Corrigé TD 26
Variables aléatoires sur un univers fini .

Ex 0 Fonction indicatrice:

1. Soit E un ensemble. Pour tout sous-ensemble A de E, on définit $\mathbb{I}_A$ la fonction indicatrice de A par: $\forall x \in E, \mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$.

Soit A et B deux sous-ensembles de E. De quels ensembles, les fonctions suivantes sont-elles les fonctions indicatrices ?
$\min(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$, $\max(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$, $\mathbb{I}_A\mathbb{I}_B$, $\mathbb{I}_E - \mathbb{I}_A$, $\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A\mathbb{I}_B$, $(\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B)^2$

2. Soit (Ω, P)un espace probabilisé fini. Montrer que $\forall A \subset \Omega, \mathbb{I}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$ et $E(\mathbb{I}_A) = P(A)$.

Ex 1 Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers probébilisé (Ω, P) fini

La fonction de répartition de X est la fonction $F_X: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to [0,1] \\ t \to P(X \le t) \end{pmatrix}$.

Démontrer que F_X est en escalier, croissante et $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Et, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ alors $P(X = x_1) = F_X(x_{i1})$ et $\forall i \in \{2, \dots, m\}, P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Alors $\forall t \in [x_i, x_{i+1}[, P(X \le t) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_i) = c_i$. Donc $F_X$est constante sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}[$.

De plus, $\forall t \in]-\infty, x_1[, F_X(t) = P(X \le t < x_1) = P(\emptyset) = 0$ et $\forall t \in]x_m, +\infty[, F_X(t) = P(\Omega) = 1$.

Donc F_X est en escalier et $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

De plus, si $i \le n-1$, alors $\underbrace{1}_{\substack{=F_X(t) \\ si\ t > x_m}} \ge \sum_{k=1}^{m} P(X = x_k) \ge \sum_{k=1}^{i+1} P(X = x_k) = \underbrace{c_{i+1}}_{\substack{=F_X(t) \\ si\ t \le x_{i+1}}} = \underbrace{c_i}_{\substack{=F_X(t) \\ si\ t \le x_i}} + P(X = x_{i+1}) \ge c_i \ge \underbrace{0}_{\substack{=F_X(t) \\ si\ t < x_1}}$.

Donc $F_X$est croissante.

Enfin, $P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{i} P(X = x_k) \sum_{k=1}^{i-1} P(X = x_k) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

Applications :

A. On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	-3	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$

Déterminer les lois de : $Y = |X + 1|$ et $Z = \min(X; 0)$ et représenter les fonctions de répartition de Y et Z et calculer les espérances et variances des lois Y et Z . Y et Z sont-elles décorrélées?

$X(\Omega) = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. Donc $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et $Z(\Omega) = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0\}$.

$P(Y = 0) = P(X = -1) = \frac{2}{15}$

$P(Y = 1) = P(X = 0) + P(X = -2) = \frac{2}{15}$

$P(Y = 2) = P(X = -3) + P(X = 1) = \frac{7}{15}$

$P(Y = 3) = P(X = 2) = \frac{4}{15}$

$P(Z = -3) = P(X = -3) = \frac{3}{15}$

$P(Z = -2) = P(X = -2) = \frac{1}{15}$

$P(Z = -1) = P(X = -1) = \frac{2}{15}$

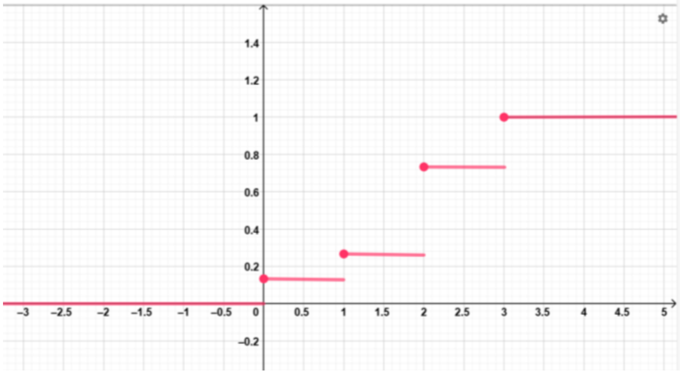
$P(Z = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 1) = \frac{9}{15}$.

