Fonctions de deux variables réelles.

1Dans tout le chapitre , on note O le point ou vecteur de $\mathbb{R}^2$de coordonnées $(0,0)$.
on munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme associée au produit scalaire canonique, dite norme euclidienne et définie par : $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.
La distance associée à cette norme est notée d et est définie par : $\forall\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \in (\mathbb{R}^2)^2, d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) =$
$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_{\square} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.
Cette norme euclidienne vérifie les propriétés de toute norme : $\forall(a,b) \in (\mathbb{R}^2)^2, \forall\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\|a\| \geq 0$,
- $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$.
- $\|a+b\| \overset{I.T}{\leq} \|a\| + \|b\|$

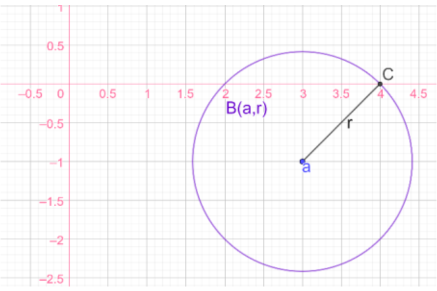
De plus, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq \|(x,y)\|$ et $|y| \leq \|(x,y)\|$.

2**Remarque** : il existe d'autres normes dans $\mathbb{R}^2$. Par exemple, $\|\square\|_1 : ((x,y) \mapsto |x|+|y|)$ et $\|\square\|_\infty : ((x,y) \mapsto \max(|x|,|y|))$ sont deux autres normes sur $\mathbb{R}^2$. Lorsque plusieurs normes interviennent dans un même énoncé, la norme euclidienne est alors notée $\|\square\|_2$.

I L'espace $\mathbb{R}^2$

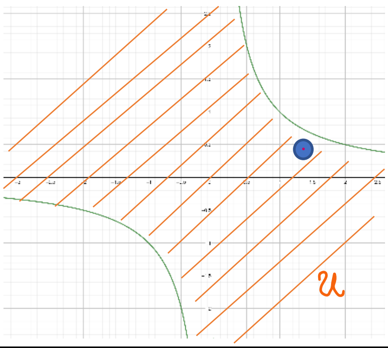
1. Boules et ouverts de $\mathbb{R}^2$

3**Définition** : Soit $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$.
La boule ouverte de centre a et de rayon r est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ noté $B(ar)$ défini par
$B(a,r) = \{u \in \mathbb{R}^2/d(u,a) < r\}. = \{u \in \mathbb{R}^2/\|u-a\| < r\} = \left\{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2/\sqrt{(u_1-a_1)^2+(u_2-a_2)^2} < r\right\}$.



4**Définition** : Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ lorsque $\forall a \in A, \exists r \in \mathbb{R}^{+*}/B(a,r) \subset A$. $B(a,r)$ est alors un voisinage de a dans A.

5**Illustration :** $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy < 1\}$ est un ouvert



6**Théorème** : Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

7**Définition** : Le bord d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des vecteurs u de $\mathbb{R}^2$ tel que : $u \notin U$ et $\forall r \in \mathbb{R}^{+*}, B(u,r) \cap U \neq \emptyset$.
Le bord de U est noté ∂U.

