Aux futurs étudiants de PC,

Il faut avant tout vous reposer après cette année de PCSI bien remplie, mais aussi penser à préparer raisonnablement l'année de PC pendant ces vacances d'été. Il serait bon de commencer à reviser au moins trois semaines avant la rentrée.

Comme nous allons commencer par des révisions sur les suites, puis approfondir le cours sur les séries, je vous invite **à retravailler attentivement le cours et les exercices de Mme Ploquin** sur les suites, les séries, l'intégration sur un segment et les développements limités. Vous trouverez ci-dessous une généralisation du théorème de Césaro et trois énoncés de devoirs (corrigés) sur les suites que vous pouvez étudier pour vous entraîner.

J'ai joint également le cours (très important) sur les séries que nous étudierons en septembre 2024 et je vous propose enfin de travailler divers exercices de révisions (avec corrigés).

Bonnes vacances à tous.

D. Guibourg.

I. Une généralisation du théorème de Cesàro. Applications.

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = +\infty.$$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

1. *Etude de la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

1. a. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Vérifier que $\forall n > N$, $|v_n - \ell| \leq \dfrac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

1. b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

1. c. *Application.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ et déduire de 1. que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} = \dfrac{\ell}{2}$.

2. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ et $B_n = b_1 + \cdots + b_n$.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty$. Déduire de 1. que $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} B_n$.

3. *Deux applications de la question précédente.*

3. a. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\ln(n+1) - \ln(n)$, et déduire de 2. que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. b. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, et déduire de 2. un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\frac{2}{3}}}$.

Solution proposée.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $v_n - \ell = \dfrac{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} - \ell = \dfrac{\alpha_1(u_1 - \ell) + \cdots + \alpha_n(u_n - \ell)}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.
En utilisant l'inégalité triangulaire et la stricte positivité de la suite (α_n), on obtient que pour tout $n > N$:

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &\leq \frac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell| + \alpha_{N+1}|u_{N+1} - \ell| + \cdots + \alpha_n|u_n - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \\ &\leq \frac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \frac{\alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } |u_{N+1} - \ell| \leq \tfrac{\varepsilon}{2}, \cdots, |u_n - \ell| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} + \frac{\varepsilon}{2} \ (*) \end{aligned}$$

car, par stricte positivité de la suite (α_n), $0 < \alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_N < \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ donc $0 < \dfrac{\alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} < 1$.

1. b. Notons C la constante $\alpha_1|u_1 - \ell| + \cdots + \alpha_N|u_N - \ell|$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{C}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} = 0$. Donc il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N'$, $\dfrac{C}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
L'inégalité $(*)$ obtenue en 1. a. implique alors que, pour tout $n > N'' = \max(N, N')$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N'' \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > N''$, $|v_n - \ell| \leq \varepsilon$. On reconnait la définition formalisée de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Remarque : Ce résultat s'applique avec $\alpha_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ car $\alpha_n > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}_{=n} = +\infty$.

Ce cas particulier nous redonne le théorème de Cesàro usuel : si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \ell$.

1. c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $v_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{1 + \cdots + n}$ et $w_n = \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}$.
On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On peut utiliser le résultat obtenu précédemment avec $\alpha_n = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, car $\alpha_n > 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty,$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.
Comme $w_n = \dfrac{n(n+1)}{2n^2} v_n$, on a finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \dfrac{1}{2}\ell$.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ et $\alpha_n = b_n > 0$. Par hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et

$$\lim_{n \to +\infty} (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = \lim_{n \to +\infty} B_n = +\infty.$$

Comme $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = a_1 + \cdots + a_n = A_n$, on a donc directement, d'après 1. b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{A_n}{B_n} = 1$, c'est-à-dire $A_n \underset{n \to +\infty}{\sim} B_n$.

3. a. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ et $b_n = \frac{1}{n}$. Ces deux suites satisfont aux hypothèses de la question 2. En effet : $a_n > 0$ (car ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$), $b_n > 0$, $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$ car $a_n = \ln(1 + \dfrac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\ln(1+x) = x + o_0(x)$, et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ (série de Riemann divergente). Comme, par telescopage,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln(n)) = \ln(n+1),$$

d'après 2. : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n+1)$. Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + \frac{1}{n})$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$, c'est-à-dire que $\ln(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$. On retrouve ainsi l'équivalent classique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.

