Variables aléatoires

Dans tout le chapitre, on travaille avec un espace probabilisé fini (Ω, P) et E un ensemble.

I Variables aléatoires et ses lois

1. Définitions générales

1Définition : Une variable aléatoire est une application X de Ω dans E .
Une variable aléatoire réelle est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$.

2Notation : Ω est fini , $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ où $n = card\Omega$ .Donc $X(\Omega)$= $\left\{\underbrace{X(\omega_1)\ ,X(\omega_2)\ , \dots, X(\omega_n)}_{pas\ tous\ distincts!!}\right\} \subset E$ est fini et $m = card(X(\Omega)) \leq n = card\ (\Omega)$ (il y aura égalité des cardinaux sietssi tous les réels x_i sont distincts sietssi X est injective). En fait $X(\Omega)$= $\{X(\omega_{i_1}), X(\omega_{i_2}), \dots, X(\omega_{i_m})\}$ tel que $m \leq n\ et\ \left(k \neq l \Rightarrow X(\omega_{i_k}) \neq X(\omega_{i_l})\right)$.

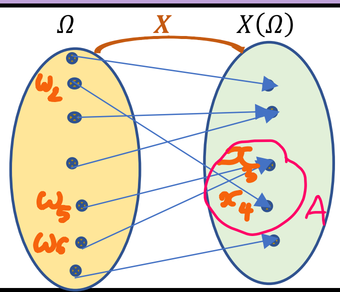
On notera désormais $x_k = X(\omega_{i_k})\ et\ X(\Omega)$= $\left\{\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{tous\ distincts}\right\}$ et on peut simplement prendre $E = \left\{\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_m}_{tous\ distincts}\right\}$.

3Définitions : Soit A une partie de $X(\Omega)$ i.e. A est un évènement de l'univers $X(\Omega)$.
Alors, l'évènement $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$ est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ et se lit l'évènement X appartient à A.
$(X \in A)$ est donc l'ensemble des antécédents par X des éléments de A.
et $P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\})$ est noté $P(X \in A)$: c 'est la probabilité que X réalise A .
Deux cas particuliers :

- Si $x \in E\ et\ A = \{x\}$ alors l'évènement $(X \in \{x\})$ est noté $\{X = x\}\ ou\ (X = x)$ et se lit « $X\ vaut\ x$ » et $(X = x)$ contient tous les antécédents de x par X.
  $P(X = x) \overset{def.}{\triangleq} P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\})$ =probabilité que X vaille x.
- Si $E = \mathbb{R}\ et\ A =]-\infty, x]$ alors $(X \in A) \overset{noté}{\triangleq} (X \leq x) \overset{def.}{\triangleq} \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$
  et $P(X \leq x) \overset{def.}{\triangleq} P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\})$ =probabilité que X soit inférieur à x.

$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$

4 NB : D'après le chapitre précédent, la probabilité d'un évènement A est la somme des probabilités des évènements élémentaires dont la réunion est A .
Donc $\forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ tq\ X(\omega) = x}} P(\omega)$ et $\forall A \subset X(\Omega),\ P(X \in A) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ tq\ X(\omega) \in A}} P(\omega)$



$P(X = x_3) = P(\omega_2) + P(\omega_5)$

$P(X = x_4) = P(\omega_6)$

$P(X \in A) = P(\omega_2) + P(\omega_5) + P(\omega_6)$

5 Proposition-Définition : L'application P_X: $\begin{pmatrix} \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,1] \\ A \to P(X \in A) \end{pmatrix}$ est une probabilité sur l'univers $X(\Omega)$ **, appelée loi de probabilité de X .** $P_X(A)$ est donc la probabilité que la variable aléatoire X soit dans A (X réalise A).
On note $X \sim Y$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires sur un même univers et telles que : $P_X = P_Y$.

6 NB : P_X est entièrement définie par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$) $(=(P(X = x_i))_{i \in \{1,..,m\}})$.
Si toutes ces probabilités sont connues alors $\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), P_X(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$.
En particulier , $1 = P_X(X(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i)$ où $X(\Omega)$= $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.
On peut présenter la loi de probabilité par le tableau ci-contre :

Valeur de X	x_1	x_2	…	x_m
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_m

7 NB : Si on ne considère pas $E = X(\Omega), alors\ \forall x \in E \backslash X(\Omega), P(X = x) = 0$ et par conséquent$(P(X = x))_{x \in E}$ est égale à la distribution $(P(X = x_i))_{i \in \{1,..,m\}}$ à laquelle on a ajouté des zéros. P_X est donc aussi entièrement définie par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$.