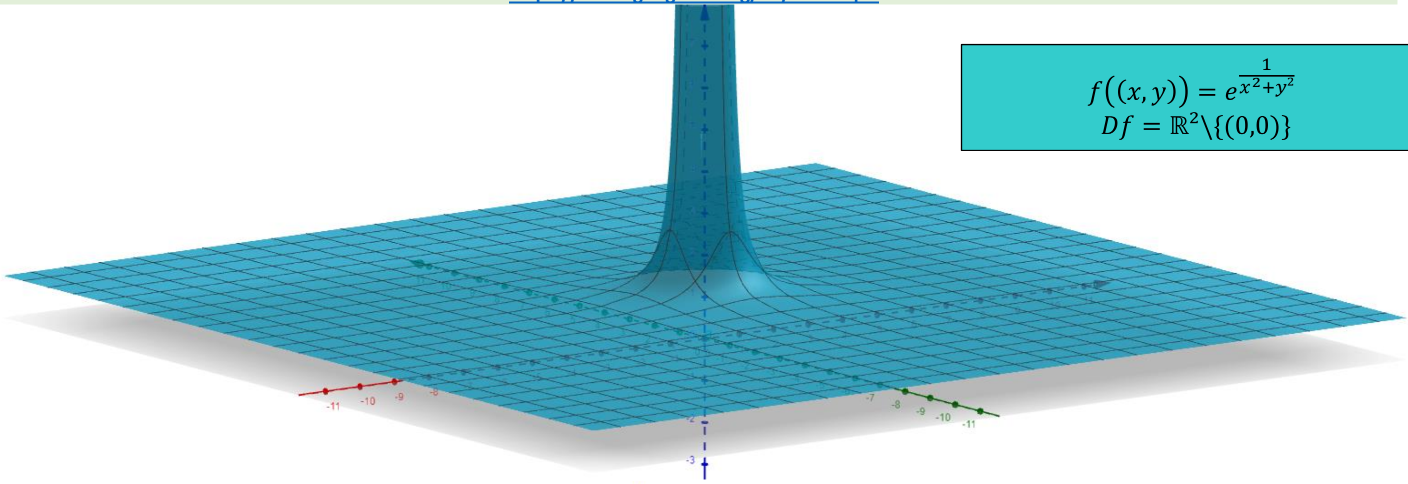
8**Exemples :**

1. Le bord d'une boule ouverte $B(a,r)$est le cercle de centre a et de rayon r.
2. Dans l'exemple précédent, le bord de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/xy < 1\}$ est la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

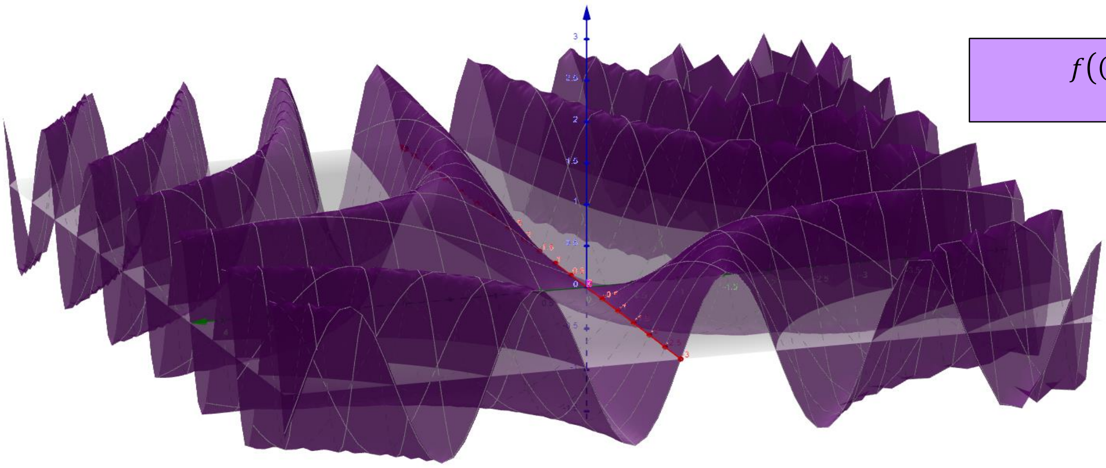
II Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Limite. Continuité.

1. Définition et représentation

9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $Df = \{u \in \mathbb{R}^2 / f(u)\ existe]\}$ est le domaine de définition de f.
Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $Gf = \{(x, y, z)/(x, y) \in Df\ et\ z = f((x, y))\}$; on dit que Gf a pour équation $z = f(x, y)$ et Gf est représenté dans $\mathbb{R}^3$ par une surface (ou nappe) comme illustrée ci-dessous :
https://www.geogebra.org/3d/rhsmuqsu



$$f\big((x,y)\big) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$$
$$Df = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$$



$$f\big((x,y)\big) = \sin(xy)$$
$$Df = \mathbb{R}^2$$

10 Définition : Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U , $a = (a_1, a_2) \in U$.
f admet un minimum local en a lorsqu'il existe une boule ouverte B centrée en a inclus dans U tq $\forall (x, y) \in B, f(x, y) \geq f(a)$.
f admet un minimum global en a lorsque $\forall (x, y) \in U, f(x, y) \geq f(a)$. Définition analogue avec maximum.

2. Limite

11 Définition : Soit f $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction définie sur un ouvert non vide U et $a = (a_1, a_2) \in U \cup \partial U\ et\ L \in \mathbb{R}$.
f tend vers L en a lorsque $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists r \in \mathbb{R}^{+*} / \forall (x, y) \in U, (\underbrace{\|(x, y) - a\| < r}_{(x,y)\in B(a,r)} \Rightarrow \underbrace{|f(x, y) - L| < \varepsilon}_{f(x,y)\in]L-\varepsilon, L+\varepsilon[}$.

12 Interprétation : f tend vers L en a signifie que $f(u)$ est aussi proche que je le souhaite de L à condition de prendre u suffisamment proche de a et ou encore que l'écart entre $f(u)$ et $f(a)$ diminue à mesure que la distance entre u et a diminue.