3. b. Même démarche qu'en 3. a. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ et $b_n = \dfrac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$. Ces deux suites satisfont aux hypothèses de la question 2. En effet : $a_n > 0$ (car $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$), $b_n > 0$, $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} b_n$ car

$$a_n = \sqrt[3]{n}((1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{3}} - 1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$$

puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + o_0(x)$, et enfin $\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\frac{2}{3}}} = +\infty$ (série de Riemann divergente vers $+\infty$ car d'exposant $\frac{2}{3} \leq 1$). Comme, par telescopage, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}) = \sqrt[3]{n+1} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$, d'après 2. : $B_n = \dfrac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$, d'où $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{\frac{2}{3}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3\sqrt[3]{n}$.

II. Trois devoirs corrigés pour s'entraîner.

Devoir n° 1.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$$

1. On pose : $M_n = \max(u_n, u_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Prouver que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} M_n$.
2. a. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\ell \leq M_n \leq \ell + \varepsilon$.
2. b. Prouver en raisonnant par l'absurde que pour tout $n \geq N$, $u_n > \ell - 4\varepsilon$.
3. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 2.
`A. Rappels sur les sommes de Riemann.`
Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Il a été admis, dans le chapitre intégration du cours de mathématiques de PCSI, que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{1}$$

Le but de cette partie A. est de démontrer l'égalité (1) sous une hypothèse plus forte sur f.
1. Soient C un réel positif et f une application C-lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
a. (Re)démontrer que f est continue sur $[0,1]$.
b. Vérifier que

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(f(x) - f(\frac{k}{n})\big)\,dx.$$

c. En déduire que $|\int_0^1 f(x)\,dx - \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\dfrac{k}{n})| \leq \dfrac{C}{2n}$ et prouver (1).
d. Dans cette question, f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver (1).
`B. Application.` Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \big(1 + \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})\big).$$

1. a. $|f|$ est-elle bornée sur $[0,1]$?
1. b. Prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\forall k \in \{1,\dots,n\}$, $\frac{1}{n}|f(\frac{k}{n})| \leq \frac{1}{2}$.
2. Vérifier que $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.
Indication : considérer $\ln(u_n)$ avec $n \geq N$ et utiliser (1).

Exercice 3. Soient f une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{p=0}^{n} u_{f(p)}$.
On suppose que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et l'on note S sa limite.
1. Prouver que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente. On note T sa limite.
2. Prouver que $T \leq S$.
3. a. On note, pour tout $i \in \mathbb{N}$, a_i l'unique antécédent de i par f.
Vérifier que $S_n \leq T_{\max(a_0,\dots,a_n)}$.
3. b. Prouver finalement que $T = S$.

Corrigé du devoir n° 1.

Exercice 1. 1. Par définition de M_n, on a : $u_n \leq M_n$, $u_{n+1} \leq M_n$ et donc $u_{n+2} \leq \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \leq M_n$.
Par conséquent, M_{n+1} (qui est égal à u_{n+1} ou u_{n+2}) est inférieur ou égal à M_n. La suite (M_n) est donc décroissante. Or (M_n) est minorée par 0, donc (M_n) converge vers un réel $\ell \geq 0$.

2. a. La décroissance de (M_n) implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_n \geq \ell$. Considérons $\varepsilon > 0$. Comme $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$, il existe un entier $N \in N$ tel que $\forall n \geq N$, $M_n \leq \ell + \varepsilon$. Ainsi $\forall n \geq N$, $\ell \leq M_n \leq \ell + \varepsilon$.

2. b. Supposons l'existence d'un entier $n \geq N$ tel que $u_n \leq \ell - 4\varepsilon$. Comme $u_{n+1} \leq M_n \leq \ell + \varepsilon$, on a $u_{n+2} \leq \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2} \leq \ell - \dfrac{3\varepsilon}{2}$ et $u_{n+3} \leq \dfrac{u_{n+1} + u_{n+2}}{2} \leq \ell - \dfrac{\varepsilon}{4}$. D'où $M_{n+2} = \max(u_{n+2}, u_{n+3}) \leq \ell - \dfrac{\varepsilon}{4}$ ce qui contredit 2. a.