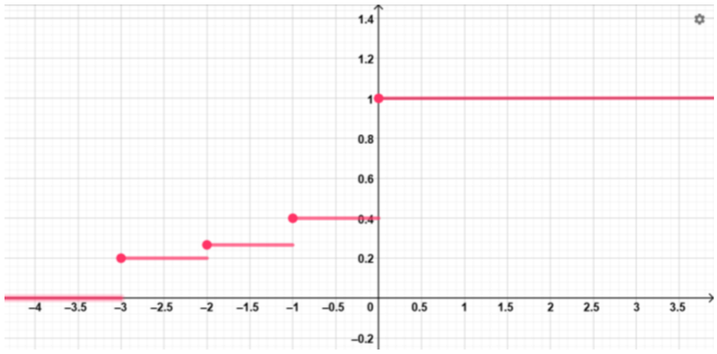
y_i	0	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$
$E(Y) = 0 \times \frac{2}{15} + 1 \times \frac{2}{15} + 2 \times \frac{7}{15} + 3 \times \frac{4}{15} = \frac{28}{15}$.				
$V(Y) = 0 \times \frac{2}{15} + 1^2 \times \frac{2}{15} + 2^2 \times \frac{7}{15} + 3^2 \times \frac{4}{15} - \left(\frac{28}{15}\right)^2 = \frac{206}{225}$.				

z_i	-3	-2	-1	0
$P(Z = z_i)$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{9}{15}$
$E(Z) = -3 \times \frac{3}{15} - 2 \times \frac{1}{15} - 1 \times \frac{2}{15} + 0 \times \frac{9}{15} = \frac{-14}{15}$.				
$V(Y) = 9 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{2}{15} + 0 \times \frac{9}{15} - \left(\frac{-14}{15}\right)^2 = \frac{299}{225}$.				

t	$t < 0$	$0 \le t < 1$	$1 \le t < 2$	$2 \le t < 3$	$3 \le t$
$F_Y(t)$	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{15}$	1

t	$t < -3$	$-3 \le t < -2$	$-2 \le t < -1$	$-1 \le t < 0$	$0 \le t$
$F_Z(t)$	0	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	1





$Y \text{ et } Z \text{ sont décorrélées } \Leftrightarrow cov(Y,Z) = 0 \overset{car\ cov(Y,Z)=E(YZ)-E(Y)E(Z)}{\Longleftrightarrow} E(YZ) = E(Y)E(Z).$

$E(YZ) = ??$ Déterminons la loi de $W = YZ$:

$P(W = 0) = P((Y = 0) \cup (Z = 0) = P(Y = 0) + P(Z = 0) - P\big((Y = 0) \cap (Z = 0)\big)$

$$= P(Y = 0) + P(Z = 0) - \underbrace{P\left(\underbrace{(Y = 0) \cap (Z = 0)}_{=\emptyset}\right)}_{=0} = \frac{11}{15}.$$

$P(W = -1) = P\big((Y = 1) \cap (Z = -1)\big) \underbrace{=}_{\substack{car\ (Y=1)\cap(Z=-1))=\emptyset \\ puisque\ (Y=1)=(X=0)\cup(X=-2) \\ et\ (Z=-1)=(X=-1)}} 0.$

$P(W = -2) = P\big((Y = 1) \cap (Z = -2)\big) + P\big((Y = 2) \cap (Z = -1)\big) = P(X = -2) = \frac{1}{15}.$

$P(W = -3) = P\big((Y = 1) \cap (Z = -3)\big) + P\big((Y = 3) \cap (Z = -1)\big) = 0$

$P(W = -4) = P\big((Y = 2) \cap (Z = -2)\big) = 0$

$P(W = -6) = P\big((Y = 2) \cap (Z = -3)\big) + P\big((Y = 3) \cap (Z = -2)\big) = P(X = -3) = \frac{3}{15}.$

$P(W = -9) = P\big((Y = 3) \cap (Z = -3)\big) = 0$

w_i	0	-1	-2	-3	-4	-6	-9	
$P(YZ = w_i)$	$\frac{11}{15}$	0	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{3}{15}$	0	
$E(YZ) = -2 \times \frac{1}{15} - 6 \times \frac{3}{15} = -\frac{20}{15} = -\frac{4}{3}.$								

$E(Y)E(Z) = \frac{-14}{15} \times \frac{28}{15} \neq -\frac{4}{3} = E(YZ)$. Donc, Y et Z ne sont pas décorrélées.

B. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On répète n fois le lancer d'un dé non pipé à 6 faces. On note X_k le numéro obtenu au $k^{\text{ième}}$ lancer. On pose $M_n = \max(X_1, X_2, .., X_n)$ et $m_n = \min(X_1, X_2, .., X_n)$.

a) Donner la loi de X_k et sa fonction de répartition.
b) Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n.
c) Soit x un réel fixé. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$.
d) Montrer que $sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_n(x) - \mathbb{1}_{[6,+\infty[}(x)\right| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Qu'en déduit-on ?
e) Déterminer la fonction de répartition de m_n.

a) $X_k \sim U(1; 2; 3; 4; 5; 6)$.

t	$t < 1$	$1 \leq t < 2$	$2 \leq t < 3$	$3 \leq t < 4$	$4 \leq t < 5$	$5 \leq t < 6$	$6 \leq t$
$F_Y(t)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1

b) $\Omega = [\![1,6]\!]^n \ et\ M_n = \max(X_1, X_2, .., X_n)$. Donc $M_n(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Si $t < 1,\ alors\ F_{M_n}(t) = P(\forall i, X_i \leq t < 1) = 0$

Si $1 \leq t < 2,\ alors\ F_{M_n}(t) = P(\forall i, X_i = 1) = P((1; 1; ..; 1)) = \left(\frac{1}{6}\right)^n.$

Si $2 \leq t < 3,\ alors\ F_{M_n}(t) = P(\forall i, X_i \leq 2) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq 2) = (P(X_1 \leq 2))^n = \frac{1}{3^n}$

Si $3 \leq t < 4,\ alors\ F_{M_n}(t) = P(\forall i, X_i \leq 3) = \frac{1}{2^n}$

Si $4 \leq t < 5,\ alors\ F_{M_n}(t) = P(\forall i, X_i \leq 4) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Si $5 \leq t < 6,\ alors\ F_{M_n}(t) = P(\forall i, X_i \leq 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Si $6 \leq t,\ alors\ F_{M_n}(t) = 1$

c) Soit x un réel fixé. $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0\ si\ x < 6 \\ 1\ si\ x \geq 6 \end{cases}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \left|F_n(x) - \mathbb{1}_{[6,+\infty[}(x)\right| = \begin{cases} 0\ si\ x < 1 \\ \left(\frac{1}{6}\right)^n\ si\ 1 \leq x < 2 \\ \left(\frac{2}{6}\right)^n\ si\ 2 \leq x < 3 \\ \left(\frac{3}{6}\right)^n\ si\ 3 \leq x < 4 \\ \left(\frac{4}{6}\right)^n\ si\ 4 \leq x < 5 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^n\ si\ 5 \leq x < 6 \\ 0\ si\ 6 \leq x \end{cases} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n.)$

Donc $sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_n(x) - \mathbb{1}_{[6,+\infty[}(x)\right| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F_n(x) - \mathbb{1}_{[6,+\infty[}(x)\right| = 0$.

e) $F_{m_n}(t) = P(\exists i, X_i \leq t) = 1 - P(\forall i, X_i > t) = 1 - P(\forall i, X_i > t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > t) = 1 - [P(X_1 > t)]^n$

$$F_{m_n}(t) = 1 - [1 - P(X_1 < t)]^n = 1 - \left(1 - F_{M_n}(t)\right)^n.$$

Ex 2 Des lois conjointes :

1) Une urne contient 4 boules indiscernables numérotées de 0 à 3 . On tire successivement et sans remise deux boules et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus .

   a. Déterminer la loi de X_1 et $X_{2[X_1=0]}$.

   b. On pose $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

a. $X_1 \sim \mathcal{U}(1;2;3;4)$.

$X_2(\Omega) = \{0;1;2;3\}$. $P_{[X_1=0]}(X_2 = k) = \begin{cases} 0\ si\ k = 0 \\ \frac{1}{3}\ si\ k \neq 0 \end{cases}$.

b. On pose $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = (X, Y)$.

Comme $X_1 \neq X_2$, $si\ j \leq i$ alors $P\big((X,Y) = (i,j)\big) = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![0,3]\!]^2\ tel\ que\ i < j$.