13 Théorème d'unicité de la limite : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U, $a = (a_1, a_2) \in U \cup \partial U\ et\ L, L'$ deux réels .
Si f tend vers L et L' en a alors $L = L'$. On note alors $L = \lim_a f = \lim_{(x,y)\to a} f(x, y)$.
Si $a \in U$ alors la seule limite possible de f en a est $f(a)$.

14 Exemple : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x, y)\| = 0$, $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} x = a_1\ \ et\ \ \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} y = a_2$.

15 Théorème : Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U et $a = (a_1, a_2) \in U \cup \partial U$ et L un réel.
S'il existe une fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_a g = 0$ et $\exists r > 0, \forall (x, y) \in B(a, r), |f(x, y) - L| \leq g(x, y)$ alors $\lim_{(x,y)\to a} f(x, y) = L$.

16 Exemple : Déterminer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y)x^3}{x^2+2y^2}$.

17Théorème d'opérations sur les limites : Soit f et g des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un même ouvert non vide U $a = (a_1, a_2)$ un point de U ou du bord de U. On suppose que $\lim_a f = L \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_a g = L' \in \mathbb{R}$.

1. Alors $\lim_a |f| = |L|$, $\lim_a f + g = L + L'$ et $\lim_a f \times g = L \times L'$.
2. Si $L' \neq 0$ alors $\lim_a f/g = L/L'$.
3. Si $L \neq 0$ *et* $L' = 0$ alors f/g n'a pas de limite finie en a.
4. Si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur $f(U)$ et telle que $\lim_L \varphi = L''$ alors $\lim_a \varphi \circ f = L''$.
5. Si θ_1 *et* θ_2 est deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un voisinage V du réel b telles que $\theta_1(V) \times \theta_2(V) \subset U$ et $\lim_{t\to b} \theta_1(t) = a_1$ *et* $\lim_{t\to b} \theta_2(t) = a_2$ alors $\lim_{t\to b} f\,(\theta_1(t), \theta_2(t)) = L$.
6. Si Γ_1 *et* Γ_2 est deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un ouvert non vide V contenant b telles que $\Gamma_1(V) \times \Gamma_2(V) \subset U$ et $\lim_{(u,v)\to b} \Gamma_1(u,v) = a_1$ *et* $\lim_{(u,v)\to b} \Gamma_2(u,v) = a_2$ alors $\lim_{(u,v)\to b} f\,(\Gamma_1((u,v)), \Gamma_2((u,v))) = L$.

18Remarque : La propriété 5. s'énonce parfois sous la forme : si f tend vers L en a alors f tend vers L par n'importe quel chemin qui approche a. Cette propriété permet en pratique de montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a en trouvant deux chemins approchant a par lesquels f a deux limites différentes comme l'énonce le théorème suivant :

19Théorème : Soit $\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2$ est des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un voisinage V du réel b telles que :
$\theta_1(V) \times \theta_2(V) \subset U$ *et* $\varphi_1(V) \times \varphi_2(V) \subset U$ et $\lim_{t\to b} \theta_1(t) = \lim_{t\to b} \varphi_1(t) = a_1$ *et* $\lim_{t\to b} \theta_2(t) = \lim_{t\to b} \varphi_2(t) = a_2$.
Si $\lim_{t\to b} f\left(\theta_1(t), \theta_2(t)\right) = L$ *et* $\lim_{t\to b} f\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right) = L'$ *tel que* $L \neq L'$ alors f n^' a pas de limite en $a = (a_1, a_2)$.

20NB : les deux chemins qui approchent $a = (a_1, a_2)$ quand $t \to b$ sont $\{\left(\theta_1(t), \theta_2(t)\right)/t \in V\}$ et $\{\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right)/t \in V\}$

21Exemples :

1) Les limites en $(0,0)$ de $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et de $g(x,y) = \frac{x^2y-3x^5}{7|x|+2y^2}$ existent-elles ? Si oui, les déterminer.
2) Déterminer $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{\sin(x+y)}{\ln(1+x+y)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin(x)}$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^8+y^6}$.
3) Montrer que $\left((x,y) \mapsto \frac{x^2+3y^2}{x^2-y^2}\right)$ n'a de limite en aucun point $a = (\alpha, \alpha)$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Continuité

22Définition : Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U et $a = (a_1, a_2) \in U$.
f est continue en a lorsque $\lim_a f = f(a)$
i.e. lorsque $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists r \in \mathbb{R}^{+*} / \forall (x,y) \in U, (\underbrace{\|(x,y) - a\| < r}_{(x,y)\in B(a,r)} \Longrightarrow \underbrace{|f(x,y) - f(a)| < \varepsilon}_{f(x,y)\in]f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon[}$.
f est continue sur U lorsque f est continue en tout point de U.