3. Regroupons les résultats obtenus en 2. a. et 2. b : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\ell - 4\varepsilon < u_n \leq M_n \leq \ell + \varepsilon$ ou encore tel que $\forall n \geq N$, $\ell - 4\varepsilon < u_n < \ell + 4\varepsilon$. Ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Nota Bene : si le 4ε vous dérange, considérer un réel $\varepsilon' > 0$ (quelconque). Poser $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{4}$. D'après 2.a et 2. b. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\ell - \varepsilon' < u_n < \ell + \varepsilon'$ ce qui est bien la définition formalisée de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 2. *Partie A.* Notons $I = [0, 1]$.

1. a. Soit $a \in I$ (quelconque). Comme $0 \leq |f(x) - f(a)| \leq C|x - a|$, le théorème des gendarmes donne : $\lim\limits_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. L'application f est continue en a. Donc f est bien continue sur I.

1. b. La relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale nous donnent :

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (f(x) - f(\frac{k}{n}))\,dx.$$

1. c. D'après la question précédente, f étant C-lipschitzienne, on a :

$$\begin{aligned}
|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})| &= |\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (f(x) - f(\frac{k}{n}))\,dx\,| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (f(x) - f(\frac{k}{n}))\,dx\,| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(x) - f(\frac{k}{n})|\,dx \\
&\leq C\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (\frac{k}{n} - x)\,dx \\
&\leq C\sum_{k=1}^{n}[-\frac{1}{2}(\frac{k}{n} - x)^2]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\,dx \\
&\leq \frac{C}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{C}{2n}.
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{C}{2n} = 0$, le théorème des gendarmes (de limite par encadrement) permet d'affirmer que la suite $(|\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 ou, de façon équivalente, que la suite $(\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1. d. Par hypothèse, f est dérivable sur I et f' est continue sur I. En particulier, $|f'|$ (continue sur I) est majorée sur I. Soit $M = \max\limits_{x\in I} |f'(x)|$. Considérons $(x, y) \in I^2$ (on peut supposer $x < y$). D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = (x - y)f'(c)$. On en déduit que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ ce qui prouve que f est M-lipschitzienne sur I. D'où (1) par la question précédente.

Partie B.

1. a. $|f|$ est majorée sur I car, d'après le cours sur la continuité, toute fonction continue d'un segment quelconque $[a, b]$ $(a < b)$ à valeurs $\mathbb{R}$ est bornée sur $[a, b]$ (et atteint ses bornes).

1. b. Remarquons que $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{k}{n} \in [0, 1]$. Soit $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \geq 2M$. On a alors :

$$\forall n \geq N,\ \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \frac{1}{n}|f(\frac{k}{n})| \leq \frac{M}{N} \leq \frac{1}{2}.$$

2. L'encadrement demandé s'obtient en étudiant les variations des fonctions $x \mapsto \ln(1 + x) - x$ et $x \mapsto \ln(1 + x) - x + x^2$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

3. Soit $n \geq N$. Comme $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a d'après la question précédente :

$$\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) - (\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}))^2 \leq \ln(1 + \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})) \leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$$

et en sommant :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 \leq \ln(u_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}). \qquad (*)$$

D'après (1), $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Comme f^2 est continue sur $[0,1]$ on a aussi d'après (1), $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 = \int_0^1 (f(x))^2\,dx$ et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 = 0.\int_0^1 (f(x))^2\,dx = 0$.

Les deux suites encadrantes dans l'inégalité $(*)$ ci-dessus convergent donc vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Le théorème des gendarmes nous dit que la suite $(\ln(u_n))$ converge également vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Par continuité de la fonction exponentielle, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

Remarque. L'encadrement $0 \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 \leq \frac{M^2}{n}$ et le théorème des gendarmes permettent d'obtenir plus simplement que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(f(\frac{k}{n}))^2 = 0$ (sans faire appel au résultat (1) sur les sommes de Riemann).

Exercice 3. La suite (S_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ et comme par hypothèse (S_n) converge (vers S), on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq S$ $(**)$.

1. La suite (T_n) est croissante car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = u_{f(n+1)} \geq 0$. De plus, comme f est bijective, les entiers $f(0), \cdots, f(n)$ sont distincts et comme la suite u est positive, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = u_{f(0)} + \ldots + u_{f(n)} \leq u_0 + \ldots + u_{\max(f(0),\cdots,f(n))} = S_{\max(f(0),\cdots,f(n))} \quad (***)$$

Par exemple, si $f(0) = 4$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 1$, $T_2 = u_4 + u_2 + u_1 \leq u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = S_4$.
D'après $(***)$ et $(**)$, on a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq S$. La suite (croissante) (T_n) est donc majorée (par S). Par conséquent, la suite (T_n) converge.

