Exercice 1. `[Trigonométrie,` $\mathbb{C}$`]`. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \cos^2(\frac{k\pi}{9})$.

Réponse : Pour tout réel x, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Donc : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \cos^2(\frac{k\pi}{9}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{8}(1+\cos(\frac{2k\pi}{9})) = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\sum_{k=0}^{8} e^{\frac{2ik\pi}{9}}) = \frac{9}{2}$ car $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} e^{\frac{2ik\pi}{9}} = \sum_{k=0}^{8}(e^{\frac{2i\pi}{9}})^k = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{9}}} = 0$ puisque $e^{2i\pi}=1$.

Exercice 2. `[Equation différentielle]`.

1. Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f(x)$$

dans les trois cas suivants : $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = e^x$ et $f(x) = x+1$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{ch}x + x + 1$.

Réponse :

1. *i)* En posant : $y(x) = z(x)e^{-x}$ (méthode de Lagrange), on obtient que $u : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\, e^{-x}$ est une solution de $(\mathcal{E}_f)$ si $f(x) = e^{-x}$.

ii) $v : x \mapsto \dfrac{1}{4}\, e^x$ est une solution (évidente) de $(\mathcal{E}_f)$ si $f(x) = e^x$.

iii) En recherchant une fonction affine solution, on obtient que $w : x \mapsto x-1$ est une solution de $(\mathcal{E}_f)$ si $f(x) = x+1$.

2. La solution générale de l'équation homogène $(\mathcal{H}_f)$ associée à $(\mathcal{E}_f)$ est : $x \mapsto (ax+b)e^{-x}$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et d'après 1. et le principe de superposition, $x \mapsto \frac{1}{2}(u(x)+v(x)) + w(x)$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_f)$ sur $\mathbb{R}$. En conclusion, y est solution de $(\mathcal{E}_f)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \dfrac{x^2}{4}\, e^{-x} + \dfrac{1}{8}\, e^x + x - 1 + (ax+b)e^{-x}$.

Exercice 3. `[Analyse réelle]`. *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2f(x) - f(x+h) - f(x-h)}{h^2}$.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Comparer $(\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx)^2$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,dx$.

Réponse : **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. Posons $Q_x(h) = \dfrac{2f(x) - f(x+h) - f(x-h)}{h^2}$.

Utilisons le développement limité de f à l'ordre 2 en x (formule de Taylor-Young). On a :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + h^2\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Alors $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + h^2\varepsilon(-h)$, et après simplifications :

$$\lim_{h\to 0} Q_x(h) = \lim_{h\to 0}(-1 + \varepsilon(h) + \varepsilon(-h)) = -1.$$

2. *i) Calcul de I.* En intégrant par parties, $I = [x\tan x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} + [\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} + \ln(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} - \ln 2$.

ii) Calcul de J. Effectuons le changement de variable : $x = 2\sin t$, $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ (c'est-à-dire $t = \arcsin(\frac{x}{2})$). On obtient :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2t))\,dt = \pi + [\sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

Remarque. Posons : $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0,2]$. Comme $x^2 + f(x)^2 = 4$, la courbe de f est le quart de cercle de centre $(0,0)$,de rayon $R = 2$, joignant les points $(0,2)$ et $(2,0)$ (faîtes un dessin !) et J, aire d'un quart de de disque de rayon $R = 2$, est égal à π car $\frac{1}{4}\pi R^2 = \pi$.

3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx)^2 = (\int_0^1 f(x)\cdot 1\,dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx \cdot \int_0^1 1^2\,dx$. Donc :

$$(\int_0^1 f(x)\,dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx.$$

Exercice 4. `[Intégration]`. *Inégalité de Gronwall.*
Soient $c \in \mathbb{R}^+$, et u et v deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)\,dt\ (*)$$

1. Soit $f(x) = c + \int_0^x u(t)v(t)\,dt$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1. a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leq v(x)f(x)$.

1. b. En déduire que $g : x \mapsto f(x)\exp(-\int_0^x v(t)\,dt)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Prouver finalement que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \leq c\exp(\int_0^x v(t)\,dt)$.

Réponse : **1. a.** Comme u et v sont continues sur $\mathbb{R}^+$, $\varphi : x \mapsto \int_0^x u(t)v(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $x \mapsto u(x)v(x)$ d'après le cours sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : φ est l'unique primitive de uv s'annulant en 0. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (de classe $\mathcal{C}^1$ plus précisement) (somme d'une fonction constante et φ) avec, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \varphi'(x) = u(x)v(x)$.
Or, d'après $(*)$, on a $u(x) \leq f(x)$ et par hypothèse, $v(x) \geq 0$, d'où $u(x)v(x) \leq f(x)v(x)$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) \leq v(x)f(x).$$

1. b. g est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables avec pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g'(x) = f'(x)\exp(-\int_0^x v(t)\,dt) + f(x)\cdot(-v(x))\exp(-\int_0^x v(t)\,dt) = \exp(-\int_0^x v(t)\,dt)(f'(x) - v(x)f(x)) \leq 0$$

d'après 1. a. Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
2. D'après 1. b., on a en particulier : pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \leq g(0) = f(0) = c$, c'est-à-dire :

$$f(x) \leq c\exp(\int_0^x v(t)\,dt).$$

D'où $u(x) \leq c\exp(\int_0^x v(t)\,dt)$ car $u(x) \leq f(x)$ d'après $(*)$.

Exercice 5. `[Polynômes]`. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ admet n racines complexes distinctes.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\text{Im } z|^d$.

Réponse : **1.** D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, P admet au moins une racine complexe et comme P est de degré n, P admet au plus n racines complexes distinctes. Montrons en raisonnant par l'absurde que chaque racine complexe de P est **simple**. Si z est une racine complexe au moins double de P, alors $P(z) = P'(z) = 0$. Or $P(z) = P'(z) + \frac{z^n}{n!}$ d'où $z = 0$ ce qui est impossible car 0 n'est pas racine de P puisque $P(0) = 1$. En conclusion, P est bien scindé à racines simples :

$$P(X) = (X - z_1)\cdots(X - z_n)$$

où $z_1, \cdots, z_n$ sont les n racines complexes distinctes (simples) de P.
2. *i)* Supposons P scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et notons $x_1, \cdots, x_p$, $p \in [\![1, d]\!]$, ses racines **réelles** distinctes d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \cdots, m_p$. Comme le coefficient du monôme de plus haut degré est égal à 1 :

$$P(X) = (X - x_1)^{m_1}\cdots(X - x_p)^{m_p}.$$

Comme P est de degré d, on a : $m_1 + \cdots + m_p = d$. Alors pour tout $z = \text{Re }(z) + i\text{Im }(z) \in \mathbb{C}$, en utilisant les propriétés du module :