22Autrement dit, f est continue en a lorsque $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists r \in \mathbb{R}^{+*} / \forall u \in Df, (d(a,u) < r \Longrightarrow d\left(f(a), f(u)\right) < \varepsilon)$, cela signifie que je peux rendre $f(u)$ aussi proche que je le souhaite de $f(a)$ à condition de prendre u suffisamment proche de a et ou encore que l'écart entre $f(u)$ et $f(a)$ diminue à mesure que la distance entre u et a diminue. Le point $M\left(u, f(u)\right) de\ Gf$ s'approche et atteint le point $A\left(a, f(a)\right)$ lorsque $u \to a$ par n'importe quel chemin.

23Théorème Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U et $a = (a_1, a_2) \in U$.
S'il existe une fonction g de $\mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_a g = 0$ et $\exists r > 0 / \forall (x,y) \in B(a,r),\ |f((x,y)) - f(a)| \leq g((x,y))$ alors f est continue en a.

24Conséquence : les fonctions $p : \left((x,y) \mapsto x\right) et\ q : \left((x,y) \mapsto y\right)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

25Théorème Soit f et g deux fonctions $\mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$ définies sur un ouvert non vide U . Soit α et β deux réels.

- SI f et g coïncident sur l'ouvert U et g est continue sur U alors f est continue sur U .
- Si f et g sont continues sur U alors $\alpha f + \beta g$ et $f \times g$ sont continues sur U et si de plus g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est continue sur U.
- Si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $f(U)$ et f est continue sur U alors $\varphi \circ f$ est continue sur U.
- Si θ_1 *et* θ_2 est deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur un intervalle I telles que $\theta_1(I) \times \theta_2(I) \subset U$ et f est continue sur U alors $h : (t \mapsto f\left(\theta_1(t), \theta_2(t)\right)$ est continue sur I.
- Si Γ_1 *et* Γ_2 est deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ continues sur un ouvert non vide V telles que $\Gamma_1(V) \times \Gamma_2(V) \subset U$ alors $H: ((u,v) \mapsto f\left(\Gamma_1\left((u,v)\right), \Gamma_2\left((u,v)\right)\right)$ est continue sur V.

26Conséquence : Toute fonction polynomiale à deux variables est continue sur $\mathbb{R}^2$. Toute fonction rationnelle de deux variables est continue sur son domaine de définition.

27Exemple : Montrons que $f: ((x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

28Théorème : Soit θ_1, θ_2 est des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un voisinage V du réel b telles que :
$\theta_1(V) \times \theta_2(V) \subset U$ et $\lim_{t\to b} \theta_1(t) = a_1$ et $\lim_{t\to b} \theta_2(t) = a_2$.
Si $\lim_{t\to b} f\left(\theta_1(t), \theta_2(t)\right) \neq f(a)$ alors f n'est pas continue en $a = (a_1, a_2)$.

29Exemples :

1) Soit $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et n'est pas continue en $(0,0)$.
2) Soit $f(x,y) = (x^3 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3) Pour quelles valeurs des réels a et b de $\mathbb{R}^{+*}$, $f: \left((x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^a y^b}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \right)$ est-elle continue en $(0,0)$?

4. Applications partielles

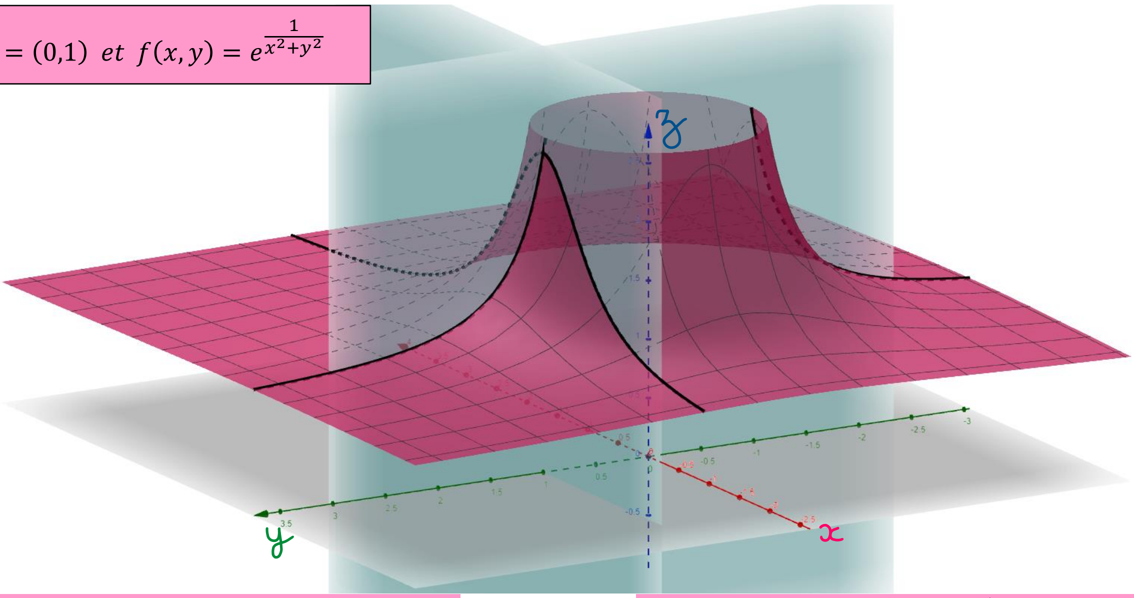
30Définition : Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U et $a = (a_1, a_2) \in U$.
Les applications partielles de f en a sont les fonctions $f_{1,a}$ et $f_{2,a}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_{1,a}(x) = f(x, a_2) \ \ et \ \ f_{2,a}(y) = f(a_1, y) .$$