2. On a montré dans la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq S$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient $T \leq S$ ("passage à la limite dans une inégalité entre deux suites convergentes").

3. a. Essayons tout d'abord de comprendre l'inégalité cherchée à l'aide d'un exemple. Supposons que les antécédents par f des entiers 0, 1 et 2 soient respectivement 5, 3 et 7, c'est-à-dire que $f(5) = 0$, $f(3) = 1$ et $f(7) = 2$. Alors, comme la suite u est positive, on a

$$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = u_{f(5)} + u_{f(3)} + u_{f(7)} \leq u_{f(0)} + \cdots + u_{f(7)} = T_7$$

car les entiers $f(5)$, $f(3)$ et $f(7)$ sont trois des huit entiers distincts $f(0), \cdots, f(7)$.
De manière générale avec une bijection f quelconque de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, comme la suite u est positive, on a

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = u_{f(a_0)} + \cdots + u_{f(a_n)} \leq u_{f(0)} + \cdots + u_{f(\max(a_0,\cdots,a_n))} = T_{\max(a_0,\cdots,a_n)} \quad (****)$$

car les $(n+1)$ entiers distincts $f(a_0), \cdots, f(a_n)$ font partie de la liste $f(0), \cdots, f(\max(a_0, \cdots, a_n))$ d'entiers distincts.

3. b. Comme la suite (croissante) (T_n) converge (vers T), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq T$. Donc, d'après $(****)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T$ et par passage à la limite, on obtient $S \leq T$. D'où $S = T$ d'après 2.

Remarque. Reformulons le résultat obtenu dans cet exercice en utilisant le mot série. On vient en fait de prouver que si la série **à termes positifs** $\sum u_n$ converge, alors, f étant une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{f(n)}$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{f(k)}$.

Devoir n° 2.

Exercice 1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} (\frac{a^n + b^n}{2})^{\frac{1}{n}} = \max(a, b)$.

Exercice 2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = u_n - \ln n$.

1. a. En utilisant la décroissance sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$, prouver que

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}.$$

1. b. En déduire que $\forall n \geq 2,\ 1 + \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} \leq u_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$.
1. c. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x})\, dx$.
2. b. Montrer que la suite v est une suite décroissante et convergente.
Remarque : On note γ la limite de la suite v. Ce réel γ est appelé *constante d'Euler.*
2. c. Vérifier que $\gamma \in [1 - \ln 2, 1]$.

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.
On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}.$$

1. Vérifier que la suite $(b_n^2 - a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géometrique de raison $\frac{1}{4}$.
2. Prouver que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
On note $\ell(a,b)$ la limite commune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $\alpha = arccos(\frac{a}{b})$.
3. a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = b \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\alpha}{2^k}$.
3. b. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n.\sin \frac{\alpha}{2^n} = b\frac{\sin\alpha}{2^n}$.
3. c. Préciser la valeur de $\ell(a,b)$.

Exercice 4. On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \frac{t}{1+t^2}$.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0(x) = x, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}(x) = \varphi(u_n(x)).$$

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(\frac{x}{1+x^2})$.
a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(u_n(x)) = f(x)$.
b. Déterminer f.

Corrigé du devoir n° 2.

Exercice 1. Posons $u_n(a,b) = (\frac{a^n + b^n}{2})^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On peut supposer $b \geq a$ car $u_n(a,b) = u_n(b,a)$.
Comme $b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b2^{-\frac{1}{n}} \leq u_n(a,b) \leq b$. Or $\lim_{n\to+\infty} 2^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}\ln 2} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} u_n(a,b) = b = \max(a,b)$.
Remarquons que si $a = b$, $u_n(a,b) = u_n(a,a) = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n(a,a) = a = \max(a,a)$!.