2. Loi uniforme

8 **Définition** : Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ un ensemble fini et X une variable aléatoire à valeurs dans E. X suit la **loi uniforme** sur E lorsque P_X est la probabilité uniforme sur E ; autrement dit, lorsque chaque valeur possible $x_1, x_2, \dots, x_m$ a la même probabilité d'être atteinte i.e. $\forall i \in \{1, .., m\}, P(X = x_i) = \frac{1}{m}$. On note $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, x_2, \dots, x_m\})$.

9 **Exemple :** Dans une urne contenant n boules identiques au toucher numérotées de 1 à n. Tirons au hasard une boule . Notons X le chiffre sur cette boule . On définit ainsi une variable aléatoire et $\forall i \in \{1, \dots, n\}, P(X = i) = \frac{1}{n}$. Idem avec le lancer d'un dé non pipé .

3. Loi de Bernoulli

10 **Définition** : La **loi de Bernoulli** de paramètre p réel tel que : $p \in]0,1[$ est la loi d'une variable aléatoire qui ne prend que les valeurs $x_1 = 0$ ou $x_2 = 1$ telle que $P(X = 1) = p$ appelée **probabilité de succès** .
On a alors $P(X = 0) = 1 - p = q$ appelée **probabilité d'échec** . On note $X \sim \mathcal{B}(p)$

11 **NB :** Cette loi est associée à une épreuve n'ayant que deux issues telle que le lancer d'une pièce de monnaie par exemple : X prend la valeur 1 si on obtient Pile et 0 si l'on obtient Face . Si p est la probabilité d'obtenir pile alors X suit alors la loi de Bernoulli de paramètre p. Si la pièce est bien (non pipée), $p = \frac{1}{2}$.

4. Loi binomiale

12 **Définition** : La **loi de Binomiale** de paramètres n et p tel que : $n \in \mathbb{N}^*$et $p \in]0,1[$ est la loi d'une variable aléatoire qui prend les valeurs entières comprises entre 0 et n et telle que :
$\forall k \in \{0, .., n\}, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

13 On vérifie que $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$ et par conséquent $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \in [0,1]$.
Ainsi, cette probabilité existe et est unique (Cf théo. 8 chapitre précédent)!! Pour $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli .

14 **Prop :** Cette loi binomiale apparait lorsque l'on répète n fois une même épreuve n'ayant que deux issues , dans les mêmes conditions et de manières indépendantes. L'évènement « succès » se réalise avec une probabilité $p \in]0,1[$. Alors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès au bout de n épreuves suit la loi binomiale de paramètres n et p .

15 **Exemple :** Une urne contient n boules dont v vertes . On tire b boules avec remise . On range les résultats dans un b-uplet : au $i^{ème}$ tirage , la $i^{ème}$ coordonnée du b-uplet prend la valeur 1 si la boule est verte et 0 si la boule est blanche. On définit alors X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes tirées sur les b tirages . X suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(b, \frac{v}{n})$.

5. Couple de variables aléatoires

16 **Déf** : Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire $Z = (X, Y)$ telle que X et Y sont deux variables aléatoires . Par définition, la loi conjointe de X et Y est la loi de Z.

17 Notons $E = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $F = Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ l'ensemble des valeurs prises par X et Y.
Alors $Z(\Omega) = E \times F$ et la loi conjointe de X et Y est entièrement déterminée par la donnée des $n \times p$ réels :
$P(Z = (x_i, y_j)) = P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) \overset{notée}{\triangleq} P(X = x_i, Y = y_j) \overset{notée}{\triangleq} p_{ij}$ tq $\begin{cases} i \in [\![1, n]\!] \\ j \in [\![1, p]\!] \end{cases}$.

18 **Théorème** : A la loi conjointe de X et Y sont associées deux lois dites marginales correspondantes aux lois de X et de Y définies par les distributions de probabilités suivantes : $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$,
$P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{p} P(X = x_i, Y = y_k) = \sum_{k=1}^{p} p_{ik}$ et $P(Y = y_j) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k, Y = y_j). = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}$

19 **Conséquence** : Dès que je connais la loi conjointe de deux variables aléatoires, je connais les lois de ces 2 variables aléatoires.