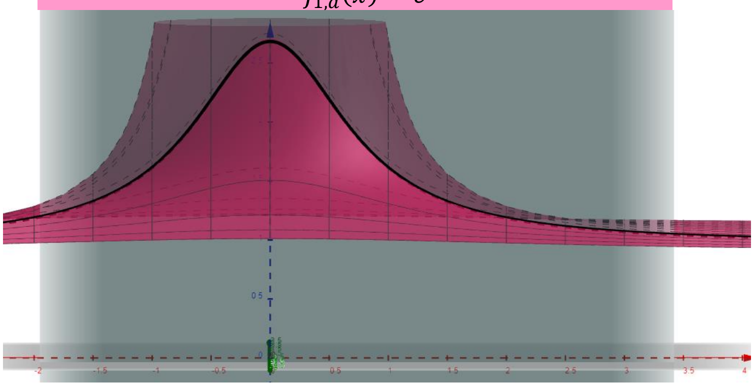
31NB : $Df_{1,a} = \{x \in \mathbb{R}/(x, a_2) \in U\}$ et $Df_{2,a} = \{x \in \mathbb{R}/(a_1, x) \in U\}$.

32 Illustration : la courbe de $f_{1,a}$est l'intersection de Gf et du plan $y = a_2$ et la courbe de $f_{2,a}$est l'intersection de Gf et du plan $x = a_1$.

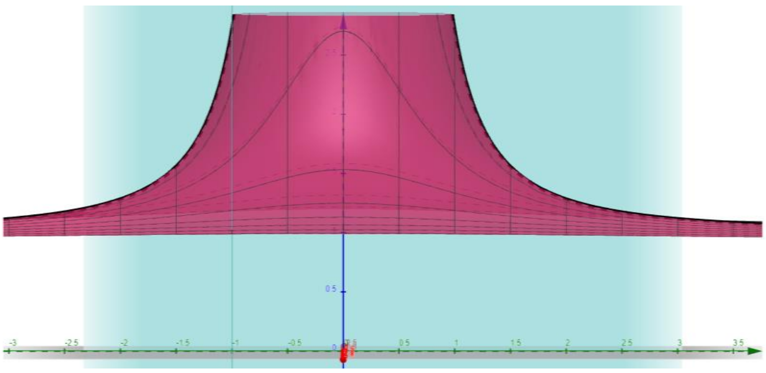
$a = (0,1)$ et $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2}}$



$f_{1,a}(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

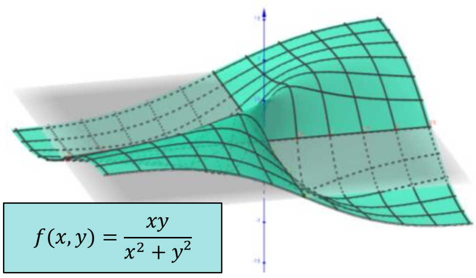


$f_{2,a}(y) = e^{\frac{1}{y^2}}$



31 Théorème Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U et $a = (a_1, a_2) \in U$.
Si f est continue en a alors $f_{1,a}$ est continue en a_1 et $f_{2,a}$ est continue en a_2.

La réciproque est fausse ! contre-exemple : $f: \left((x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \right)$.