$P\big((X,Y) = (i,j)\big) = P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = P\big((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\big) + P\big((X_1 = j) \cap (X_2 = i)\big)$

$= P_{(X_1=i)}\big((X_2 = j)\big) \times P(X_1 = i) + P_{(X_1=j)}\big((X_2 = 1)\big) \times P(X_1 = j)$

$P\big((X,Y) = (i,j)\big) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

2) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules .On note X et Y respectivement le plus petit et le plus grand numéro . Déterminer la loi de (X, Y) quand les tirages se font avec remise puis sans remise .

<u>Avec remise</u> : On note X_1 et X_2 les numéros obtenus

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ tel\ que\ i > j$. $P\big((X,Y) = (i,j)\big) = 0$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ tel\ que\ i < j$.

$P\big((X,Y) = (i,j)\big) = P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = P\big((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\big) + P\big((X_1 = j) \cap (X_2 = i)\big) = \frac{2}{n^2}$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $P\big((X,Y) = (i,i)\big) = P\big((X = i) \cap (Y = i)\big) = P\big((X_1 = i) \cap (X_2 = i)\big) = \frac{1}{n}$.

<u>Sans remise</u> : On note X_1 et X_2 les numéros obtenus

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ tel\ que\ i \geq j$. $P\big((X,Y) = (i,j)\big) = 0$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ tel\ que\ i < j$.

$P\big((X,Y) = (i,j)\big) = P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = P\big((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\big) + P\big((X_1 = j) \cap (X_2 = i)\big)$

$= P_{(X_1=i)}\big((X_2 = j)\big)P(X_1 = i) + P_{(X_1=j)}\big((X_2 = i)\big)P(X_1 = j) = \frac{2}{n(n-1)}$.

3) Une urne contient n boules blanches et n boules noires . On effectue des tirages sans remise et on désigne par X le nombre de tirages nécessaires pour tirer toutes les boules blanches . Déterminer la loi de X . Calculer ensuite $E(X)$ **.**

Ω est alors l'ensemble des $2n$-uplets de composantes remplies de n N et de n B.

Il y a équiprobabilité sur Ω et $card(\Omega) = \binom{2n}{n}$.

$X(\Omega) = [\![n; 2n]\!]$.

$\forall k \in [\![n; 2n]\!]$, $(X = k)$ est alors l'ensemble des $2n$-uplets de Ω dont n B sont rangés dans les k premières composantes.

Construire un élément de $(X = k)$, c'est :

1. Placer une boule blanche en $k^{\text{ième}}$ composante.
2. Je choisis où placer les $n - 1$ boules blanches restantes dans les $k - 1$ premières composantes. Les boules noires se placent alors dans les composantes restantes …… (il n'y a pas le choix).

Donc, $card(X=k) = \binom{k-1}{n-1}$. Par suite, $P(X=k) = \frac{card(X=k)}{card(\Omega)} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

$$E(X) = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} n\binom{k}{n} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=n}^{2n} \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \left[\binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1}\right]$$

$$E(X) = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)n}{n+1}.$$

3) On lance n fois une pièce équilibrée et on note X et Y les variables aléatoires respectivement égales au nombre de piles et au nombre de faces obtenus . Déterminer la loi de (X,Y). X et Y sont-elles indépendantes ?

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$. Tout d'abord, $X + Y = n$. Puis $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right) \sim Y$.

Si $i + j \neq n, alors\ P\big((X,Y) = (i,j)\big) = 0$.

Si $i + j = n, alors\ P\big((X,Y) = (i,j)\big) = P(X = i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}$.

4) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de même paramètre p définies sur même espace probabilisé fini . Déterminer la loi du couple $(X+Y, X-Y)$ .Les variables $X+Y, X-Y$ sont elles indépendantes ?

Ex 3 On dispose d'un dé à 6 faces truqué dont la probabilité d'apparition d'un chiffre est proportionnelle à ce chiffre. On lance ce dé et on note X le chiffre obtenu. Déterminer la loi de X et son espérance et sa variance.

Ex 4 On réalise 500 fois la même expérience dont la probabilité de succès est 0,6 et on suppose que toutes les expériences sont indépendantes. On désigne par X le nombre de succès obtenus.
Déterminer un minorant de $P(280 < X < 320)$.

