frac{isin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1-\frac{isin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}=\frac{cos(\alpha)+isin(\alpha)}{cos(\alpha)-isin(\alpha)}=\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}}=e^{i2\alpha}}} \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=e^{i2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1+iz}{1-iz}\ est\ une\ racine\ nième\ de\ e^{i2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!]/\frac{1+iz}{1-iz}=e^{\frac{i2\alpha}{n}}e^{\frac{i2k\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!]/1+iz=e^{\frac{i2\alpha}{n}}e^{\frac{i2k\pi}{n}}(1-iz)$$

$$\Leftrightarrow \exists k\in[\![0,n-1]\!]/i(1+e^{\frac{i2\alpha}{n}}e^{\frac{i2k\pi}{n}})z=e^{\frac{i2\alpha}{n}}e^{\frac{i2k\pi}{n}}-1$$

Mais, $\boldsymbol{e^{\frac{i2\alpha}{n}}e^{\frac{i2k\pi}{n}}}=-1 \Leftrightarrow \boldsymbol{e}^{i\left(\frac{2\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}=-1 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{n}}+\frac{2k\pi}{n}\equiv\pi[2\pi]$.

Or, $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \boldsymbol{k \in [\![0, n-1]\!]} \end{cases}$ $donc\ -\frac{\pi}{n} \leq \frac{(2k-1)\pi}{n} < \frac{\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{2k\pi}}{\boldsymbol{n}} < \frac{(2k+1)\pi}{n} \leq \frac{(2n-1)\pi}{n} = -\frac{\pi}{n} + 2\pi$.

Donc $\frac{\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{n}} + \frac{2k\pi}{n} \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{2k\pi}}{\boldsymbol{n}} = \pi \Leftrightarrow \alpha = \pi\left(\frac{n}{2} - k\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ n\ pair \\ k = \frac{n}{2} \end{cases}$.

<u>1er cas n impair ou $\alpha \neq 0$</u>

$z\ solution \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]/z = \frac{e^{\frac{i2\alpha}{n}}e^{\frac{i2k\pi}{n}}-1}{i\left(1+e^{\frac{i2\alpha}{n}}e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)} = \frac{2isin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\right)}}{i2cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\right)}} = tan\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) \in \mathbb{R}$.

<u>12ème cas n pair et $\alpha = 0$</u>

$z\ solution \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \left\{\frac{n}{2}\right\}/z = \frac{e^{\frac{i2k\pi}{n}}-1}{i\left(1+e^{\frac{i2k\pi}{n}}\right)} = \frac{2isin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n}\right)}}{i2cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(\frac{k\pi}{n}\right)}} = tan\left(\frac{\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}}\right) \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $Sol = \left\{tan\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{n}} + \frac{\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}}\right)/k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ si <u>n impair ou $\alpha \neq 0$</u> et $Sol = \left\{tan\left(\frac{\boldsymbol{k\pi}}{\boldsymbol{n}}\right)/k \in [\![0, n-1]\!] \setminus \left\{\frac{n}{2}\right\}\right\}$ si <u>n pair et $\alpha = 0$</u>

Ex 15 Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Pour tout k de $\{0 ; 1 ; \dots ; n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $S(n,p) = \sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^p$.
3. Calculer $T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|$.

1. $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = \prod_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ik\pi}}{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{e}^{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}}$. $Or, \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\boldsymbol{2ik\pi}}{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{2i\pi}}{\boldsymbol{n}}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \frac{\boldsymbol{2i\pi}}{\boldsymbol{n}} \frac{(n-1)n}{2} = \boldsymbol{i}(n-1)\pi$. Donc, $P_n = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}(n-1)\pi} = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\pi})^{n-1} = (-1)^{n-1}$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$S(n,p) = \sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ik\pi}}{\boldsymbol{n}}}\right)^p = \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ikp\pi}}{\boldsymbol{n}}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}}\right)^k = \begin{cases} \frac{\left(\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}}\right)^n - 1}{\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} - 1}\ si\ \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} \neq 1 \\ n\ si\ \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{e^{i2p\pi}-1}{\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}}-1}\ si\ \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} \neq 1 \\ n\ si\ \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} = 1 \end{cases} \underset{car\ e^{i2p\pi}=1}{\triangleq} \begin{cases} 0\ si\ \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} \neq 1 \\ n\ si\ \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} = 1 \end{cases}$. De plus, $\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ip\pi}}{\boldsymbol{n}}} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{2p\pi}{n} = 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/p = kn \Leftrightarrow p\ est\ multiple\ de\ n$.