$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

III Dérivation

1. Dérivées partielles- Fonctions de classe C^1.

32 Définition Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U et $a=(a_1,a_2)\in U$.
Lorsque $f_{1,a}$ est dérivable en a_1, f admet une dérivée partielle (première) par rapport à la première variable telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}((a_1,a_2))}_{\substack{dérivée\ partielle\ de\ f\\ par\ rapport\ à\ x\ en\ a}}=f'_{1,a}(a_1)=\lim_{x\to a_1}\frac{f_{1,a}(x)-f(a)}{x-a_1}.$$

Lorsque $f_{2,a}$ est dérivable en a_2 alors f admet une dérivée partielle (première) par rapport à la deuxième variable telle que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}((a_1,a_2))}_{\substack{dérivée\ partielle\ de\ f\\ par\ rapport\ à\ y\ en\ a}}=f'_{2,a}(a_2)=\lim_{t\to 0}\frac{f_{2,a}(a_2+t)-f_{2,a}(a_2)}{t}.$$

33 Exemples :

1. Soit $f(x,y)=sin(x^2y+3y)+xArctan(xy^2+1)$. Montrons que les dérivées partielles de f existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les déterminer en un point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
2. Etudions l'existence des dérivées partielles premières en $(0,\beta)$ de la fonction $f:\left((x,y)\mapsto\begin{cases}y^2xln(|x|)\ si\ x\neq 0\\ 0\ si\ x=0\end{cases}\right)$.

34 En pratique, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ $(resp. \frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$, on considère y (resp. x) comme une constante dans l'expression $f(x,y)$ et on dérive cette même expression par rapport à x(resp. y).

35 Définition Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U et $a=(a_1,a_2)\in U$.
Lorsque les dérivées partielles premières de f existent en tout point de U , on définit les fonctions dérivées partielles de f sur U.
Ces fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}:\left((x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}:((x,y)\mapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ sont définies sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

36 Définition Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert non vide U .
f est de classe C^1sur U lorsque les fonctions dérivées partielles premières de f sont définies et continues sur U.

37 Exemple : la fonction $f:\left((x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ si\ x=y=0\end{cases}\right)$ est-elle continue ? de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$?

2. Développements limités.

38 Théorème admis : Si f est de classe C^1sur l'ouvert U alors en tout point $a=(a_1,a_2)\in U$, alors il existe une fonction ε définie sur une boule ouverte B de centre O telle que :

$$\lim_{h\to(0,0)}\varepsilon(h)=0 \text{ et } \forall h=(h_1,h_2)\in B, f(a+h)\overset{(**)}{=}f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2+\|h\|\varepsilon(h).$$

On dit alors que f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a et $(**)$ constitue ce $DL_1(a)$.

$(**)$ $s'écrit\ aussi:$ $f((a_1+h_1,a_2+h_2))=f((a_1,a_2))+\frac{\partial f}{\partial x}((a_1,a_2))h_1+\frac{\partial f}{\partial y}((a_1,a_2))h_2+\|(h_1,h_2)\|\varepsilon((h_1,h_2))$.

39 Notation : si $\lim_{h\to(0,0)}\varepsilon(h)=0$ alors $\|h\|\varepsilon(h)$ est noté $o(\|h\|)ou\ o_{(0,0)}(\|h\|)$

40 Remarques :

1. $L:\left((h_1,h_2)\mapsto\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1+\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_2\right)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$. Le développement limité d'ordre 1 de la fonction f de classe C^1sur l'ouvert U s'écrit : $f(a+h)-f(a)=L(h)+o(\|h\|)$ et donne une approximation linéaire $L(h)$ de $f(a+h)-f(a)$.
2. En posant $x=a_1+h_1et\ y=a_2+h_2\ et\ \alpha(x,y)=\varepsilon(x-a_1,y-a_2)$, on obtient :

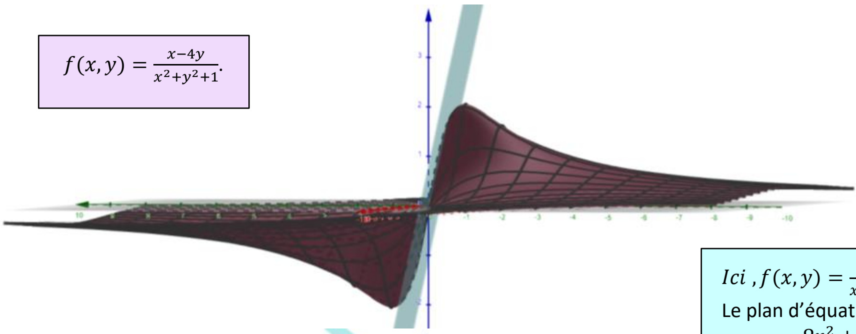
$$f((x,y))\overset{(**)}{=}f((a_1,a_2))+\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2)+\|(x-a_1,y-a_2)\|\alpha((x,y))\ \text{ où } \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\alpha(x,y)=0\ .$$