Exercice 2.
1. a et 1. b. Voir la page 5 du cours sur les séries (séries de Riemann). La sommation pour k allant de 2 à n des inégalités obtenues en 1. a. nous donne avec la relation de Chasles l'encadrement demandé en 1. b.
1. c. D'après 1. b. pour tout $n \geq 2$, $1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq u_n$. Or

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \ln(n+1) - \ln 2 = +\infty,$$

donc d'après le cours sur les suites, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Toujours d'après 1. b, on a, pour tout $n \geq 2$,

$$1 - \ln 2 + \ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln n$$

En divisant par $\ln n > 0$ et en utilisant l'égalité $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1 + \frac{1}{n})$, on obtient

$$\frac{1 - \ln 2}{\ln n} + 1 + \frac{1}{\ln n}\ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{u_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$.
En d'autres termes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
2. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_{n+1} - v_n$ est l'intégrale sur $[n, n+1]$ d'une fonction continue et négative car pour tout $x \in [n, n+1]$,

$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \leq 0$. Donc d'après le cours d'intégration, $v_{n+1} - v_n \leq 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leq v_n$. La suite (v_n) est par conséquent une suite décroissante. De plus, d'après 1. b, pour tout $n \geq 2$,

$$v_n := u_n - \ln n \geq 1 - \ln 2 + \ln(n+1) - \ln n \geq 1 - \ln 2$$

car ln est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a aussi $v_1 = 1 \geq 1 - \ln 2$. Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par $1 - \ln 2$.
La suite (v_n), décroissante et minorée, converge donc par théorème.

2. c. D'après 1. b. on a, pour tout $n \geq 2$, $1 - \ln 2 \leq v_n \leq 1$. En passant à la limite dans cet encadrement (on peut maintenant "passer à la limite" car on a établi en 2. b la convergence de la suite (v_n)), on obtient l'encadrement souhaité, à savoir $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.

Exercice 3.
On montre facilement par récurrence que les suites (a_n) et (b_n) sont des suites de réels strictement positifs.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1}b_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}(b_n - a_{n+1}) = (\dfrac{b_n + a_n}{2})(\dfrac{b_n - a_n}{2}) = \dfrac{1}{4}(b_n^2 - a_n^2)$. Donc la suite $(b_n^2 - a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite géometrique de raison $\frac{1}{4}$.

2. D'après **1.** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n^2 - a_n^2 = (\dfrac{1}{4})^n(b_0^2 - a_0^2) = (\dfrac{1}{4})^n(b^2 - a^2)$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n^2 > a_n^2$ ce qui implique que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n.$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > a_n$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} < b_n$ car $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} < b_n$. Ainsi la suite (a_n) (resp. (b_n)) est strictement croissante (resp. décroissante). Comme la suite (a_n) est majorée par b car $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n < b$, elle converge vers une limite $A > 0$. Idem (b_n) converge vers une limite $B > 0$ car la suite (b_n) est minorée par a. Or d'après ce qui précède,

$$B^2 - A^2 = \lim_{n\to+\infty}(b_n^2 - a_n^2) = \lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{4})^n(b^2 - a^2) = 0.$$

Donc $A = B$ et les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien adjacentes.

3. a. Calculons tout d'abord a_1 et b_1. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.
Comme $a = b\cos(\alpha)$, $a_1 = \dfrac{a+b}{2} = b\,\dfrac{1 + \cos(\alpha)}{2} = b\cos^2(\dfrac{\alpha}{2})$ et

$$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \sqrt{ba_1} = \sqrt{b^2\cos^2(\frac{\alpha}{2})} = b\cos(\frac{\alpha}{2})$$

car $\cos(\frac{\alpha}{2}) \in [0,1]$ puisque $\dfrac{\alpha}{2} \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.
Prouvons maintenant par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{P}_n\ : << a_n = b\cos(\frac{\alpha}{2^n}) \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^k} \text{ et } b_n = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} >>$$

Initialisation. Le calcul précédent des termes a_1 et b_1 montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
En effet, en utilisant $\mathcal{P}_n$, on obtient que :

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} \cdot \frac{1 + \cos(\frac{\alpha}{2^n})}{2} = \underbrace{b\prod_{k=1}^{n}\cos(\frac{\alpha}{2^k})}_{b_n} \cdot \cos^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos(\frac{\alpha}{2^k}) \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}})$$

et, d'après le calcul précédent de a_{n+1}, on obtient également que :

$$b_{n+1} := \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{b_n\cos^2(\frac{\alpha}{2^{n+1}})b_n} = b_n\cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) = b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}}) = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. b. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{Q}_n$ suivante est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathcal{Q}_n\ : << b_n \cdot \sin\frac{\alpha}{2^n} = b \cdot \frac{\sin\alpha}{2^n} >>$$

Initialisation. D'après **3. a.**, on a effectivement $b_1.\sin\frac{\alpha}{2} = b\cos(\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2}\sin(\alpha)$.

Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons $\mathcal{Q}_{n+1}$.
En effet, en utilisant **3.a.** et $\mathcal{Q}_n$, on obtient que :

$$b_{n+1}.\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}} = \underbrace{b_n \cdot \cos(\frac{\alpha}{2^{n+1}})}_{b_{n+1}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2^{n+1}} = b_n \cdot \frac{1}{2}\sin(\frac{\alpha}{2^n}) = b \cdot \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}}.$$

Par conséquent, $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. c. Rappelons que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n \sin(\frac{\alpha}{2^n}) = \alpha$ et finalement d'après **3. b.**

$$\ell(a,b) = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{b\sin\alpha}{2^n\sin(\frac{\alpha}{2^n})} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}.$$

Exercice 4.

1. a. *Signe des termes de la suite.* On vérifie facilement par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(0) = 0 \ \text{ et que } \forall x > 0 \ \text{ (resp. } x < 0\text{)},\ u_n(x) > 0 \ \text{ (resp. } u_n(x) < 0\text{)}.$$

1. b. *Monotonie et convergence de la suite.* (i) D'après 1. a. $(u_n(0))$ est la suite constante nulle, de limite 0.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{u_n(x)}{1+u_n(x)^2} - u_n(x) = -\frac{u_n(x)^3}{1+u_n(x)^2}$$

est du signe de $-u_n(x)$.

(ii) Supposons $x > 0$. D'après 1. a. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) - u_n(x) < 0$. Autrement dit, la suite $(u_n(x))$ est (strictement) décroissante. Comme la suite $(u_n(x))$ est positive ... donc minorée par 0, elle converge vers un réel (positif) noté $\ell(x)$. Or $\ell(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}(x)$, donc $\ell(x)$ vérifie la relation $\ell(x) = \frac{\ell(x)}{1+\ell(x)^2}$ obtenue en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence $u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x)}{1+u_n(x)^2}$ définissant la suite $(u_n(x))$. D'où $\ell(x)(1+\ell(x)^2) = \ell(x) \Leftrightarrow \ell(x)^3 = 0 \Leftrightarrow \ell(x) = 0$. Ainsi $(u_n(x))$ est une suite de réels strictement positifs, strictement décroissante, de limite 0.

(iii) Supposons $x < 0$. On montre de même que $(u_n(x))$ est une suite de réels strictement négatifs, strictement croissante, de limite 0.

2. a. *Presque évident !* Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé). Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappelons que, par hypothèse sur f, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(\frac{t}{1+t^2}) = f(t)$. En remplaçant dans cette égalité t par $u_n(x)$, on obtient $f(\frac{u_n(x)}{1+u_n(x)^2}) = f(u_n(x))$, c'est-à-dire $f(u_{n+1}(x)) = f(u_n(x))$. Autrement dit, la suite $(f(u_n(x)))$ est une suite constante.
Comme son premier terme $f(u_0(x))$ est égal à $f(x)$, on a bien prouvé que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n(x)) = f(x)$.

2. b. Soit $x \in \mathbb{R}$ (quelconque mais fixé). D'après 2. a, la suite $(f(u_n(x)))$ est constante, de constante $f(x)$, et a donc pour limite $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. Rappelons que d'après 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$. Comme f est *continue* en 0, on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n(x)) = f(0)$. Par unicité de la limite de la suite $(f(u_n(x)))$, on obtient donc que $f(x) = f(0)$.

Cette dernière égalité étant vraie pour tout réel x, on vient donc de prouver qu'une fonction f vérifiant les hypothèses de la question 2. est constante. Réciproquement, une fonction constante vérifie clairement les hypothèses de la question 2. On peut donc conclure que les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues en 0, telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{1+x^2})$ sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$.

Devoir n° 3.

Exercice 1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$.

Exercice 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.
Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$, et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n).$$

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comparer u_n et v_n.

1. b. Etudier la monotonie des suites u et v.

1. c. Justifier que les deux suites u et v convergent vers une même limite, notée ℓ.

2. Calculer ℓ en fonction de u_0 et v_0.

Exercice 3. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\alpha| < 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \alpha^{n-p} a_p$.

1. On suppose tout d'abord $\ell = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|a_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}(1 - |\alpha|)$.

1. a. Vérifier que $\forall n > N$, $|u_n| \leq \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \frac{|a_p|}{|\alpha|^p} .|\alpha|^n + \frac{\varepsilon}{2}$.

1. b. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. On suppose maintenant que $\ell \in \mathbb{R}^*$.