20 **Rque :** A la loi conjointe de X et Y sont associées des lois conditionnelles : la loi de X sachant que $Y = y_j$fixé ou encore la loi de Y sachant que $X = x_i$ fixé. $\forall i \in [\![1, n]\!], P(X = x_i | Y = y_j) = P_{[Y=y_j]}(X = x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}$.
Et $\forall j \in [\![1, p]\!], P_{[X=x_i]}(y = y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{p} p_{ij}}$.

21 **Exercice :** Soit X et Y deux variables aléatoires . Le couple (X, Y) des variables aléatoires prend les valeurs (i, j) avec les probabilités $p_{ij} = P((X = i) \cap (Y = j))$définies dans le tableau ci-dessous :

X \ Y	0	1	2	3
1	0.1= $p_{1,0}$	0.2	0.1	0.1
2	0 .1	0	0	0.1
3	0.1	0	0.2	0

a) Vérifier que ces données permettent de définir une probabilité sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
b) Déterminer les lois de X et de Y.

c) Former la table de « Y sachant que $X=1$ » $(\textit{notée } Y_{[X=1]})$.

d) Déterminer la loi de $U = XY$.

e) Déterminer la loi de $V = \min(X,Y)$.

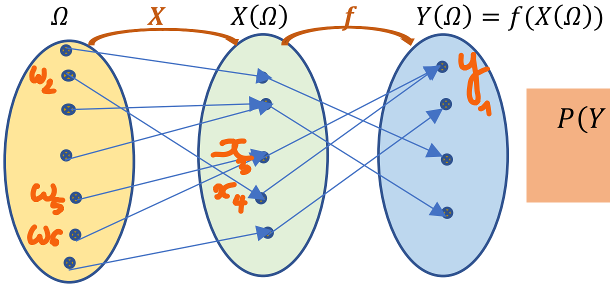
f) Former la table de (U,V) la loi conjointe de U et V .

6. Image d'une variable aléatoire

22 Théorème : Soit X variable aléatoire sur Ω et f une application définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F.
On pose $Y = f(X) = f \circ X$. Alors, Y est la variable aléatoire sur (Ω, P) telle que :

$$\forall y \in f(X(\Omega)), P(Y=y) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ tel\ f(x)=y}} P(X=x) \quad et \quad \forall A \subset f(X(\Omega)), P(Y\in A) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ tel\ f(x)\in A}} P(X=x).$$

23 NB : Si $X_1 et\ X_2$ sont deux variables aléatoires telles que $X_1 \sim X_2$ et f une application définie sur D à valeurs dans un ensemble F telle que , $X_1(\Omega) \subset D\ et\ X_2(\Omega) \subset D$ alors $f(X_1) \sim f(X_2)$.



$$P(Y=y) = P(X=x_3) + P(X=x_4)$$
$$= P(\omega_2) + P(\omega_5) + P(\omega_6)$$

II Espérance d'une variable aléatoire complexe.

1. Définitions

24 Définition : Soit X une variable aléatoire complexe sur Ω.
L'espérance de X est le complexe $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$.

25 Autres expressions : Soit X une variable aléatoire complexe sur Ω.
1) Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \mathbb{C}$, alors $E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P(X=x_i)$
2) $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega)$.

26 Interprétation: L'espérance de X est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs probabilités respectives .

2. Exemples.

27 Cas particuliers :
1. Si X est constante égale à x alors $E(X) = x$.
2. Si X suit la loi uniforme alors $E(X) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$.
3. Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors $E(X) = p$.
4. Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors $E(X) = np$.

3. Propriétés.

28 Proposition : Propriétés de l'espérance Soit X une variable aléatoire complexe sur Ω.
1) Pour tous complexes a et b, $E(aX+b) = aE(X) + b$.
2) Si $X\ réelle\ et\ positive$, alors $E(X) \geq 0$.
3) Si X et Y sont deux variables aléatoires complexes, alors pour tous complexes a et b , $E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$.
4) Si X et Y sont réelles telles que $X \geq Y$, alors $E(X) \geq E(Y)$.