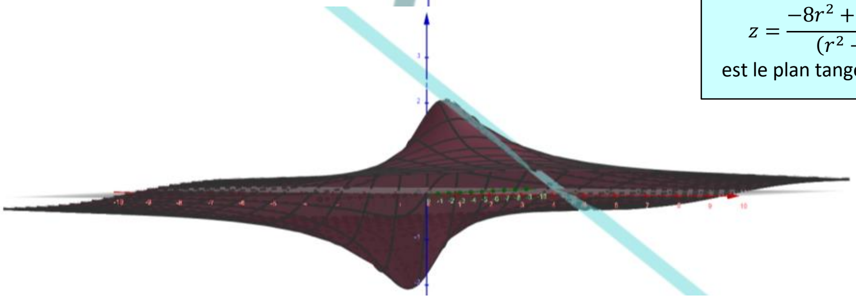
Comme $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\|(x-a_1,y-a_2)\|\alpha((x,y))=0$, le plan d'équation $z=f((a_1,a_2))+\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2)$ se rapproche et se confond presque avec Gf quand $(x,y)\to(a_1,a_2)$.

41 Définition : Le plan d'équation $z=f((a_1,a_2))+\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1)+\frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2)$ est appelé le plan tangent en $a=(a_1,a_2)$ à la surface d' équation $z=f(x,y)$.

42 Illustration

$f(x,y) = \frac{x-4y}{x^2+y^2+1}$.





$Ici\ , f(x,y) = \frac{x-4y}{x^2+y^2+1}$.
Le plan d'équation :

$$z = \frac{-8r^2+8rs+s^2+1}{(r^2+s^2+1)^2}(x-r) + \frac{4s^2-2rs-4r^2-4}{(r^2+s^2+1)^2}(y-s) + f(r,s)$$

est le plan tangent à Gf au point $A(r,s)$.

3. Gradient d'une fonction de classe C^1.

43Définition :
Si f est de classe C^1sur U alors pour tout $a \in U$, le vecteur $\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a))$ est appelé gradient de f en a.

44 NB : Avec ce nouvel outil appelé gradient et en notant $(./.)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, on peut réécrire

- le développement limité de f en a : $\forall h \in B, f(a+h) \overset{(**)}{\triangleq} f(a) + (\nabla f(a)/h) + o(\|h\|)$
- la forme linéaire L : $\forall h \in \mathbb{R}^2, L(h) = (\nabla f(a)/h)$.

45Interprétation géométrique :
Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ fournit une information sur la croissance de$f_{1,a}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ sur celle de $f_{2,a}$, le vecteur $\nabla f(a)$ donne la direction dans laquelle f croît le plus vite.

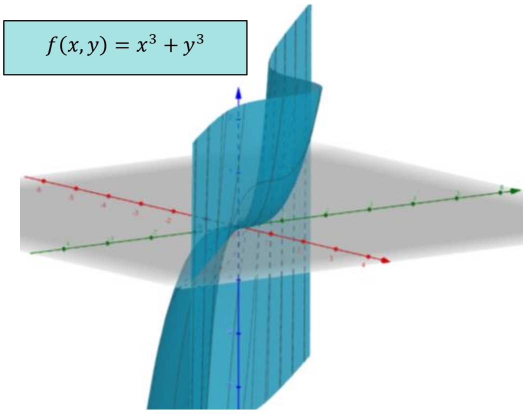
46Définition : Soit f est de classe C^1sur U et $a \in U$. a est un point critique de f lorsque $\nabla f(a) = (0,0)$ $i.e.\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

4. Extrema d'une fonction de classe C^1.

47Théorème: Si f est de classe C^1sur $un\ ouvert\ U$ et $a \in U$ alors pour que f admette un extremum en a, il est **nécessaire** que a soit un point critique de f (i.e. $\nabla f(a) = (0,0)$) mais cela n' est **pas suffisant**.

48NB : la condition $\nabla f(a) = (0,0))$ est nécessaire mais non suffisante comme le prouve le contre-exemple : $f(x,y) = x^3 + y^3$ dont les dérivées partielles s'annulent en (0,0) et pourtant f n'admet pas d'extremum en (0,0) puisqu'aussi proche de (0,0) que l'on veut f prend des valeurs positives et négatives (illustration ci -contre)

$f(x,y) = x^3 + y^3$



49Exemples :

1. Soit $U =]0,1[^2 et\ \forall (x,y) \in U, f(x,y) = x + y - \frac{4}{3}(x^3+y^3)$.

Montrer que U est un ouvert et déterminer les extrema de f.

2. Soit $U = (\mathbb{R}^{+*})^2\ et\ \forall (x,y) \in U, f(x,y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

Montrer que U est un ouvert et déterminer les extrema de f.