Ainsi, $S(n,p) = \begin{cases} 0\ si\ \ p\ n'est\ pas\ multiple\ de\ n \\ n\ si\ p\ est\ multiple\ de\ n \end{cases}$.

3. $T(n) = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{2ik\pi}}{\boldsymbol{n}}} - 1\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|2isin\left(\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\frac{k\pi}{n}}\right| = \sum_{k=0}^{n-1} |2||i|\left|sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right|\left|e^{i\frac{k\pi}{n}}\right| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\left|sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| \underset{\substack{car\ \frac{k\pi}{n} \in [0,\pi] \\ donc\ sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geq 0}}{\triangleq} 2\sum_{k=0}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

$T(n) = 2\sum_{k=0}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{ik\pi}}{\boldsymbol{n}}}\right)$.

Or, $\sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{ik\pi}}{\boldsymbol{n}}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{i\pi}}{\boldsymbol{n}}}\right)^k \underset{car\ \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{i\pi}}{\boldsymbol{n}}} \neq 1}{\triangleq} \frac{\left(\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{i\pi}}{\boldsymbol{n}}}\right)^n - 1}{\boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{i\pi}}{\boldsymbol{n}}} - 1} = \frac{e^{i\pi}-1}{2isin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{-2}{2isin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}} = \frac{i}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}e^{-i\frac{\pi}{2n}} = \frac{i}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) - isin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right] = 1 + icotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Donc, $T(n) = 2cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Ex 16 Pour quels entiers naturels non nuls n et p, le système (S) : $\begin{cases} z^n = 1 \\ (1+z)^p = 1 \end{cases}$ a-t-il au moins une solution ?

$\begin{cases} z^n = 1 \\ (1+z)^p = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z^n| = |1| \\ |(1+z)^p| = |1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ |1+z|^p = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ |1+z| = 1 \end{cases} \overset{Aff(A)=-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} OM = 1 \\ AM = 1 \end{cases} \Rightarrow M \in C(O,1) \cap C(A,1) \Rightarrow z = j\ ou\ z = j^2 = \bar{j}$.

Donc les seules solutions possibles de (S) sont j et $\bar{j}$. De plus, si j est solution de (S) alors $\begin{cases} j^n = 1 \\ (1+j)^p = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \overline{j^n} = 1 \\ \overline{(1+j)^p} = 1 \end{cases}$ et finalement $\begin{cases} \bar{j}^n = 1 \\ (1+\bar{j})^p = 1 \end{cases}$. Ainsi, si j est solution de (S) alors $\bar{j}$ est aussi solution de (S).

Par conséquent, les entiers n et p recherchés sont les entiers n et p tels que $\begin{cases} j^n = 1 \\ (1+j)^p = 1 \end{cases}$.

$\begin{cases} j^n = 1 \\ (1+j)^p = 1 \end{cases} \underset{car\ 1+j+j^2=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} j^n = 1 \\ (-j^2)^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j^n = 1 \\ (-1)^p(j^2)^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j^n = 1 \\ (-1)^p j^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j^n = 1 \\ j^p = (-1)^p \end{cases} \underset{car\ \forall p, j^p \neq -1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} j^n = 1 \\ p\ pair\ et\ j^p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} n\ multiple\ de\ 3 \\ p\ pair\ et\ p\ multiple\ de\ 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\ multiple\ de\ 3 \\ p\ multiple\ de\ 6 \end{cases}$.

Les entiers n et p recherchés sont donc les entiers n multiples de 3 et les entiers p multiples de 6.

Ex 17 Soit a un complexe de module 1. n un entier strictement positif. On note $u_1, u_2, \dots, u_n$,les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a et $z_k = (1+u_k)^n$.Montrer que les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ d'affixes respectives $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont sur une même droite passant par O.