29 Théorème du transfert
Si X est une variable aléatoire sur Ω et f est une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$ alors $E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$

30Exemple : $E(X^2) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 P(X=x_i) = \sum_{x\in X(\Omega)} x^2 P(X=x)$

31Théorème d' Inégalité de Markov
Si X est réelles et à valeurs positives alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X \geq t) \leq \frac{E(X^n)}{t^n}$ et en particulier , $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$.

III Variance et covariance

1. Définition et règles de calcul .

32 Définition : Soit X une variable aléatoire **réelle.** La variance de X est définie par $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et l'écart type par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

La variance et l'écart mesurent la dispersion des valeurs de X autour de la moyenne pondérée $E(X)$.
X , $E(X)$ et $\sigma(X)$ ont les mêmes unités .

33 Règles de calcul : Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

1) $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

2) $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, V(aX+b) = a^2V(X)\ et\ \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

34Définition : **Covariance de deux variables aléatoires réelles**

Soit X et Y deux variables aléatoires **réelles** sur Ω.

On appelle covariance de X et Y le réel : $cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
On dit que X et Y sont décorrélées lorsque $cov(X,Y) = 0$.

35 Théorème $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$

2. Exemples

36Proposition : Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p alors $V(X) = p(1-p)$.
Si X suit la loi binomiale $B(n,p)$alors $V(X) = np(1-p)$.

37Définition : X est dite centrée lorsque $E(X) = 0$ et réduite lorsque $\sigma(X) = 1$.

38Proposition : Si X est d'écart – type non nul alors $Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée réduite .

3. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

39Théorème d' Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X est réelle et d'écart – type non nul alors $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \boldsymbol{P}\left(|X - E(X)| \geq t\sigma(X)\right) \leq \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t^2}}$ ce qui signifie que la probabilité que X soit à une distance de E(X) supérieure à $t\sigma(X)$ est inférieure à $\frac{1}{t^2}$.

40 Autres versions équivalence : Si X est réelle et d'écart – type non nul alors l'inégalité s'écrit aussi :

1. $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $P(X \in]E(X) - t\sigma(X), E(X) + t\sigma(X)[) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \boldsymbol{P}(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\boldsymbol{\sigma(X)^2}}{\boldsymbol{\varepsilon^2}}$ en posant $\varepsilon = t\sigma(X)$.

41Exemple : $P\left(|X - E(X)| \geq 3\sigma(X)\right) \leq \frac{1}{9} \approx 11\%$; autrement dit, la probabilité que X prenne des valeurs dans $]E(X) - 3\sigma(X), E(X) + 3\sigma(X)[$ est supérieur à 89% .

V Variables aléatoires indépendantes

1. Cas de deux variables

42Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P) . On dit que X et Y sont indépendantes lorsque : $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega)$, $P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = P(X = x) \times P(Y = y)$ ie.
lorsque $\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega)$, les évènements $P(X = x)$ et $P(Y = y)$ sont indépendants.

43Proposition : Si X et Y sont indépendantes alors
$\forall A \in \mathcal{P}(X(\Omega)), \forall B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, $P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$.

44Proposition : Espérance d'un produit , variance d'une somme de variables indépendantes
Si X et Y sont réelles et indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

45Proposition : Images de deux variables aléatoires indépendantes
Si X et Y sont indépendantes et f et g deux applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes .

2. Cas de n variables

46Définition : Soit $X_1, X_2, .., X_n$ des variables aléatoires sur (Ω, P) .
1) $X_1, X_2, .., X_n$ sont deux à deux indépendantes lorsque pour tout couple (i,j) tel que $\neq j$, X_i et X_j sont indépendantes .
2) $X_1, X_2, .., X_n$ sont mutuellement indépendantes lorsque :
$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ **,** $P(\cap_{k=1}^{n}\{X_k = x_k\}) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$.

47Proposition : une généralisation (admise)
SI $X_1, X_2, .., X_n$ sont mutuellement indépendantes alors pour toutes parties A_k de $X_k(\Omega)$, on a :

$$P\big((X_1, X_2, \dots, X_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n\big) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in A_k)$$

48Proposition : variance (admis)
SI $X_1, X_2, .., X_n$ sont réelles et mutuellement indépendantes alors $V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

49Exemple important : Si $X_1, X_2, .., X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre p alors $X = X_1 + X_2 + .. + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p et donc $V(X) = np(1-p)$.