5. Opérations sur les fonctions de classe C^1.

50 Théorème Soit f et g deux fonctions $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert non vide U . Soit α et β deux réels.
Alors $\alpha f+\beta g$ et $f\times g$ sont de classe C^1 sur U et si, de plus, g ne s'annule pas sur U alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur U. Et,

$$\forall a\in U,\quad \frac{\partial(\alpha f+\beta g)}{\partial x}(a)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(a)+\beta\frac{\partial g}{\partial x}(a)\ \ et\ \ \frac{\partial(fg)}{\partial x}(a)=g(a)\frac{\partial f}{\partial x}(a)+f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a).$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(a)=\frac{g(a)\frac{\partial f}{\partial x}(a)-f(a)\frac{\partial g}{\partial x}(a)}{g(a)^2}$$

Idem pour les dérivées par rapport à la seconde variable.

51 Théorème Soit f une fonction $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie *et* de classe C^1 sur un ouvert non vide U ;

1. Si φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $f(U)$ alors $\varphi\circ f$ est de classe C^1 sur U et
$$\forall a\in U,\quad \frac{\partial\varphi\circ f}{\partial x}(a)=\varphi'\big(f(a)\big)\times\frac{\partial f}{\partial x}(a)\ \ et\ \ \frac{\partial\varphi\circ f}{\partial y}(a)=\varphi'\big(f(a)\big)\times\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$
2. Si θ_1 *et* θ_2 est deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un intervalle non vide I telles que $\theta_1(I)\times\theta_2(I)\subset U$ alors $h:\big(t\mapsto f\big(\theta_1(t),\theta_2(t)\big)\big)$ est de classe C^1 sur I *et* $\forall t\in I$,
$$h'(t)=\theta_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(\theta_1(t),\theta_2(t)\big)+\theta_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(\theta_1(t),\theta_2(t)\big).$$
3. Si Γ_1 *et* Γ_2 est deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur un ouvert non vide V telles que $\Gamma_1(V)\times\Gamma_2(V)\subset U$ alors $H:((u,v)\mapsto f(\Gamma_1(u,v),\Gamma_2(u,v))$ est de classe C^1 sur V *et* $\forall(u,v)\in V$,
$$\frac{\partial H}{\partial u}((u,v))=\frac{\partial\Gamma_1}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial x}\big(\Gamma_1(u,v),\Gamma_2(u,v)\big)+\frac{\partial\Gamma_2}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial y}\big(\Gamma_1(u,v),\Gamma_2(u,v)\big)$$
$$\frac{\partial H}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial\Gamma_1}{\partial v}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial x}(\Gamma_1(u,v),\Gamma_2(u,v))+\frac{\partial\Gamma_2}{\partial v}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial y}(\Gamma_1(u,v),\Gamma_2(u,v)).$$

52 Exemples :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1) Déterminer le plus grand ouvert où chacune des fonctions suivantes est de classe C^1 puis calculer les dérivées partielles de ces fonctions :
   - $Q:\big((x,y)\mapsto sin(f(x,y)^2)\big)$
   - $R:\big((u,v)\mapsto f(2u+v,u-5v)\big)$
   - $S:\left((u,v)\mapsto f\left(uv,\frac{v}{u}\right)\right)$
   - $T:\left((u,v)\mapsto Artan\left(f\left(uv,\frac{v}{u}\right)\right)\right)$
2) Sur quel intervalle peut-on assurer la classe C^1 de chacune des fonctions suivantes puis calculer leurs dérivées partielles
   - $g:\big(t\mapsto f(\mathrm{Arcsin}(\mathrm{t}),Arcos(t)\big)$
   - $h:\left(t\mapsto e^{f\left(\frac{1}{\mathrm{t}},\ln(t)\right)}\right)$

53 Résolution d'équations aux dérivées partielles :

1) Déterminons toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et telles que :
$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x^2+\mathrm{y}\sin(x+y)+e^{2y}+1.$
2) Soit g une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U . Déterminons toutes les fonctions $f:U\to\mathbb{R}$, de classe C^1 et telles que :$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=g(x,y).$
3) Déterminons toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et telles que :
$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=8x+16y$ en utilisant le changement de variables : $u=x+y\ et\ v=x-y$.
4) a. Montrons que $\varphi:(r,\theta)\mapsto(rcos(\theta)\,,rsin(\theta)\,)$ est une bijection de $V=\mathbb{R}^{+*}\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $U=\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et déterminons φ^{-1}.
b. Déterminons toutes les fonctions f de $U=\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur U et telles que :
$\forall\,(x,y)\in U,\ y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ en utilisant le changement de variables : $x=rcos(\theta)\ et\ y=rsin(\theta)$.