$X \sim B\left(500, \frac{3}{5}\right)$. Donc $E(X) = \frac{3\times 500}{5} = 300\ et\ V(X) = 500\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = 120\ et\ \sigma(X) = 2\sqrt{30}$.

Donc $280 < X < 320 \Leftrightarrow -20 < X - E(X) < 20 \Leftrightarrow |X - E(X)| < 20 \Leftrightarrow |X - E(X)| < \frac{10}{\sqrt{30}}\sigma(X)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que $\forall t > 0, P\big(|X - E(X)| < t\sigma(X)\big) < 1 - \frac{1}{t^2}$.

Par conséquent, $P(280 < X < 320) = P\left(|X - E(X)| < \frac{10}{\sqrt{30}}\sigma(X)\right) < 1 - \frac{1}{\left(\frac{10}{\sqrt{30}}\right)^2} = 1 - \frac{30}{100} = \frac{7}{10}$.

Ex 5 Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre $n = 20$ et $p = 0{,}1$.

1) Calculer $P(X = 5),\ P(X \le 2),\ P(X < 4),\ P(X = 1{,}5),\ P(3 \le X \le 4)\ et\ \ P(2 < X \le 8)$.
2) Déterminer les valeurs de x telles que $P(X \ge x) \le 0{,}75$.
3) Calculer $P(X = 16)$ dans le cas où $p = 0{,}9$.

Ex 6 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie sur un espace probabilisé fini.

1) Justifier que : $P(X \ge 1) \le E(X)$.
2) Montrer en utilisant Cauchy-Schwaz, que : $\frac{E(X)^2}{E(X^2)} \le P(X \ge 1)$.
1) En déduire un encadrement $P(X = 0)$.

Ex 7

1) Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1,20]\!]$. Déterminer la loi de $\lfloor\sqrt{X}\rfloor$.($\overline{(X=1)}$
2) Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1,6n]\!]$. Déterminer la loi de $cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.

Ex 8 Une urne contient N boules dont n noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire .

1) On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages effectués pour enfin obtenir cette boule noire. Quelle est la loi de X ?
2) On note X_p la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages effectués pour sortir p boules noires exactement. Quelle est la loi de X_p ?
3) Calculer $E(X)\ l'aide\ de\ P_{X_2}$.

1) $X(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]$.

$$P(X=k) = P\left(\overline{(X=1)} \cap \overline{(X=2)} \cap \dots \cap \overline{(X=k-1)} \cap (X=k)\right)$$
$$= P\big(\overline{(X=1)}\big) \times P_{\overline{(X=1)}}\big(\overline{(X=2)}\big) \times \dots \times P_{\overline{(X=1)}\cap\overline{(X=2)}\cap\dots\cap\overline{(X=k-1)}}(X=k)$$

$$= \frac{N-n}{N} \times \frac{N-n-1}{N-1} \times \dots \times \frac{N-n-(k-2)}{N-(k-2)} \times \frac{n}{N-(k-1)} = \frac{n(N-n)!\,(N-k)!}{N!\,(N-n-k+1)!} = \frac{n!\,(N-n)!\,(N-k)!}{N!\,(n-1)!\,\big(N-k-(n-1)\big)!}$$

Ainsi, $P(X=k) = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

2) Ω =ensemble des N-uplets avec n composantes noires et $N-n$ composantes autres.

$X_p(\Omega) = [\![p, N-n+p]\!]$. Soit $k \in [\![p, N-n+p]\!]$.

$(X_p = k)$ =ensemble des N-uplets de Ω dont la $k$ième composante est noire et les $k-1$ composantes précédentes sont remplies de $p-1$ noires uniquement.

Il y équiprobabilité sur Ω. Donc, $P(X_p = k) = \frac{card((X_p=k))}{card\,\Omega}$.

$card\,\Omega = \binom{N}{n}$ et $card\big((X_p = k)\big) = \binom{k-1}{p-1}\binom{N-k}{n-p}$. Donc, $P(X_p = k) = \frac{\binom{k-1}{p-1}\binom{N-k}{n-p}}{\binom{N}{n}}$.

Or, $\forall k \in [\![2, N-n+2]\!]$, $P(X_2 = k) = \frac{(k-1)\binom{N-k}{n-2}}{\binom{N}{n}}$ *et* par suite, $\sum_{k=2}^{N-n+2} \frac{(k-1)\binom{N-k}{n-2}}{\binom{N}{n}} = 1$.

