TD 25
Variables aléatoires sur un univers fini .

Ex 0 Fonction indicatrice:

1. Soit E un ensemble. Pour tout sous-ensemble A de E, on définit $\mathbb{I}_A$ la fonction indicatrice de A par:
   $\forall x \in E, \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \; si \; x \notin A \end{cases}$.

Soit A et B deux sous-ensembles de E. De quels ensembles, les fonctions suivantes sont-elles les fonctions indicatrices ?
$\min(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$, $\max(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$, $\mathbb{I}_A\mathbb{I}_B$, $\mathbb{I}_E - \mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A\mathbb{I}_B$, $(\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B)^2$

2. Soit (Ω, P)un espace probabilisé fini. Montrer que $\forall A \subset \Omega, \mathbb{I}_A \sim \mathscr{B}(P(A))$ et $E(\mathbb{I}_A) = P(A)$.

Ex 1 Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to [0,1] \\ t \to P(X \leq t) \end{pmatrix}$.
Démontrer que F_X est en escalier, croissante et $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.
Et, $si\ X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} alors\ P(X = x_1) = F_X(x_{i1})$ et$\forall i \in \{2, .., m\}, P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

Applications :

A. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$

Déterminer les lois de : $Y = |X + 1|$ et $Z = \min(X; 0)$ et représenter les fonctions de répartition de X , Y et Z et calculer les espérances et variances des trois lois $X, Y\ et\ Z$. $Y\ et\ Z$ sont-elles décorrélées? Même question pour X et Y ?

B. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répète n fois le lancer d'un dé non pipé à 6 faces. On note X_k le numéro obtenu au $k^{\text{ième}}$ lancer.
On pose $M_n = \max(X_1, X_2, .., X_n)$ et $m_n = \min(X_1, X_2, .., X_n)$.

a) Donner la loi de X_k et sa fonction de répartition.
b) Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n.
c) Soit x un réel fixé. Calculer $\lim_{n \to +\infty} F_n(x)$.
d) Montrer que $sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F_n(x) - \mathbb{I}_{[6,+\infty[}(x) \right| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Qu'en déduit-on ?
e) Déterminer la fonction de répartition de m_n.

Ex 2 Des lois conjointes :

1) Une urne contient 4 boules indiscernables numérotées de 0 à 3 . On tire successivement et sans remise deux boules et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus .
   a. Déterminer la loi de X_1 et $X_{2[X_1=0]}$.
   b. On pose $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules .On note X et Y respectivement le plus petit et le plus grand numéro . Déterminer la loi de (X, Y) quand les tirages se font avec remise puis sans remise .
3) Une urne contient n boules blanches et n boules noires . On effectue des tirages sans remise et on désigne par X le nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les boules blanches . Déterminer la loi de X . Calculer ensuite $E(X)$ **.**
4) On lance n fois une pièce équilibrée et on note X et Y les variables aléatoires respectivement égales au nombre de pile et au nombre de face obtenus . Déterminer la loi de (X, Y)**.** X et Y sont-elles indépendantes ?
5) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p définies sur même espace probabilisé fini . Déterminer la loi du couple $(X + Y, X - Y)$ .Les variables $X + Y, X - Y$ sont elles indépendantes ?

Ex 3 On dispose d'un dé à 6 faces truqué dont la probabilité d'apparition d'un chiffre est proportionnelle à ce chiffre. On lance ce dé et on note X le chiffre obtenu. Déterminer la loi de X et son espérance et sa variance.

Ex 4 On réalise 500 fois la même expérience dont la probabilité de succès est 0,6 et on suppose que toutes les expériences sont indépendantes. On désigne par X le nombre de succès obtenus. Déterminer un minorant de $P(280 < X < 320)$.

Ex 5 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0{,}1$.

1) Calculer $P(X = 5)$, $P(X \leq 2)$, $P(X < 4)$, $P(X = 1{,}5)$, $P(3 \leq X \leq 4)\ et\ P(2 < X \leq 8)$.
2) Déterminer les valeurs de x telles que $P(X \geq x) \leq 0{,}75$.
3) Calculer $P(X = 16)$ dans le cas où $p = 0{,}9$.

Ex 6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé fini.

1) Justifier que : $P(X \geq 1) \leq E(X)$.
2) Voici l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les n-uplets de réels démontrée dans le DS1 : pour tous réels $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$. En déduire $\frac{E(X)^2}{E(X^2)} \leq P(X \geq 1)$.
1) En déduire un encadrement $P(X = 0)$.

Ex 7

1) Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1,20]\!]$. Déterminer la loi de $\lfloor\sqrt{X}\rfloor$.
2) Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1,6n]\!]$. Déterminer la loi de $cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.

Ex 8 Une urne contient N boules dont n noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire .

1) On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages effectués pour enfin obtenir cette boule noire. Quelle est la loi de X ?
2) On note X_p la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages effectués pour sortir p boules noires exactement. Quelle est la loi de X_p ?
3) Calculer $E(X)\ l'aide\ de\ P_{X_2}$.

Ex 9 Lors d'un examen, on vous demande de tirer trois sujets que vous aurez à traiter dans une urne en contenant 10. Parmi ces 10 sujets, il y en a trois que vous ne connaissez pas. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de sujets qui vous seront inconnus à l'issue du tirage. Déterminer la loi de X et son espérance.