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{p} |z - x_k|^{m_k} = \prod_{k=1}^{p} \underbrace{\sqrt{(\text{Re }(z) - x_k)^2 + \text{Im }(z)^2}}_{\geq |\text{Im } z|}{}^{m_k} \geq \prod_{k=1}^{p} |\text{Im }(z)|^{m_k} = |\text{Im }(z)|^{m_1+\cdots+m_p} = |\text{Im }(z)|^d.$$

ii) Réciproquement, supposons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\text{Im } z|^d$ $(*)$. D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, P est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.
Soit z une racine complexe de P. D'après $(*)$, $\text{Im } z = 0$ (car $0 = |P(z)| \geq |\text{Im } z|^d \geq 0$...) Donc z est réel. Ainsi P n'a que des racines réelles et est donc scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6. `[Equations différentielles]`.

1. Résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ d'inconnue $y :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, dérivable.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-x}$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

Réponse : **1.** Soit $I =]-1, 1[$. Une primitive sur I de $x \mapsto \frac{-x}{1 - x^2}$ est : $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$. Donc la solution générale sur I de l'équation homogène (H) associée à (E) est : $x \mapsto k\,e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} = \frac{k}{\sqrt{1 - x^2}}$, $k \in \mathbb{R}$.

Utilisons la méthode de la variation de la constante pour trouver *toutes* les solutions de (E) sur I.
Posons : $y(x) = \dfrac{k(x)}{\sqrt{1-x^2}} = k(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, où k est dérivable sur I.
On a alors $\forall x \in I$, $y'(x) = k'(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + k(x).(-\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}) = k'(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + xk(x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$.
Et y est solution de (E) sur I ssi

$$\forall x \in I,\ (1-x^2).[k'(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + xk(x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}] - xk(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1$$

ou encore ssi

$$\forall x \in I,\ k'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc y est solution de (E) sur I ssi $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ y(x) = \frac{\arcsin(x) + a}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2. On peut remarquer directement que $f_0 : x \mapsto e^{-x}$ est *une solution* de (E) ou bien obtenir cette solution particulière en posant $y(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$ ou plus généralement $y(x) = k(x)e^{-x}$ avec k deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique de l'équation homogène (H) associée à (E) sont $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$.
D'après le cours, les solutions h à valeurs réelles de l'équation homogène (H) sur $\mathbb{R}$ s'écrivent alors : $x \mapsto ae^{-\frac{x}{2}}\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) + be^{-\frac{x}{2}}\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) = e^{-\frac{x}{2}}(a\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) + b\sin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x))$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Finalement, en utilisant le principe de superposition, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}(a\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + b\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)).$$

Exercice 7 `[Intégration]`.
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.
1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $f(x)^2 \leq x\displaystyle\int_0^x f'(t)^2\,dt$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx$.

Réponse : **1.** Soit $x \in [0,1]$. Comme f est évidemment une primitive de la fonction continue f', on a :

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée avec les fonctions $t \mapsto 1$ et f' sur $[0,x]$ s'écrit :

$$(\int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt)^2 \leq \underbrace{\int_0^x 1^2\,dt}_{=x} \int_0^x f'^2(t)\,dt.$$

Par conséquent : $f(x)^2 = (\displaystyle\int_0^x 1 \cdot f'(t)\,dt)^2 \leq x\int_0^x f'^2(t)\,dt$.

2. Notons $I = \displaystyle\int_0^1 f'^2(t)\,dt$. Soit $x \in [0,1]$. Comme f'^2 est positive, $\displaystyle\int_x^1 f'^2(t)\,dt \in \mathbb{R}^+$ et la relation de Chasles implique alors :

$$I = \int_0^x f'^2(t)\,dt + \int_x^1 f'^2(t)\,dt \geq \int_0^x f'^2(t)\,dt.$$

D'après **1.** on a donc : $f(x)^2 \leq Ix$. En intégrant cette dernière inégalité entre 0 et 1, on obtient :

$$\int_0^1 f(x)^2\,dx \leq I \cdot \int_0^1 x\,dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,dt\,(= \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)^2\,dx).$$

Exercice 8. `[Suite]`.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Montrer que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Réponse : Rappelons que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z}$ $(*)$.
Distinguons deux cas suivant la valeur du réel x :
i) si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $e^{ikx} = 1$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$. Donc la suite (réelle) $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car n'est pas majorée : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$.

ii) si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la suite des **modules** $(|S_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par la constante $\dfrac{2}{|1-e^{ix}|}$.

En effet, $e^{ix} \neq 1$ et par la formule de Moivre et $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$.

Or pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|1-e^{i\theta}| \leq 1 + |e^{i\theta}| = 2$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| = \dfrac{|1-e^{i(n+1)x}|}{|1-e^{ix}|} \leq \dfrac{2}{|1-e^{ix}|}$.

Remarque. Comme $1 - e^{ix} = e^{\frac{ix}{2}}(e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}) = -2i\sin(\frac{x}{2})e^{\frac{ix}{2}}$, $\dfrac{2}{|1-e^{ix}|} = \dfrac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.

Exercice 9. (18/4/2020)`[Suites]`.

Donner des contre-exemples prouvant que les assertions suivantes portant sur des suites réelles sont ... **toutes fausses** :

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 1$.

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} + \cdots + u_{2n}) = 0$.

3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite $(u_{2n} - u_n)$ n'est pas majorée.

5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

6. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

7. Si $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ alors la suite (u_n) converge.

8. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

9. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et positive alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

10. Si (u_n) est une suite bornée telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(u_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ où ℓ est un multiple entier de π.

11. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_{n+1} \geq u_n$.

12. Si (u_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

13. Une suite strictement positive convergeant vers 0 décroît à partir d'un certain rang.

14. Si (u_n) est une suite croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n} - u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

Réponse : **1.** $u_n = \sqrt[n]{2}$.

2. $u_n = \dfrac{1}{n}$ car $\dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \geq n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

3. $u_n = \sqrt{n}$ ou $u_n = \ln(n)$.

4. $u_n = \ln(n)$.

5. $u_n = n+1$ et $v_n = n$.

6. $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

7. $u_n = n$.

8. $u_n = n$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair, $v_n = 0$ si n est pair et $v_n = n$ si n est impair.

9. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$.