Posons $a = e^{i\theta}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!], u_k = e^{i\frac{\theta}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

Alors, $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont bien les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a . Et $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$z_k = (1+u_k)^n = \left(1 + e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)^n = \left(2\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\ e^{i\left(\frac{\theta}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n\left(e^{i\left(\frac{\theta}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)}\right)^n = 2^n\left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n e^{i\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)} =$
$2^n\left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n e^{i(k\pi)}e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 2^n\left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n (e^{i\pi})^k e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \underbrace{2^n\left(\cos\left(\frac{\theta}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right)^n (-1)^k}_{x_k \in \mathbb{Z}} e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} = x_k e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

Notons $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $\boldsymbol{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ i.e. $\vec{u} = cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{\imath} + sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{\jmath}$. Alors $z_k = x_k e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ signifie que $\overrightarrow{OM_k} = x_k\vec{u}$.

J'en conclus que tous les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont alignés sur la droite passant par O et dirigée par $\vec{u}$.

Ex 18 Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ les images ponctuelles de ces racines $\boldsymbol{n}^{\text{ièmes}}$.

1) Montrer que $\forall M \in \mathscr{P}$, $\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} = n\overrightarrow{MO}$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = n$.
2) Montrer que $\forall M \in \mathscr{P}$, $\sum_{k=0}^{n-1} {MA_k}^2 = nMO^2 + n$. En déduire l'ensemble des points M tels que : $\sum_{k=0}^{n-1} {MA_k}^2 = 2n$.

Soit $M(z) \in \mathscr{P}$, $Aff(\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{MA_k}) = \sum_{k=0}^{n-1} Aff(\overrightarrow{MA_k}) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} - z\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{\substack{=somme\ des\ racines \\ nièmes\ de\ l'unité \\ =0}} - \sum_{k=0}^{n-1} z = -nz = n(-z) = \text{Aff}(n\overrightarrow{MO})$. Donc, $\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{MA_k} = n\overrightarrow{MO}$.

Par conséquent, $\|\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{MA_k}\| = \|n\overrightarrow{MO}\| = n\|\overrightarrow{MO}\|$. Alors $\|\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{MA_k}\| = n \Leftrightarrow n\|\overrightarrow{MO}\| = n \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MO}\| = 1 \Leftrightarrow M \in C(O,1)$. Donc $C(O,1)$ est l'ensemble des points M tels que $\|\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{MA_k}\| = n$.

Soit $M(z) \in \mathscr{P}$, $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^{\ 2} = \sum_{k=0}^{n-1}\left|e^{i\frac{2k\pi}{n}} - z\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\frac{2k\pi}{n}} - z)(\overline{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - z}) = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\frac{2k\pi}{n}} - z)(e^{-i\frac{2k\pi}{n}} - \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\bar{z} + \overline{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}z\right) + |z|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 1 +$ $\sum_{k=0}^{n-1}(1+|z|^2) + z\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i\frac{2k\pi}{n}}}_{=0} + \bar{z}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}}_{=0} = = n(1+|z|^2) = n + nMO^2$.

Alors $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^{\ 2} = 2n \Leftrightarrow\ n + nMO^2 = 2n \Leftrightarrow OM^2 = 1 \Leftrightarrow M \in C(O,1)$. Donc $C(O,1)$ est l'ensemble des points M tels que $\sum_{k=0}^{n-1} MA_k^{\ 2} = 2n$.

Ex 19 Soit $a\ et\ b$ deux paramètres complexes distincts et $n \in \mathbb{N}\ tel\ que\ \boldsymbol{n \geq 3}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z-a)^n = (z-b)^n$
2. Montrer que les points images des solutions sont alignés sur la médiatrice de $[A,B]$ où A est l'image ponctuelle de $a\ et\ B$ celle de b .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a\ et\ b$ pour que toutes les solutions soient réelles. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont réelles).
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a\ et\ b$ pour toutes les solutions soient imaginaires pures. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont imaginaires pures) Come

1. Comme a et b sont distincts, a et b ne sont pas solutions de l'équation (e): $(z-a)^n = (z-b)^n$.

Soit z un complexe distinct de a et b .

z solution de $(e) \Leftrightarrow (z-a)^n = (z-b)^n \Leftrightarrow \frac{(z-a)^n}{(z-b)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z-a}{z-b}$ est une racine nième de l'unité $\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n-1]\!], \frac{z-a}{z-b} = \boldsymbol{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$

$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n-1]\!], z - a = \boldsymbol{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}(z-b) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n-1]\!], \left(1 - \boldsymbol{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)z \overset{**}{=} a - b\boldsymbol{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \underset{\substack{car\ pour\ k=0,\ **\ est\ fausse \\ pour\ k \in [\![1,n-1]\!], 1-e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 0}}{\Leftrightarrow} \exists k \in [\![1,n-1]\!], z = \frac{a - be^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$.