Ex 10 1) On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée qu'on lance successivement n fois . On appelle X le nombre de fois que le côté face apparaît. On fait afficher X sur un compteur. Déterminer la loi de X.
2)Malheureusement le compteur est détraqué : si X est non nul alors le compteur affiche la valeur de X mais si X est nul alors le compteur affiche un nombre au hasard entre $1\ et\ n$. On appelle Y le nombre affiché sur le compteur .
Déterminer $Y(\Omega)$. Décrire la loi de Y puis calculer $E(Y)$.

Ex 11 Soit X , Y et Z trois variables aléatoires d'univers $\Omega = [\![1;n]\!]$ et définies par :$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$
Et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2,\ P_{X=i}(Y=j) = \begin{cases} \frac{1}{i}\ si\ j \in [\![1,i]\!] \\ 0\ sinon \end{cases}$ et $P_{Y=i}(Z=j) = \begin{cases} \frac{1}{i}\ si\ j \in [\![1,i]\!] \\ 0\ sinon \end{cases}$.
Déterminer les lois de Y et Z . Puis calculer $E(Y)$ et $E(Z)$.

Ex 12 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Calculer $P(X+Y=n)$ puis $P(X=Y)$.

Ex 13 On dispose de n boites numérotées de 1 à n . Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la boite k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boite puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule .

1) Déterminer la loi du couple (X, Y) (loi conjointe de X et Y) .
2) Calculer $P(X = Y)$.
3) Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$. $Y\ et\ X$ sont-elles décorrélées?

Ex 14 Une proportion p de la population d'une ville est atteinte par un virus contagieux. Si une personne est en contact avec une personne contaminée, il y a deux « chances » sur trois qu'elle soit contaminée.
Un représentant de commerce en pleine forme décide de rendre visite à n habitants choisis au hasard .

1) Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades rencontrés par le représentant. Quelle est la loi de N ?
2) Quelle est la probabilité que le représentant soit contaminé à l'issue de sa tournée ?

Ex 15 Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel la probabilité d'obtenir un correspondant est de $\in]0,1[$. On note $q = 1 - p$ et X est la variable aléatoire comptant le nombre de correspondants obtenus.

1) Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
2) Après ses n appels , le secrétaire rappelle les $n - k$ correspondants qui n'ont pas répondu la première fois . Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de correspondants obtenus lors de cette deuxième série d'appels .
On note $Z = X + Y$.
   a) Calculer $P_{X=k}(Y = l)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $l \in [\![0,k]\!]$.
   b) Déterminer la loi de Z .

Ex 16 On lance deux dés équilibrés l'un est rouge l'autre est noir. On note R le numéro obtenu par le dé rouge et N le celui du noir. On note $X = \max(R, N)\ et\ Y = \min(R, N)$.

1. Déterminer la loi de R, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Exprimer $X + Y$ en fonction de R et N. En déduire l'espérance et la variance de $X + Y$.
4. Calculer $E(XY)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Ex 17 Une boite contient trois jetons numérotées 1, 2 et 3. Un joueur A tire un jeton au hasard, note son numéro p et le remet dans l'urne. Un joueur B tire à son tour un jeton, note son numéro q et le replace dans la boite.
Si $p + q$ est pair alors A reçoit a euros de B, sinon B reçoit b euros de A.

1. Quelle la probabilité que A gagne ?
2. A quelle condition sur a et b le jeu est -il équitable ?
3. A et B jouent trois parties équitables. On note X le gain algébrique de A. Calculer $P(X \geq 0)$ et $E(X)$.
4. $A\ et\ B$ jouent 10 parties équitables. On note Y le nombre de parties gagnées par A. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Ex 18 Graphe aléatoire

Les graphes étudiés ici sont à la fois non orientés et sans boucle. Graphiquement, cela veut dire que leurs arêtes sont des lignes et non des flèches et qu'une arête ne joint jamais un sommet à lui-même.
n désigne un entier naturel non nul et on note $\Gamma(n)$ l'ensemble des graphes dont les sommets sont les entiers $1,2, \dots, n$. Chaque arête d'un tel graphe est donc représentée par un ensemble $\{i, j\}$ tel que $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et $i < j$.

1) Combien $\Gamma(n)$ contient-il de graphes ?
2) **Définition :** Soit G un graphe aléatoire et $p \in [0,1]$.

On notera $G(i, j)$ l'évènement « $\{i, j\}$ est une arête de G » pour tous $i\ et\ j$ dans $[\![1, n]\!]\ tq\ i < j$.
On dit que G suit la loi $\mathscr{G}(n, p)$ si $G \in \Gamma(n)$ et si les évènements $G(i, j)$, $i\ et\ j$ décrivant $[\![1, n]\!]\ avec\ i < j$, sont indépendants et de même probabilité p.
Construire un graphe aléatoire G suivant la loi $\mathscr{G}(n, p)$ revient donc à décider, pour chaque $\{i, j\}$, si $\{i, j\}$ appartient à G (probabilité p) ou non (probabilité $1 - p$) et ceci indépendamment d'une paire à l'autre.
Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\lambda_n = n^2 p_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne finalement un graphe aléatoire G_n de loi $\mathscr{G}(n, p_n)$ et on note A_n le nombre d'arêtes de G_n.

a) Déterminer la loi de A_n.
b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P\,(A_n = 0)$ sous l'hypothèse que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$.
c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P\,(A_n = 0)$ sous l'hypothèse que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$.
d) Interpréter les résultats obtenus.