10. $u_n = 0$ si n est pair et $u_n = \pi$ si n est impair.

11. $u_n = n$ si n est pair et $u_n = n-1$ si n est impair.

12. $u_n = (\frac{1}{2})^n$.

13. $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$.

14. $u_n = \ln(\ln n)$.

Exercice 10. `[Complexes]`.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note U_p l'ensemble des racines p-ièmes complexes de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{z\in U_p} z^n$.

Réponse : Les racines p-ièmes complexes de 1 sont les p nombres complexes $1, \omega, \cdots, \omega^{p-1}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. Donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{p-1} (\omega^k)^n = \sum_{k=0}^{p-1} (\omega^n)^k.$$

Or $\omega^n = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2in\pi}{p}} = 1 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{2n\pi}{p} = 2m\pi \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ tel que $n = mp$, autrement dit $\omega^n = 1$ si et seulement si n est un multiple entier de p. Ce qui conduit à distinguer deux cas :

i) si n est un multiple entier de p, i.e. il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = pm$, alors $S_n = \sum_{k=0}^{p-1} 1 = p$,

ii) si n n'est pas un multiple entier de p, $\omega^n \neq 1$ et $S_n = \dfrac{1-(\omega^n)^p}{1-\omega^n} = 0$ car $(\omega^n)^p = (\omega^p)^n = 1^n = 1$.

Exercice 11. `[Polynômes].`
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$.
1. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$.

Réponse : **1.** D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $d^0(R) < 2\,(= d^0(X-a)(X-b))$ tel que $P(X) = (X-a)(X-b)Q(X) + R(X)$. Posons $R(X) = \alpha X + \beta$. On a donc en notant encore P la fonction polynôme associée :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = (x-a)(x-b) + \alpha x + \beta \ (*)$$

et considérer $(*)$ pour $x = a$ et $x = b$ conduit à : $P(a) = \alpha a + \beta$ et $P(b) = \alpha b + \beta$. D'où $\boxed{R(X) = \dfrac{P(b)-P(a)}{b-a}X + \dfrac{bP(a)-aP(b)}{b-a}}$.

2. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec $d^0(R) < 2\,(= d^0(X-a)^2)$ tel que

$$P(X) = (X-a)^2 Q(X) + R(X) \ (**).$$

Posons $R(X) = \alpha X + \beta$. En dérivant $(**)$, on obtient :

$$P'(X) = 2(X-a)Q(X) + (X-a)^2 Q'(X) + \alpha \ (***).$$

En évaluant $(**)$ et $(***)$ en a, on obtient : $P(a) = R(a) = \alpha a + \beta$ et $P'(a) = \alpha$. Donc $\boxed{R(X) = P'(a)X + P(a) - aP'(a)}$.

Exercice 12. `[Intégration sur un segment et équation fonctionnelle].`
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))\ (*)$.
1. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En intégrant l'égalité $(*)$ par rapport à y entre 0 et 1, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4(F(\frac{x+1}{2}) - F(\frac{x}{2})) - \int_0^1 f(y)\,dy.$$

2. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, en utilisant $(*)$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(\dfrac{x}{2})$.
3. Prouver finalement que f est une fonction affine.

Réponse : **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé). D'après $(*)$ et les propriétés de l'intégrale :

$$\int_0^1 f(\frac{x+y}{2})\,dy = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\,dy$$

puis, en effectuant le changement de variable $t = \frac{x+y}{2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(\frac{x+y}{2})\,dy$:

$$2\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+1}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\int_0^1 f(y)\,dy$$

et on obtient l'égalité recherchée car $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+1}{2}} f(t)\,dt = F(\frac{x+1}{2}) - F(\frac{x}{2})$.

2. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, car F est dérivable, de dérivée f continue sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto F(\frac{x+1}{2}) - F(\frac{x}{2})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après 1, car égale à une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. En considérant $y = 0$ dans $(*)$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\dfrac{x}{2}) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(0))$ et en dérivant : $f'(\dfrac{x}{2})) = f'(x)$.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}$. En itérant l'égalité précédente, on a donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = f'(\frac{x}{2^n})\ (**)$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f'(\frac{x}{2^n}) = f'(0)$ car f' *est continue en* 0. Mais la suite $f'(\frac{x}{2^n})$ est constante d'après $(**)$ (tous ses termes sont égaux à $f'(x)$), on a donc aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f'(\frac{x}{2^n}) = f'(x)$ (car une suite constante converge vers la constante). Donc par unicité de la limite d'une suite convergente, $f'(x) = f'(0)$. Donc f' est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est affine.
Et comme une fonction affine vérifie l'égalité $(*)$ (à vérifier), on peut donc conclure qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est affine si et seulement

si pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$.

Exercice 13. `[Complexes]`**.**
Soient u, v et w trois nombres complexes de module 1. Montrer que $|u+v+w| = |uv+vw+wu|$.

Indication : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. On a : $z = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

Réponse : On utilise les propriétés de la conjugaison et du module. Comme u, v et w sont de module 1, on a :

$$u+v+w = \frac{1}{\bar{u}} + \frac{1}{\bar{v}} + \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{v}\bar{w}+\bar{w}\bar{u}+\bar{u}\bar{v}}{\bar{u}\bar{v}\bar{w}} = \frac{\overline{vw+wu+uv}}{\overline{uvw}}.$$

D'où $|u+v+w| = \dfrac{|\overline{vw+wu+uv}|}{|\overline{uvw}|} = \dfrac{|vw+wu+uv|}{|uvw|} = \dfrac{|vw+wu+uv|}{|u||v||w|} = |uv+vw+wu|$.

Exercice 14. `[Suite et série]`**.**

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Montrer que l'équation : $x^n - nx + 1 = 0$ admet dans $[0,1]$ une seule solution notée x_n.

1. b. Préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum x_n$? Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Réponse : **1. a.** Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n - nx + 1$. Comme f_n est continue sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[0,1]$ car $f_n'(x) = n(x^{n-1}-1) < 0$ si $x \in [0,1[$, f_n réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(1), f_n(0)] = [2-n, 1]$. Or $0 \in [2-n,1]$, donc il existe un unique réel $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 0$. Cet x est désormais noté x_n.

1. b. Par définition de x_n, $x_n = \dfrac{1+x_n^n}{n}$ donc $\dfrac{1}{n} \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$ car $x_n^n \in [0,1]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ par le théorème des gendarmes.