Ainsi, $Sol = \{\underbrace{\frac{a-be^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}}}_{=z_k}\ /\ k \in [\![1,n-1]\!]\}$. Ces $n-1$ solutions sont toutes distinctes car si $z_k = z_{k'}$ alors $\boldsymbol{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = \frac{z_k - a}{z_k - b} = \frac{z_{k'} - a}{z_{k'} - b} = \boldsymbol{e}^{i\frac{2k'\pi}{n}}$ et par suite $k = k'$.

2. z solution de $(e) \Leftrightarrow \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = 1 \Rightarrow \left|\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n\right| = |1| \Rightarrow \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^n = 1 \Rightarrow \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1 \Rightarrow \frac{|z-a|}{|z-b|} = 1 \Rightarrow |z-a| = |z-b| \overset{\substack{a=Aff(A) \\ b=Aff(B)}}{\Leftrightarrow} MA = MB \Rightarrow M \in med\ [A,B]$.

Ainsi, les points images des solutions sont alignés sur la médiatrice de $[A,B]$.

3. Les solutions de (e) sont réelles sietssi les images des solutions sont alignés sur l'axe réel sietssi la médiatrice de [A,B] est l'axe réel sietssi $b = \bar{a}$.

On pose alors $a = re^{i\alpha}\ et\ b = re^{-i\alpha}$. Alors, $z_k = \frac{re^{i\alpha} - re^{-i\alpha}e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha}\left(1-e^{\left(-2\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)i}\right)}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha}\left(-2i\sin(-\alpha+\frac{k\pi}{n})e^{\left(-\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\right)}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})e^{\left(\frac{k\pi}{n}\right)i}} = \frac{r\sin(-\alpha+\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} \in \mathbb{R}$.

4. Les solutions de (e) sont réelles sietssi les images des solutions sont alignés sur l'axe imaginaire sietssi la médiatrice de [A,B] est l'axe imaginaire sietssi $b = -\bar{a}$.

On pose alors $a = re^{i\alpha}\ et\ b = -re^{-i\alpha}$. Alors, $z_k = \frac{re^{i\alpha} + re^{-i\alpha}e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha}\left(1+e^{\left(-2\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)i}\right)}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \frac{re^{i\alpha}\left(2\cos(-\alpha+\frac{k\pi}{n})e^{\left(-\alpha+\frac{k\pi}{n}\right)i}\right)}{-2i\sin(\frac{k\pi}{n})e^{\left(\frac{k\pi}{n}\right)i}} = \frac{r\cos(-\alpha+\frac{k\pi}{n})}{\sin(\frac{k\pi}{n})} i \in i\mathbb{R}$.

Ex 20 Soit l'équation (E) : $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ on donnera les solutions sous leur forme trigonométrique.
2. En déduire la valeur de la somme : $S = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.
3. En déduire les valeurs de $s = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $p = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
4. En déduire des expressions par radicaux de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
5. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ et\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs au cercle (C) de centre $\Omega(-\frac{1}{4},0)$ de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et à l'axe réel.
6. Déduire de ce qui précède une construction à la règle et au compas des sommets d'un pentagone régulier.

1. $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z^5-1}{z-1} = 0 \\ z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow z\ est\ racine\ 5ème\ de\ l'unitédistcincte\ de\ 1.$

   Les solutions de (E) sont donc les quatre complexes $e^{i\frac{2k\pi}{5}}\ tq\ k \in [\![1,4]\!]$.