Donc, $\sum_{k=2}^{N-n+2} (k-1)\binom{N-k}{n-2} = \binom{N}{n}$ puis $\sum_{k=1}^{N-n+1} j \binom{N-(j+1)}{n-2} = \binom{N}{n}$. Ainsi, $A(n,N) = \sum_{k=1}^{N-n+1} j \binom{(N-1)-j}{n-2} = \binom{N}{n}$

3) $E(X) = \sum_{k=1}^{N-n+1} k \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{N-n+1} k \binom{N-k}{n-1} = \frac{1}{\binom{N}{n}} A(n+1, N+1) = \frac{\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} = \frac{N+1}{n+1}$.

Ex 9 Lors d'un examen, on vous demande de tirer trois sujets que vous aurez à traiter dans une urne en contenant 10. Parmi ces 10 sujets, il y en a trois que vous ne connaissez pas. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de sujets qui vous seront inconnus à l'issue du tirage. Déterminer la loi de X et son espérance.

Ex 10 1) On dispose d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée qu'on lance successivement n fois . On appelle X le nombre de fois que le côté face apparaît. On fait afficher X sur un compteur. Déterminer la loi de X.

2)Malheureusement le compteur est détraqué : si X est non nul alors le compteur affiche la valeur de X mais si X est nul alors le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 *et* n . On appelle Y le nombre affiché sur le compteur . Déterminer $Y(\Omega)$. Décrire la loi de Y puis calculer $E(Y)$.

Ex 11 Soit X , Y et Z trois variables aléatoires d'univers $\Omega = [\![1;n]\!]$ et définies par :$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$

Et $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $P_{X=i}(Y=j) = \begin{cases} \frac{1}{i} & si\ j \in [\![1,i]\!] \\ 0\ sinon \end{cases}$ et $P_{Y=i}(Z=j) = \begin{cases} \frac{1}{i} & si\ j \in [\![1,i]\!] \\ 0\ sinon \end{cases}$.

Déterminer les lois de Y et Z . Puis calculer $E(Y)$ et $E(Z)$.

Ex 12 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Calculer $P(X+Y=n)$ puis $P(X=Y)$.

Ex 13 On dispose de n boites numérotées de 1 à n . Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la boite k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boite puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y celui de la boule .

1) Déterminer la loi du couple (X, Y) (loi conjointe de X et Y) .
2) Calculer $P(X=Y)$.
3) Déterminer la loi de Y puis calculer $E(Y)$. Y *et* X sont-elles décorrélées?

Ex 14 Une proportion p de la population d'une ville est atteinte par un virus contagieux. Si une personne est en contact avec une personne contaminée, il y a deux « chances » sur trois qu'elle soit contaminée.

Un représentant de commerce en pleine forme décide de rendre visite à n habitants choisis au hasard .

1) Soit N la variable aléatoire égale au nombre de malades rencontrés par le représentant. Quelle est la loi de N ?
2) Quelle est la probabilité que le représentant soit contaminé à l'issue de sa tournée ?

Ex 15 Un secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n personnes. Ces appels sont indépendants les uns des autres et pour chaque appel la probabilité d'obtenir un correspondant est de $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$ et X est la variable aléatoire comptant le nombre de correspondants obtenus.

1) Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$.
2) Après ses n appels, le secrétaire rappelle les $n-k$ correspondants qui n'ont pas répondu la première fois . Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de correspondants obtenus lors de cette deuxième série d'appels .
   On note $Z = X + Y$.
   a) Calculer $P_{X=k}(Y=l)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et $l \in [\![0,k]\!]$.

b) Déterminer la loi de Z et $E(Z)$.