2. *i) Nature de la série $\sum x_n$.* La série $\sum x_n$ diverge par comparaison de termes positifs car pour tout $n \geq 2$, $x_n \geq \dfrac{1}{n}$ (cf. 1. b.) et la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

ii) Equivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$. D'après 1. b. $(\dfrac{1}{n})^n \leq x_n^n \leq (\dfrac{2}{n})^n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$ par encadrement car

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{-n\ln n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (\frac{2}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n(\ln 2 - \ln n)} = 0$$

et finalement comme $x_n = \dfrac{1+x_n^n}{n}$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + x_n^n = 1$.

Exercice 15. `[Recherche d'équivalent]`**.**

Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}$ où C est une constante à déterminer, de deux façons :

a) en encadrant S_n avec deux intégrales, **b)** en faisant intervenir une somme de Riemann.

Réponse : **a)** Soit $k \geq 2$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}}$ donc pour tout $n \geq 1$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq S_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

et, en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

c'est-à-dire : $[2\sqrt{x}]_{n+1}^{2n+1} \leq S_n \leq [2\sqrt{x}]_n^{2n}$ d'où $2(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}) \leq \dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \leq 2(\sqrt{2}-1)$. Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

En d'autres termes, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

b) Effectuons le changement d'indice $k = n+i$: $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+i}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}$. Donc $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}$ est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ continue sur $[0,1]$ et la subdivision $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1\}$ du segment $[0,1]$. Par théorème,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = [2\sqrt{1+x}]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

Autrement dit, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

Exercice 16. `[Polynômes, sommes de Riemann]`.
1. Soit $n \geq 2$. Ecrire $X^{2n}-1$ comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $r > 1$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+r^2)$ à l'aide de 1.
3. Soit $r > 1$. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos x + r^2)\, dx$. Calculer I à l'aide de 2.

Réponse : **1.** Les $2n$ racines $2n$-ièmes de l'unité sont les nombres complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, 2n-1]\!]$. D'où

$$X^{2n}-1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - e^{\frac{ik\pi}{n}}).$$

Or pour tout $k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $\omega_{2n-k} = \overline{\omega_k}$ donc avec le changement d'indice $i = 2n-k$, on a :

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} (X-\omega_k) = \prod_{i=1}^{n-1} (X - \omega_{2n-i}) = \prod_{i=1}^{n-1} (X - \overline{\omega_i}) = \prod_{k=1}^{n-1} (X - \overline{\omega_k})$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} X^{2n}-1 &= \prod_{k=0}^{2n-1} (X-\omega_k) = (X-\omega_0)(X-\omega_n) \prod_{k=1}^{n-1} (X-\omega_k) \prod_{k=n+1}^{2n-1} (X-\omega_k) \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X-\omega_k) \prod_{k=1}^{n-1} (X-\overline{\omega_k}) = (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X-\omega_k)(X-\overline{\omega_k}) \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - (\omega_k + \overline{\omega_k})X + \omega_k\overline{\omega_k}) \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n})X + 1). \end{aligned}$$

2. Soit $r > 1$. D'après 1. on a : $r^{2n}-1 = (r-1)(r+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (r^2 - 2\cos(\frac{k\pi}{n})\, r + 1)$ d'où

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+r^2) = \ln(r^{2n}-1) - \ln(r^2-1) = \ln(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}).$$

3. Posons pour tout $x \in [0,\pi]$, $f(x) = \ln(1-2r\cos x + r^2)(= \ln(|1-re^{ix}|^2) = 2\ln(|1-re^{ix}|)$. Cette fonction f est bien définie sur $[0,\pi]$ car pour tout $x \in [0,\pi]$, $re^{ix} \neq 1$ (par l'absurde en considérant le module...) et est continue sur $[0,\pi]$ d'après les théorèmes généraux sur la continuité. En considérant la somme de Riemann associée à f et la subdivision $\{\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots, \pi\}$ du segment $[0,\pi]$, on a donc avec 2. :

$$I = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(1-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+r^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1-2r\cos(\frac{k\pi}{n})+r^2) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} \ln(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}).$$

Or $\ln(\dfrac{r^{2n}-1}{r^2-1}) = \ln(r^{2n}-1) - \ln(r^2-1) = 2n\ln(r) + \ln(1-\dfrac{1}{r^{2n}}) - \ln(r^2-1)$ donc $I = 2\pi\ln(r)$.

Exercice 17. `[Polynômes]`. Soit $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n, et scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Prouver que P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ à racines simples.

Réponse : Notons $x_1, \cdots, x_n$ les n racines réelles distinctes de P classées dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Comme P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$, et $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$, le théorème de Rolle donne l'existence d'(au moins) un réel $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$. Or P', de degré $n-1$, ne peut admettre plus de $n-1$ racines distinctes donc pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, il existe un *unique* réel $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$ et P' est donc aussi scindé dans $\mathbb{R}[X]$ avec $n-1$ racines simples : $c_1, \cdots, c_{n-1}$.

Exercice 18. `[Equations différentielles]`.
Résoudre sur $]0,+\infty[$: $x^2y'' - xy' - 4y = 4x^2$. *Indication : on pourra poser* $z(t) = y(e^t)$.

Réponse : *i)* La fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme z est la composée des deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$: y et exp, avec pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$z'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } z''(t) = e^t y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t).$$

Soit $y \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[, \mathbb{R})$. La fonction y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si :

$$\forall x > 0,\ x^2y''(x) - xy'(x) - 4y(x) = 4x^2,$$

ou, comme $t \mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, ssi : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\underbrace{(e^t)^2 y''(e^t)}_{=z''(t)-z'(t)} - \underbrace{e^t y'(e^t)}_{=z'(t)} - 4\underbrace{y(e^t)}_{=z(t)} = 4(e^t)^2$.

Ainisi y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$(\mathcal{E}) : \quad z''(t) - 2z'(t) - 4z(t) = 4e^{2t}.$$

ii) L'équation caractéristique de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ associée à $(\mathcal{E})$ est : $r^2 - 2r - 4 = 0$, i.e. $(r-1)^2 = 5$.
Les deux racines réelles de cette équation caractéristique sont : $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
D'après le cours, $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est solution de $(\mathcal{H})$ ssi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = ae^{r_1 t} + be^{r_2 t} = ae^{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})t} + be^{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})t}$.
Afin de déterminer *une solution particulière* z de $(\mathcal{E})$, posons : $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = e^{2t}u(t)$.
On constate que z est solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ ssi u est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle dont le second membre est égal à 1. En effet, comme $u(t) = e^{-2t}z(t)$, u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Et on a :

$$z'(t) = (u'(t) + 2u(t))e^{2t},\ z''(t) = (u''(t) + 4u'(t) + 4u(t))e^{2t}.$$

Donc z est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $u''(t) + 2u'(t) - 4u(t) = 4$. Une solution évidente de cette dernière équation étant la fonction constante égale à -1, $z_p : t \mapsto -e^{2t}$ est donc une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est solution de $(\mathcal{E})$ ssi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = ae^{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})t} + be^{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})t} - e^{2t}$ et finalement y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0,\ y(x) = z(\ln x) = ax^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + bx^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - x^2.$$

Exercice 19. `[Théorème de Rolle].`
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.
On fixe $x \in]a,b[$. On pose $g_x(t) = f(t) - \frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ où A (dépendant de x) est tel que $g_x(x) = 0$.