En considérant la suite (b_n) définie par : $b_n = a_n - \ell$, $n \in \mathbb{N}$, déduire de 1. b. que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\ell}{1-\alpha}$.

3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $v_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = \alpha\, v_n + a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

3. a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \alpha^n v_0 + \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \alpha^{n-1-p} a_p$.

3. b. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Corrigé du devoir n° 3.

Exercice 1. Posons, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $p_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$. Transformons et simplifions p_n :

$$p_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$. *Remarque : la suite (p_n) est décroissante, minorée par 0, donc... convergente.*

Exercice 2.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n - (u_n + 2v_n)) = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$.
La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - v_n = (\frac{1}{3})^n (u_0 - v_0) = (\frac{1}{3})^n (a - b).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$ car $a < b$.

1. b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après **1. a.**, on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est donc strictement croissante (resp. décroissante).

1. c. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes car par **1. b.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et par **1. a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{3})^n (b - a) = 0$. Donc, d'après une propriété des suites adjacentes, ces deux suites convergent vers une même limite réelle.

Variante de rédaction : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par le théorème de convergence monotone : elle est croissante et majorée par v_0, d'après **1. a.** et **1. b.** car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n \leq v_0$. De même, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, car elle est décroissante et minorée par u_0. Notons $U = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $V = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$, vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $U = V$.

2. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n + u_n + 2v_n) = u_n + v_n$. La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite constante, de constante $u_0 + v_0$. Cette suite constante converge donc... vers sa constante $u_0 + v_0$ mais aussi, d'après ce qui précède, vers 2ℓ où ℓ est la limite commune des suites u et v. Par unicité de la limite d'une suite convergente, on a donc :

$$\ell = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Exercice 3.

1. a. Soit $n > N$. Comme $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} \alpha^{n-p} a_p + \sum_{p=N+1}^{n} \alpha^{n-p} a_p$, on a :

$$|u_n| \leq \sum_{p=0}^{N} |\alpha|^{n-p} |a_p| + \frac{\varepsilon}{2}(1 - |\alpha|) \sum_{p=N+1}^{n} |\alpha|^{n-p}. \tag{2}$$

Comme $|\alpha| < 1$, $\displaystyle\sum_{p=N+1}^{n} |\alpha|^{n-p} = \sum_{k=0}^{n-(N+1)} |\alpha|^k = \frac{1-|\alpha|^{n-N}}{1-|\alpha|} \leq \frac{1}{1-|\alpha|}$ et (2) implique que :

$$\forall n > N,\ |u_n| \leq \sum_{p=0}^{N} |\alpha|^{n-p}|a_p| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

1. b. Notons C la constante $\displaystyle\sum_{p=0}^{N} |\alpha|^{-p}|a_p|$.

Comme $|\alpha| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} C|\alpha|^n = 0$, il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N'$, $C|\alpha|^n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Et l'inégalité (3) implique que, pour tout $n > \max(N, N')$, $|u_n| \leq \varepsilon$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Par définition de la suite b, on a :

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \alpha^{n-p}(\ell + b_p) = \ell \sum_{k=0}^{n} \alpha^k + \sum_{p=0}^{n} \alpha^{n-p} b_p = \ell\, \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} + \sum_{p=0}^{n} \alpha^{n-p} b_p. \tag{4}$$

D'une part, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ car $|\alpha| < 1$ et d'autre part, comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell - \ell = 0$, le résultat de **1. b.**, utilisé avec la suite b à la place de a, nous donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \alpha^{n-p} b_p = 0$.

L'égalité (4) implique finalement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\ell}{1-\alpha}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\displaystyle v_n = \alpha^n v_0 + \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^{n-1-p} a_p$.

Initialisation. Comme $\displaystyle v_1 = \alpha v_0 + a_0 = \alpha^1 v_0 + \sum_{p=0}^{0} \alpha^{-p} a_p$, $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \alpha v_n + a_n = \alpha(\alpha^n v_0 + \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^{n-1-p} a_p) + a_n \\ &= \alpha^{n+1} v_0 + \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^{n-p} a_p + a_n = \alpha^{n+1} v_0 + \sum_{p=0}^{n} \alpha^{n-p} a_p \text{ car } a_n = \alpha^{n-n} a_n. \end{aligned}$$

donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie. Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. b. D'après **3. a.** et **2.**, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha^n v_0 + \lim_{n\to+\infty} u_{n-1} = \frac{\ell}{1-\alpha}$.