DL 3

Exercice 1 On pose $z_n = [(\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})]^n + [(\sqrt{3} - 1) - i(1 + \sqrt{3})]^n$

- Justifier que $\forall n \in \mathbb{Z}, z_n \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $\sqrt{3} + i - 1 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.
- En déduire $|z_n|$ et $\arg(z_n)$ quand il existe.
- Monter que pour tout entier naturel n multiple 6, $z_n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

- Déterminer les complexes z tels que az^2, a^2z et z^3 sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral.
- Déterminer les complexes z tels que az^2, a^2z et z^3 sont les affixes de points alignés.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{C}$. Résoudre (S) :
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ \bar{a}x + y + az = 0 \\ \bar{a}^2x + \bar{a}y + z = 0 \end{cases}$$
 d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

A rendre au plus tard jeudi 17 novembre 2022

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout k de $\{0; 1; \dots; n-1\}$, on note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \omega_1$.

- Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$. Quel résultat de cours venez-vous de redémontrer ?
- En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.
- Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$.
- On pose $V = \sum_{k=0}^{n-1} k\omega_k$
 - Calculer $\omega V - V$.
 - En déduire V en fonction de ω et de n .
- On pose $W = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega_k$
 - Calculer W .
- Soit $p \in \mathbb{N}$ et $S(p) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p$
 - Calculer $S(p)$ on distinguera les cas $p \equiv 0[n]$ et $p \not\equiv 0[n]$.
 - Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^n (z + \omega_k)^n = n(z^n + 1)$.
- Soit a et b deux nombres complexes
 - Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (a + b\omega_k)$.
 - En déduire que $n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + b\omega_k|$.
 - Démontrer que $\sum_{k=0}^{n-1} |a + b\omega_k| = \sum_{k=0}^{n-1} |b + a\omega_k|$.
 - En déduire que $|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + b\omega_k|$.

Exercice 5 Montrer que les images ponctuelles des solutions de l'équation $(z + 1)^n = (iz - 1)^n$ d'inconnue z complexe, sont toutes alignées.