1. Préciser la valeur de A. Prouver, à l'aide du théorème de Rolle, l'existence d'un réel c (dépendant de x) tel que $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$.

2. Soit $M = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$. Vérifier que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M\,\frac{(x-a)(b-x)}{2}$. En déduire que $|f'(a)| \leq M\,\frac{b-a}{2}$ et $|f'(b)| \leq M\,\frac{b-a}{2}$.

Réponse : **1.** On a : $g_x(x) = 0 \Leftrightarrow A = \dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$ $(*)$. La fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ car f et $t \mapsto (t-a)(t-b)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. Comme $g_x(a) = g_x(x) = 0$, le théorème de Rolle utilisé avec g_x (continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$) donne l'existence d'un réel $c_1 \in]a,x[$ tel que $g'_x(c_1) = 0$. De même, comme $g_x(x) = g_x(b) = 0$, il existe un réel $c_2 \in]x,b[$ tel que $g'_x(c_2) = 0$. Et comme $g'_x(c_1) = g'_x(c_2) = 0$, le théorème de Rolle utilisé cette fois avec g'_x (continue sur $[c_1,c_2]$ et dérivable sur $]c_1,c_2[$) donne l'existence d'un réel $c \in]c_1,c_2[$ tel que $g''_x(c) = 0$. Pour tout $t \in [a,b]$, $g''_x(t) = f''(t) - A$ donc $A = f''(c)$, c'est-à-dire : $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$ d'après $(*)$.

2. *i)* L'inégalité est évidente si $x = a$ ou $x = b$. Et si $x \in]a,b[$, d'après 1. il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$ donc $|f(x)| = \dfrac{|x-a||x-b|}{2}|f''(c)| = \dfrac{(x-a)(b-x)}{2}|f''(c)| \leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$ par définition de M.

ii) On a donc pour tout $x \in]a,b[$, $|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}| = \dfrac{|f(x)|}{x-a} \leq M\dfrac{b-x}{2}$. En faisant tendre x vers a^+, on obtient $|f'(a)| \leq M\,\dfrac{b-a}{2}$. On obtient de même $|f'(b)| \leq M\,\dfrac{b-a}{2}$ en faisant tendre x vers b^- dans l'inégalité $|\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}| (= \dfrac{f(x)}{b-x}) \leq M\dfrac{x-a}{2}$ vérifiée pour tout $x \in]a,b[$.

Exercice 20. `[Complexes].`

1. Soit $(u,v,w) \in \mathbb{C}^3$. Prouver que $2|u| \leq |u+v| + |v+w| + |w+u|$.

2. Soit $(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{C}^4$. Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leq \sum_{1\leq i<j\leq 4} |z_i + z_j|$.

Réponse : **1.** On a : $2u = (u+v) + (-(v+w)) + (w+u)$. Donc par inégalité triangulaire :

$$2|u| = |2u| \leq |u+v| + |-(v+w)| + |w+u| = |u+v| + |v+w| + |w+u|.$$

2. On utilise quatre fois l'inégalité précédente. On a :

$$\begin{array}{rcl} 2|z_1| & \leq & |z_1+z_2| + |z_2+z_3| + |z_3+z_1| \\ 2|z_2| & \leq & |z_2+z_3| + |z_3+z_4| + |z_4+z_2| \\ 2|z_3| & \leq & |z_3+z_4| + |z_4+z_1| + |z_1+z_3| \\ 2|z_4| & \leq & |z_4+z_1| + |z_1+z_2| + |z_2+z_4| \end{array}$$

d'où l'inégalité demandée en additionnant membre à membre.

Exercice 21. `[Complexes]`.

1. Soit $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Simplifier $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$.
2. En déduire la valeur de $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Réponse : **1.** Comme $a \neq 1$ et $a^5 = 1$, $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = \dfrac{1 - a^5}{1 - a} = \dfrac{0}{1 - a} = 0$.
Remarque : $1, a, a^2, a^3, a^4$ sont les racines cinquièmes complexes de 1 et leur somme est nulle.
2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $a^k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$. D'après 1. :

$$1 + \text{Re}\,(a) + \text{Re}\,(a^2) + \text{Re}\,(a^3) + \text{Re}\,(a^4) = \text{Re}\,(1 + a + a^2 + a^3 + a^4) = \text{Re}\,(0) = 0,$$

c'est-à-dire

$$1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 0$$

d'où l'égalité demandée car $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos(2\pi - \frac{4\pi}{5}) = \cos(\frac{4\pi}{5})$ et $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos(2\pi - \frac{2\pi}{5}) = \cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. Comme $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$, on a donc : $4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos\frac{2\pi}{5} + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$.
Or $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ et finalement : $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Exercice 22. `[Equation différentielle]`.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = \cos x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indications. La solution générale de (H) est : $x \mapsto ae^{-2x} + be^x$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère $(E_{\mathbb{C}})$: $Y'' + Y' - 2Y = e^{ix}$.
On pose : $Y(x) = Z(x)e^{ix}$, $Z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On vérifie que Y est solution de $(E_{\mathbb{C}})$ si et seulement si :

$$Z'' + (1 + 2i)Z' + (i - 3)Z = 1$$

dont une solution (évidente) est $Z : x \mapsto \frac{1}{i-3}$. Donc une solution particulière de (E) est : $x \mapsto \text{Re}\,(\frac{1}{i-3}e^{ix}) = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$.
En conclusion, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x + ae^{-2x} + be^x$.