2. $S = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = \sum_{k=0}^{4}\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) = \sum_{k=0}^{4}\text{Re}\left(e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right) = Re(\sum_{k=0}^{4} e^{i\frac{2k\pi}{5}}) = Re(\underbrace{\sum_{k=0}^{4}\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k}_{=0\ car\ e^{i\frac{2\pi}{5}}\ est\ solution\ de\ (E)}) = Re(0) = 0$

3. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \overset{car\ \frac{2\pi}{5}-2\pi=-\frac{8\pi}{5}}{=} \cos\left(-\frac{8\pi}{5}\right) \overset{car\ \cos\theta=\cos(-\theta)}{=} \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \overset{car\ \frac{4\pi}{5}-2\pi=-\frac{6\pi}{5}}{=} \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) \overset{car\ \cos\theta=\cos(-\theta)}{=} \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$.

   Donc, $0 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 + 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right] = 1 + 2s$. Donc, $s = -\frac{1}{2}$.

   De plus, $0 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$. Donc, en appliquant la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, j^' obtiens :

   $0 = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 + 4p$. Donc, $p = -\frac{1}{4}$.

4. Posons $x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ et\ y = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Alors $\begin{cases} x + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Par conséquent, x et y sont les racines de $P(t) = t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$. Posons $\Delta = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

   $t_1 = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 0$ et $t_2 = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$. Comme $y < 0 < x$, je peux conclure que $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = y = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}\ et\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

   Alors $\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{16-(1+5-2\sqrt{5})}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Comme $sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, je peux conclure que $sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

   De même , $\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{16-(1+5+2\sqrt{5})}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$. Comme $sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) > 0$, je peux conclure que $sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

   Enfin, $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \underset{\substack{formule\ d'angle \\ double\ du\ cosinus}}{=} \frac{\cos(\frac{2\pi}{5})+1}{2} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$. Comme $cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, je peux conclure que $cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$.

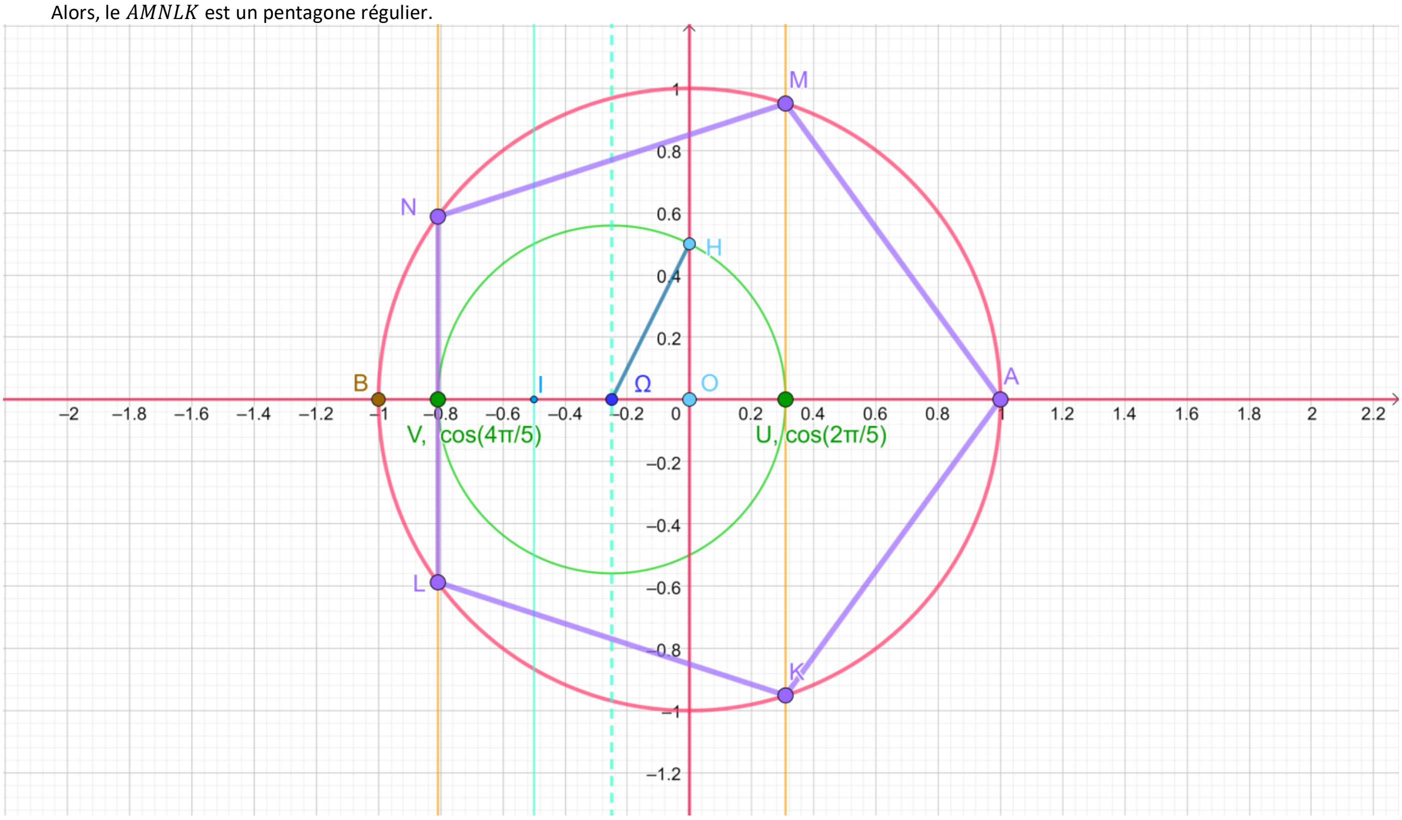
5. Soit M un point de l'axe des abscisses. Notons $(x,0)$ ses coordonnées. Alors $\Omega M = \left|x-\left(-\frac{1}{4}\right)\right| = \left|x+\frac{1}{4}\right|$.