1) $X \sim B(n,p)$ i.e. $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Alors, $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

2) a)Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et $l \in [\![0,k]\!]$. $P_{(X=k)}(Y=l) = \binom{n-k}{l} p^l q^{n-k-l}$

b) $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$. $P(Z=i) = \sum_{k=0}^{n} P_{(X=k)}(Z=i) \times P(X=k) = \sum_{k=0}^{i} P_{(X=k)}(Y=i-k) \times P(X=k)$

$$= \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k} p^{i-k} q^{n-k-(i-k)} \times \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k}\binom{n}{k} p^i q^{2n-i-k} = p^i q^{2n-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{n-k}{i-k}\binom{n}{k} q^{-k}$$

$$\binom{n-k}{i-k}\binom{n}{k} = \frac{(n-k)!}{(i-k)!\,(n-i)!} \times \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(n-i)!\,i!}\,\frac{i!}{k!\,(i-k)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

. $P(Z=i) = p^i q^{2n-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{k} q^{-k} = \binom{n}{i} p^i q^{2n-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}\left(\frac{1}{q}\right)^k = \binom{n}{i} p^i q^{2n-i}\left(1+\frac{1}{q}\right)^i = \binom{n}{i} p^i q^{2(n-i)} (q+1)^i$.

$E(Z) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i q^{2(n-i)} (q+1)^i$

$$= q^{2n} \sum_{i=1}^{n} i \binom{n}{i} p^i \left(\frac{q+1}{q^2}\right)^i = q^{2n} p \frac{q+1}{q^2} \sum_{i=1}^{n} n \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} \left(\frac{q+1}{q^2}\right)^{i-1}$$

$$= nq^{2n-2} p(q+1) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(p\frac{q+1}{q^2}\right)^k$$

$$= nq^{2n-2} p(q+1) \left(1 + \frac{p(q+1)}{q^2}\right)^{n-1}$$

Ex 16 On lance deux dés équilibrés l'un est rouge l'autre est noir. On note R le numéro obtenu par le dé rouge et N le celui du noir. On note $X = \max(R,N)$ et $Y = \min(R,N)$.

1. Déterminer la loi de R, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. Exprimer $X+Y$ en fonction de R et N. En déduire l'espérance et la variance de $X+Y$.
4. Calculer $E(XY)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Ex 17 Une boite contient trois jetons numérotées 1, 2 et 3. Un joueur A tire un jeton au hasard, note son numéro p et le remet dans l'urne. Un joueur B tire à son tour un jeton, note son numéro q et le replace dans la boite. Si $p+q$ est pair alors A reçoit a euros de B, sinon B reçoit b euros de A.

1. Quelle la probabilité que A gagne ?
2. A quelle condition sur a et b le jeu est -il équitable ?
3. A et B jouent trois parties équitables. On note X le gain algébrique de A. Calculer $P(X \geq 0)$ et $E(X)$.
4. A et B jouent 10 parties équitables. On note Y le nombre de parties gagnées par A. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Ex 18 Graphe aléatoire

Les graphes étudiés ici sont à la fois non orientés et sans boucle. Graphiquement, cela veut dire que leurs arêtes sont des lignes et non des flèches et qu'une arête ne joint jamais un sommet à lui-même.

n désigne un entier naturel non nul et on note $\Gamma(n)$ l'ensemble des graphes dont les sommets sont les entiers $1,2,\ldots,n$.
Chaque arête d'un tel graphe est donc représentée par un ensemble $\{i,j\}$ tel que $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $i<j$.

1) Combien $\Gamma(n)$ contient-il de graphes ?

2) **Définition :** Soit G un graphe aléatoire et $p \in [0,1]$.

On notera $G(i,j)$ l'évènement « $\{i,j\}$ est une arête de G » pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$ tq $i<j$.
On dit que G suit la loi $\mathcal{G}(n,p)$ si $G \in \Gamma(n)$ et si les évènements $G(i,j)$, i et j décrivant $[\![1,n]\!]$ $avec$ $i<j$, sont indépendants et de même probabilité p.
Construire un graphe aléatoire G suivant la loi $\mathcal{G}(n,p)$ revient donc à décider, pour chaque $\{i,j\}$, si $\{i,j\}$ appartient à G (probabilité p) ou non (probabilité $1-p$) et ceci indépendamment d'une paire à l'autre.
Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels de $]0,1[$.Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\lambda_n = n^2 p_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne finalement un graphe aléatoire G_n de loi $\mathcal{G}(n,p_n)$ et on note A_n le nombre d'arêtes de G_n.

a) Déterminer la loi de A_n.

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} P(A_n = 0)$ sous l'hypothèse que $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = 0$.

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} P(A_n = 0)$ sous l'hypothèse que $\lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty$.

d) Interpréter les résultats obtenus.