Exercice 23. `[Moyennes arithmétique et géométrique]`.
Soit $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose : $m = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ et $G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$.
1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq \ln m + \frac{1}{m}(x - m)$.
2. En déduire $G \leq m$. *Indication : considérer 1. avec $x = x_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, et sommer.*

Réponse : **1.** *Plusieurs méthodes sont possibles :*
i) Etudier les variations sur $]0, +\infty[$ de $d : x \mapsto \ln m + \frac{1}{m}(x - m) - \ln x$ et en déduire que d est positive sur $]0, +\infty[$.
ii) Utiliser l'égalité des accroissements finis : il existe $c \in]m, x[$ (ou $]x, m[$) tel que : $\ln x - \ln m = (x - m)\dfrac{1}{c}$.
iii) Utiliser $\ln x - \ln m = \displaystyle\int_m^x \frac{dt}{t}$.
2. D'après 1. on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\ln x_k \leq \ln m + \frac{1}{m}(x_k - m)$ et en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leq n \ln m + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m),$$

c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leq n \ln m$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k - m) = \sum_{k=1}^{n} x_k - nm = 0$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln x_k \leq \ln m,$$

c'est-à-dire $\ln G \leq \ln m$, donc $G \leq m$ par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24. `[Intégration]`.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Prouver que $\displaystyle(\int_0^1 f'(x)^2\,dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx \cdot \int_0^1 f''(x)^2\,dx$.

Réponse : On commence par intégrer par parties :

$$\int_0^1 f'(x)^2\,dx = \int_0^1 f'(x)\cdot f'(x)\,dx = [f(x)f'(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\cdot f''(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\cdot f''(x)\,dx \text{ car } f(1)=f(0)=0$$

et on termine avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 f'(x)^2\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\cdot f''(x)\,dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\,dx \cdot \int_0^1 f''(x)^2\,dx.$$

Exercice 25. `[Limite]`.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$.

Réponse : Encadrons $S_n = \sum\limits_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec des intégrales. La méthode est très classique :

Soit $k \geq 2$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$, on a : $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$ donc pour tout $n \geq 2$:

$$\sum_{k=n}^{3n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \sum_{k=n}^{3n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$$

ou encore, en utilisant la relation de Chasles : $\int_n^{3n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \int_{n-1}^{3n} \frac{dx}{x}$, c'est-à-dire : $\ln(3+\frac{1}{n}) \leq S_n \leq \ln(\frac{3n}{n-1})$.

Comme les deux suites encadrant S_n tendent vers $\ln 3$, par théorème on a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} = \ln 3$.

Exercice 26. `[Une inégalité de convexité]`.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq f(a) + f'(a)(t-a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.

Indications : Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $d : t \mapsto f(t) - (f(a) + f'(a)(t-a))$. En déduire que d est positive sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ de f est donc au dessus de la tangente en n'importe quel point $(a, f(a))$ de $\mathcal{C}_f$.

Rappel. On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27. `[Complexes]`.

1. Soit $a = e^{\frac{i\pi}{11}}$. Simplifier $S = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9$.

2. En déduire la valeur de $T = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$.

Réponse : **1.** Comme $a^2 = e^{\frac{2i\pi}{11}} \neq 1$, $S = a(1 + a^2 + (a^2)^2 + (a^2)^3 + (a^2)^4) = a\frac{1-(a^2)^5}{1-a^2} = a\frac{1-a^{10}}{1-a^2}$.

Or $1 - a^{10} = 1 - e^{\frac{10i\pi}{11}} = e^{\frac{i5\pi}{11}}(e^{-\frac{i5\pi}{11}} - e^{\frac{i5\pi}{11}}) = -2i\sin(\frac{5\pi}{11})e^{\frac{i5\pi}{11}}$, idem $1 - a^2 = -2i\sin(\frac{\pi}{11})e^{\frac{i\pi}{11}}$ donc $S = \frac{\sin(\frac{5\pi}{11})}{\sin(\frac{\pi}{11})}e^{\frac{i5\pi}{11}}$.

2. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Donc d'après 1. $T = \mathrm{Re}\,(S) = \frac{\sin(\frac{5\pi}{11})}{\sin(\frac{\pi}{11})}\cos(\frac{5\pi}{11}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{10\pi}{11})}{\sin(\frac{\pi}{11})} = \frac{1}{2}$ car $\sin(\frac{10\pi}{11}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{11}) = \sin(\frac{\pi}{11})$.

Exercice 28. `[Dérivation]`.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons : $Q_n(x) = (x^2-1)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. En remarquant que $Q_{n+1}(x) = (x^2-1)Q_n(x)$, exprimer $Q_{n+1}^{(n+2)}(x)$ en fonction de $P_n(x)$, $P_n'(x)$ et $P_n''(x)$.

2. Exprimer $Q_{n+1}'(x)$ en fonction de $Q_n(x)$ et en déduire une autre expression de $Q_{n+1}^{(n+2)}(x)$.

3. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par P_n.

Réponse : **1.** On utilise la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{(n+2)}(x) &= ((x^2-1)Q_n(x))^{(n+2)} = (x^2-1)Q_n^{(n+2)}(x) + \binom{n+2}{1}(x^2-1)'Q_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+2}{2}(x^2-1)''Q_n^{(n)}(x) \\ &= (x^2-1)P_n''(x) + 2(n+2)xP_n'(x) + (n+2)(n+1)P_n(x). \end{aligned}$$

2. On a : $Q_{n+1}'(x) = 2(n+1)x(x^2-1)^n = 2(n+1)\,xQ_n(x)$ donc

$$Q_{n+1}^{(n+2)}(x) = Q_{n+1}'^{(n+1)}(x) = 2(n+1)(xQ_n(x))^{(n+1)}$$

et en utilisant la formule de Leibniz :

$$Q_{n+1}^{(n+2)}(x) = 2(n+1)[xQ_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1}x'Q_n^{n}(x)] = 2(n+1)[xP_n'(x) + (n+1)P_n(x)].$$

3. D'après 1. et 2. P_n est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(x^2-1)y''(x)+2xy'(x)-n(n+1)y(x)=0.$$

Exercice 29. `[Intégration. Equation différentielle]`.
Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt+x^2\ (*)$$

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.
1. a. Calculer $f(0)$.
1. b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. *Indication :* $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=\cdots$
Préciser la valeur de $f'(0)$.
1. c. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y''-y=2$.
2. Résoudre l'équation (E). Déterminer l'unique solution de (E) telle que : $y(0)=y'(0)=0$.
3. Déterminer toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

Réponse : **1. a.** $f(0)=-\displaystyle\int_0^0 tf(t)\,dt+0^2=0$.