Donc, M est sur le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow \left|x+\frac{1}{4}\right| = \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x+\frac{1}{4} = \pm\frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ ou\ x = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ et\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points d'intersection du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et de l'axe des abscisses.

6. Matériel : un compas et un règle non gradué.

- <u>Préliminaire :</u>
  a) <u>Pour tracer la médiatrice d'un segment $[A,B]$</u> , on trace deux points qui sont à égale distance de A et de B : on point le compas en A avec un écart de AB et on trace deux arcs de part et d'autre du segment , ensuite on pointe le compas en B avec le même écart et on trace deux autres arcs de part et d'autre du segment ; ces deux arcs interceptent les deux autres arcs en deux points P et Q sui sont alors à égale distance de A et de B ; (PQ) est alors la médiatrice de $[A,B]$, la construction de la médiatrice s'achève alors par le tracé de la droite (PQ).
  b) <u>Pour tracer une droite perpendiculaire à une droite D donnée en un point A de D donné</u>, on trace la médiatrice de deux points de D dont le milieu est A : on point le compas en A , on choisit un écart (quelconque non nul) et on trace deux arcs de part et d'autre de A qui interceptent D en deux points U et V ; A est donc le milieu de $[U,V]$ et la perpendiculaire à D en A est alors la médiatrice de $[U,V]$ que l'on trace avec la méthode précédente.
- <u>Cercle trigonométrique, unité et axes</u>
  - ✓ Traçons un cercle. On note O son centre et son rayon est l'unité. Ce cercle est alors le cercle trigonométrique.
  - ✓ Traçons les axes : on trace une première droite passant par O qui sera l'axe des abscisses puis grâce au préliminaire, on trace la perpendiculaire à cet axe passant par O. On oriente alors ces deux axes pour créer un repère orthonormé direct. On note A et B les points d'intersection entre le cercle trigonométrique et l'axe réel, points d'abscisses respectivement positive et négative
- <u>Le point Ω</u> :
  - ✓ on trace la médiatrice de $[O,B]$.
  - ✓ on appelle I le point d'intersection entre la médiatrice de $[O,B]$ et le segment $[O,B]$; I est le milieu de $[O,B]$. Donc $IO = \frac{1}{2}$ et I a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.
  - ✓ On trace la médiatrice de $[O,I]$.
  - ✓ Ω est le milieu de $[O,I]$, le point d'intersection entre la médiatrice de $[O,I]$ et le segment $[O,I]$. Donc $\Omega O = \frac{1}{,}$ et Ω a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4},0\right)$.
- <u>Distance $\frac{\sqrt{5}}{4}$:</u>
  $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$. Donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux cotés formant l'angle droit sont de longueur $\frac{1}{2}\ et\ \frac{1}{4}$ a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
  On pointe le compas en 0 , on prend l'écart $OI = \frac{1}{2}$ et on trace un arc qui intercepte l'axe des ordonnées en un point H d'ordonnée positive. Alors H a pour coordonnées $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Le triangle ΩOH est donc rectangle en O et ses cotés adjacents à l'angle droit sont de longueurs ½ et ¼. Donc l'hypoténuse $[\Omega H]$ a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
- <u>Valeurs $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$:</u>
  Je pointe le compas en Ω avec un écart $\Omega H = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Je trace le cercle. Les points d'intersection U et V de ce cercle avec l'axe des abscisses ont pour abscisses $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ et\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
- <u>Sommets du pentagone.</u>
  Je trace les perpendiculaires D et D' à l'axe des abscisses aux points U et V. Ces deux droites interceptent le cercle trigonométrique : on note $\underbrace{M,K}_{\in D}\ et\ \underbrace{N,L}_{\in D'}$
  Alors, le $AMNLK$ est un pentagone régulier.