1. b et c. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt+x^2$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ (resp. $x\mapsto\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$) est, d'après le cours sur l'intégrale, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée la fonction f (resp. $x\mapsto xf(x)$). Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=1.\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)+2x=\int_0^x f(t)\,dt+2x. \tag{1}$$

En particulier, $f'(0)=0$. L'égalité (1) implique que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)=f(x)+2. \tag{2}$$

Donc f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy : $y''-y=2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

2. L'équation caractéristique de (H) : $y''-y=0$ est $r^2-1=0$. Comme cette équation a deux solutions réelles $r=-1$ et $r=1$, d'après le cours, y est solution réelle de (H) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $y(x)=ae^x+be^{-x}$. De plus, $x\mapsto -2$ est une solution évidente de (E). Donc, par superposition, y est solution réelle de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $y(x)=ae^x+be^{-x}-2$. Et $y(0)=y'(0)=0\Leftrightarrow a+b=2$ et $a-b=0$ d'où $a=b=1$. Ainsi, $x\mapsto e^x+e^{-x}-2=2(\mathrm{ch}x-1)$ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy : $y''-y=2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

3. D'après 1. c. et 2. la seule fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ susceptible de vérifier $(*)$ est la fonction

$$\phi : x\mapsto 2(\mathrm{ch}x-1).$$

Et ϕ vérifie la condition $(*)$ car pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x\int_0^x \phi(t)\,dt-\int_0^x t\phi(t)\,dt &= 2x\int_0^x(\mathrm{ch}t-1)\,dt-\int_0^x t\phi(t)\,dt\\
&= 2x(\mathrm{sh}x-x)-2\int_0^x(t\mathrm{ch}t-t)\,dt\\
&= 2x(\mathrm{sh}x-x)-2\{[t\mathrm{sh}t]_0^x-\int_0^x \mathrm{sh}t\,dt\}+x^2 \quad \text{(intégration par parties)}\\
&= 2\int_0^x \mathrm{sh}t\,dt-x^2\\
&= \phi(x)-x^2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\phi(x)=\displaystyle\int_0^x (x-t)\phi(t)\,dt+x^2$. Donc ϕ est l'unique fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

Exercice 30. `[Trigonométrie]`. Soit $x\in]0,2\pi[$. Montrer que $\arctan(\dfrac{\sin x}{1-\cos x})=\dfrac{\pi-x}{2}$.

Réponse : On a : $\sin x=2\sin(\dfrac{x}{2})\cos(\dfrac{x}{2})$ et $1-\cos x=2\sin^2(\dfrac{x}{2})$ donc

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}=\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2})=\tan(\frac{\pi-x}{2}).$$

Or $\dfrac{\pi-x}{2}\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, donc $\dfrac{\pi-x}{2}=\arctan(\dfrac{\sin x}{1-\cos x})$.

Exercice 31. `[Analyse réelle]`.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$.

1. a. Vérifier que f est continue en 0.

1. b. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$.

Indication : récurrence. Exprimer P_{n+1} à l'aide de P_n et P_n'.

Préciser P_1, P_2, P_3.

3. En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Préciser $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Réponse : **1. a.** f est clairement continue à gauche en 0 et continue à droite en 0 car $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 = f(0)$.

1. b. Effectuons le changement de variable $t = \frac{1}{x}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0.$$

Et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2. La propriété est vraie pour $n = 0$ avec $P_0(X) = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $x > 0$,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (P_n'(x)x^{-2n} - 2nP_n(x)x^{-2n-1})e^{-\frac{1}{x}} + \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2\, P_n'(x) + (1-2nx)P_n(x)}{x^{2(n+1)}}e^{-\frac{1}{x}}.$$

Donc la propriété est vraie pour l'entier $n+1$ avec le polynôme $P_{n+1}(X) = X^2 P_n'(X) + (1 - 2nX)P_n(X)$ $(*)$.

La relation $(*)$ conduit à : $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 - 2X$, $P_3(X) = 6X^2 - 6X + 1$.

3. La fonction f, nulle sur $]-\infty, 0[$, est évidement indéfiniment dérivable sur $]-\infty, 0[$ (de dérivées succsessives nulles) et f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, f est indéfiniment dérivable en 0 avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. En effet, cette propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Alors avec le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ et par croissances comparées :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} t^{2n+1} P_n(\frac{1}{t})\, e^{-t} = P_n(0) \cdot \lim_{t\to+\infty} t^{2n+1} e^{-t} = 0.$$

Et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$. Donc $f^{(n)}$ est dérivable en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$. Ainsi la propriété est vraie pour l'entier $n+1$.

Exercice 32. `[Intégrales]`.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \sin^2 t\, dt$.

2. *Plus compliqué.* Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\, dt$.

Indications : **1.** On linéarise $\sin^2 t$. On en déduit que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2x)}{4x}$.

La limite cherchée est donc $\frac{1}{2}$.

2. Comme la fonction $|\sin|$ est π-périodique sur $\mathbb{R}$, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+\pi} |\sin t|\, dt = \int_0^\pi |\sin t|\, dt = \int_0^\pi \sin t\, dt = 2$.

Soit $x > 0$. Notons N_x la partie entière de $\dfrac{x}{\pi}$. On a donc : $N_x\pi \leq x < (N_x + 1)\pi$ et par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\int_0^x |\sin t|\, dt &= \int_0^{N_x\pi} |\sin t|\, dt + \int_{N_x\pi}^x |\sin t|\, dt \\
&= \sum_{k=0}^{N_x-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin t|\, dt + \int_{N_x\pi}^x |\sin t|\, dt \\
&= 2N_x + \int_{N_x\pi}^x |\sin t|\, dt.
\end{aligned}$$

On montre avec le théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{N_x}{x} = \frac{1}{\pi}$. De plus, $\displaystyle\int_{N_x\pi}^x |\sin t|\, dt \leq \int_{N_x\pi}^{(N_x+1)\pi} |\sin t|\, dt\, (= 2)$. D'où

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\, dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{2N_x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{N_x\pi}^x |\sin t|\, dt = \frac{2}{\pi} + 0 = \frac{2}{\pi}.$$

Exercice 33. `[Suites]`. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n k!$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n-2}}{n!}$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n!}$.

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^n e^{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}$.

Réponse : **1.** Soit $n \geq 2$. Pour tout $\forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $k! \leq (n-2)!$, donc

$$0 \leq s_{n-2} = \underbrace{0! + 1! + \cdots + (n-2)!}_{n-1\, termes} \leq (n-1)(n-2)! = (n-1)!$$

et $0 \leq \dfrac{s_{n-2}}{n!} \leq \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n-2}}{n!} = 0$ par le théorème de limite par encadrement (des gendarmes).

Comme $s_n = s_{n-2} + (n-1)! + n!$, on a : $\dfrac{s_n}{n!} = \dfrac{s_{n-2}}{n!} + \dfrac{1}{n} + 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_n}{n!} = 0 + 0 + 1 = 1$ (limite d'une somme de trois suites convergentes). En d'autres termes, $s_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{k^2}$. Soit $n \geq 1$. Pour tout $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $e^{k^2} \leq e^{(n-1)^2}$, donc $0 \leq S_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{k^2} \leq ne^{(n-1)^2}$ et

$$0 \leq \frac{S_{n-1}}{e^{n^2}} \leq ne^{(n-1)^2 - n^2} = ne^{-2n+1}.$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-2n+1} = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n-1}}{e^{n^2}} = 0$ par le théorème de limite par encadrement (des gendarmes).

Et comme $\dfrac{S_n}{e^{n^2}} = \dfrac{S_{n-1} + e^{n^2}}{e^{n^2}} = \dfrac{S_{n-1}}{e^{n^2}} + 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{e^{n^2}} = 1$. En d'autres termes, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}$.

Exercice 34. `[Suites]`. Déterminer les applications f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f \circ f(x) = 6x - f(x)$.
Indication. Soit f une telle application. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Considérer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

Réponse : Analyse. Par hypothèses sur f, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels *positifs*, *récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants* car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f(f(x_n)) = 6x_n - f(x_n) = 6x_n - x_{n+1},$$

c'est-à-dire :

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 0.$$

Comme 2 et -3 sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique associée : $r^2 + r - 6 = 0$, il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = a2^n + b(-3)^n.$$

La constante b est nécessairement nulle. En effet, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{2}{3})^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$), on a d'une part $b \geq 0$ car $b = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{2n}}{3^{2n}}$ (limite d'une suite convergente de réels positifs), et d'autre part $b \leq 0$ car $-b = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{2n+1}}{3^{2n+1}}$.
On a donc en particulier : $f(x) = x_1 = 2a = 2x$ (et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}^+$).
Synthèse. On constate que l'application $x \mapsto 2x$ est bien une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant la condition : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = 6x - f(x)$ ($2(2x) = 6x - 2x$!) et l'analyse effectuée ci-dessus montre que c'est la seule application vérifiant ces conditions.

Exercice 35. `[Calcul matriciel]`. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Réponse : On a : $A = I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = O_3$.
Comme I_3 et J commutent, par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geq 2$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\forall k \geq 3,\ J^k = O_3$.

Exercice 36. `[Algèbre linéaire]`. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme nilpotent d'indice 2.
1. Justifier que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Déterminer $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse : 1. Notons θ l'endomorphisme nul de E et 0_E le vecteur nul de E. Par hypothèse, $f \neq \theta$ et $f \circ f = \theta$.
i) Vérifions l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$: Soit $v \in \operatorname{Im} f$. Il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ et on a bien $v \in \operatorname{Ker} f$ car

$$f(v) = f(f(u)) = (f \circ f)(u) = \theta(u) = 0_E.$$

ii) Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \subset E$, on a : $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq 3$. Or $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = 3$ (Théorème du rang).
D'où $3 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} f$ et donc $\dim \operatorname{Ker} f \in \{2, 3\}$ car $\dim \operatorname{Ker} f \in \mathbb{N}$. Comme $f \neq \theta$, $\operatorname{Ker} f \neq E$, on a donc :

$$\dim \operatorname{Ker} f = 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 1.$$

2. Soit (e_1, e_2, e_3) une telle base de E. On doit avoir : $f(e_1) = f(e_2) = 0_E$ et $f(e_3) = e_2$.

Choisissons un vecteur non nul e_2 de Im f (un tel vecteur existe car Im f est une droite vectorielle de E). Puis e_3 un antécédent de e_2 par f (un tel vecteur existe car $e_2 \in \operatorname{Im} f$) et enfin e_1 un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ non colinéaire à e_2 (un tel vecteur existe car $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel de E (contenant e_2)). Cette famille (e_1, e_2, e_3) est bien une base de E car elle est libre (maximale) :

soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_E$ $(*)$. Alors $f(ae_1 + be_2 + ce_3) = f(0_E) = 0_E$ d'où, par linéarité de f, $ce_2 = 0_E$ car $f(e_1) = f(e_2) = 0_E$, c'est-à-dire $c = 0$ car e_2 est non nul. L'égalité $(*)$ devient : $ae_1 + be_2 = 0_E$, et comme (e_1, e_2) est libre (c'est une base de $\operatorname{Ker} f$), $a = b = 0$. Dans cette base, la matrice de f est A.

Exercice 37. `[Variables aléatoires]`. **1.** Soient $x \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}$.

2. Soient $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

Réponse : 1. Grâce à la linéarité de l'intégrale et la formule du binôme, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^x t^k \, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \, dt = \int_0^x (t+1)^n \, dt = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1}.$$

2. La variable aléatoire Y admet une espérance égale par le théorème du transfert à :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k+1}.$$

En utilisant l'égalité de la question précédente avec $x = \dfrac{p}{1-p}$, on obtient finalement après simplifications :

$$E(Y) = \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \cdot \frac{(\frac{p}{1-p} + 1)^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

Exercice 38. `[Algèbre linéaire]`. Soit E un espace vectoriel. Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Prouver que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Indications : On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : soit $u \in E$. Supposons que $u = v + w$ avec $v \in \operatorname{Ker} f$ et $w \in \operatorname{Im} g$. Soit $a \in E$ tel que $w = g(a)$.

Montrer que $w = g(f(u))$ et $v = u - g(f(u))$...

Synthèse : Vérifier que $u - g(f(u)) \in \operatorname{Ker} f$ et $g(f(u)) \in \operatorname{Im} g$...

Exercice 39. `[Algèbre linéaire]`. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $G = \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$. Justifier que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection vectorielle p sur F, de direction G.

Indications : F est un plan vectoriel (à justifier en déterminant une base de F) et G une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, donc $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Vérifier que $F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Posons $u' = (x', y', z') = p(u)$. Comme $u'' = u - u' \in D$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u'' = k(1, 1, 1)$. En déduire que $x' = x - k, y' = y - k, z' = z - k$ puis $k = \frac{x+y+z}{3}$. Finalement, on a : $x' = \frac{2x-y-z}{3}$, $y' = \frac{-x+2y-z}{3}$, $z' = \frac{-x-y+2z}{3}$ et la matrice cherchée est la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : On a : $A^2 = A$ car $p \circ p = p$.