Ex 21 Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

A. 1. Calculer $1 + u + u^2 + \cdots + u^6$.

2. Calculer $\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}$.

3. En déduire $\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}$

B. On pose $S = u + u^2 + u^4$.

1. Exprimer $\bar{S}$ en fonction de u. En déduire $S + \bar{S}$ et $S\bar{S}$.
2. En déduire S sous forme algébrique.
3. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.

$u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

1. $1 + u + u^2 + \cdots + u^6 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{6i\pi}{7}} + e^{\frac{6i\pi}{7}} + .. + e^{\frac{12i\pi}{7}}$ =somme des racines 7ièmes de l'unité$= 0$

2. $\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6} = \frac{u(1+u^4)(1+u^6)+u^2(1+u^2)(1+u^6)+u^3(1+u^4)(1+u^2)}{(1+u^2)u^3(1+u^4)(1+u^6)} = \frac{u+u^5+u^7+u^{11}+u^2+u^4+u^8+u^{10}+u^3+u^5+u^7+u^9}{(1+u^2)(1+u^4)(1+u^6)} \overset{\substack{car\ u^7=1 \\ u^8=u\ (\dots)}}{\triangleq} \frac{u+u^5+1+u^4+u^2+u^4+u+u^3+u^3+u^5+1+u^2}{(1+u^4+u^6+u^{10}+u^2+u^6+u^8+u^{12})}$
$= \frac{-u^6-u^6}{(1+u^4+u^6+u^3+u^2+u^6+u+u^5)} = \frac{-2u^6}{u^6} = -2$.

3. $\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6} \overset{identité\ du\ Losange}{\triangleq} \frac{u}{2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)u} + \frac{u^2}{2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)u^2} + \frac{u^3}{2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)u^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}\right]$. Par conséquent, $\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)} = -4$.

On pose $S = u + u^2 + u^4$.

4. Exprimer $\bar{S}$ en fonction de u. En déduire $S + \bar{S}$ et $S\bar{S}$.

$\bar{S} = \overline{u + u^2 + u^4} = \bar{u} + \bar{u}^2 + \bar{u}^4 = u^6 + u^5 + u^3$.

Donc, $S + \bar{S} = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = -1$

et $S\bar{S} = (u^6 + u^5 + u^3)(u + u^2 + u^4) = u^7 + u^8 + u^{10} + u^6 + u^7 + u^9 + u^4 + u^5 + u^7 = 3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^3 + u^2 + u = 2$

5. $S + \bar{S} = -1$ et $S\bar{S} = 2$. Donc, S et $\bar{S}$ sont les racines de $P(t) = t^2 + t + 2$. Posons $\Delta = 1 - 8 = -7 = \left(\sqrt{7}i\right)^2$ et $t_1 = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ et $t_2 = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$.

   De plus, $S = u + u^2 + u^4 = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i\left(\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)$.

   Comme $0 < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi$, $0 < \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ et $0 < \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) < \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$. Donc, $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right) > 0$. Par conséquent,

   $Im(S) > 0$ et par suite , $Im(\bar{S}) < 0$. J'en déduis que $S = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ et $\bar{S} = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

6. $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = Re(S) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = Im(S) = \frac{\sqrt{7}}{2}$.