EXERCICES DE REVISION SUP-SPE niveau 0

1 Dériver/intégrer

En précisant les intervalles sur lesquels ces calculs ont un sens :

1. Dériver : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x+1}$; $g(x) = \arcsin(2x+3)$
2. Intégrer : $f(x) = (x+1)\sin x$; $g(x) = e^{2x}\cos x$; $h(x) = \ln(1-x)$;

   $k(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x-2)}$; $l(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2x+4}$.
3. Calculer la dérivée n-ième de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ en utilisant une décomposition en éléments simples.

Vous devez connaître les formules de dérivation, dont la formule de Leibniz, les dérivées et les primitives usuelles. Listez les méthodes classiques d'intégration pour les catégories type, en particulier les fonctions rationnelles simples.

2 Comparer deux réels

Des inégalités classiques à connaître et à savoir redémontrer :

1. $\forall x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$ (représenter graphiquement)
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1+x$ (représenter graphiquement)
3. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leqslant |x|$ (représenter graphiquement)
4. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$ (*très simple, et très utile* !)

Attention : On ne peut pas écrire une inégalité entre deux nombres complexes non réels.

3 Déterminer et utiliser des développements limités et des équivalents

1. **Incontournable :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (elle n'est pas égale à 1 ! !)
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{x-\frac{1}{2}\sin(2x)}$; $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{e}{e^x-e} - \dfrac{1}{x-1}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{2n}$
3. Développement limité à l'ordre 6 en 0 de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}$
4. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$ et interprétation graphique

Il faut bien connaître les équivalents et les développements limités usuels, ainsi que les règles de calcul sur les équivalents et les calculs "interdits".

4 Etudier la nature d'une série à termes positifs

$$\sum \ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \quad ; \quad \sum n^2 e^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad \sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{1+n^2}\right)$$

Il faut bien connaître les exemples usuels, séries géométriques et séries de Riemann, ainsi que les règles de comparaison.

5 Résoudre une équation différentielle linéaire

1. d'ordre 1 : $xy' + (x-1)y = x^2$
2. d'ordre 2 à coefficients continus : $y'' + 3y' + 2y = x - 5\cos(2x)$
3. **Incontournable :** $y'' + \omega^2 y = 0$

Vous devez revoir le théorème de Cauchy-Lipschitz et les propriétés sur la structure de l'ensemble des solutions.

6 Calculer avec les nombres complexes

Pensez à faire des dessins. Il faut connaître les interprétations géométriques : partie réelle et imaginaire, module, argument, équation d'un cercle.

1. Module et argument de : $\dfrac{-\sqrt{3}-5i}{2+i\sqrt{3}}$; $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (3+4i)z^2 - 3(1-4i)z + 9 = 0$ sachant qu'il existe une racine réelle.

Il faut connaître les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.

7 Appliquer la méthode du pivot de Gauss

1. pour résoudre un système d'équations linéaires : $\begin{cases} 2x + y - z &= 1 \\ 3x - 2y + 3z &= 2 \\ -x + 3y - 5z &= -1 \end{cases}$
2. pour déterminer le rang d'une matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & -a & -1 \\ a & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$

8 Calculer sur les matrices

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n par deux méthodes (au moins).
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1} par deux méthodes (au moins).
3. Soit E l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et telles que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$. Montrer que E est stable pour le produit matriciel.

9 Etudier si une famille est libre

1. Dans $\mathbb{R}^4$: $u = (1,1,1,-1), v = (2,1,-1,-3), w = (-1,2,1,0), z = (0,-1,1,1)$
2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$: $P_1 = X^3 + 3X^2 - X + 1, P_2 = X^3 + X^2 + 4X - 1, P_3 = X^2 + 3X$, $P_4 = 3X^2 - 2X + 2$.
3. Dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $f_1 : x \mapsto \sin(x)$, $f_2 : x \mapsto \sin(2x)$, $f_3 : x \mapsto \sin(3x)$

Exemples à connaître : une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre ; une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

10 Relier équation et base d'un s.e.v.

1. Dans $E = \mathbb{R}^4$, montrer que : $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z + t = 0, 2x - 3y + z + 2t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base. Quelle est sa dimension ?
2. Dans $\mathbb{R}^4$, on note : $\vec{u} = (1,2,3,4)$, $\vec{v} = (-1,1,1,1)$ et $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$. Quelle est la dimension de F ? Déterminer un système d'équations de F.

Il faut connaître la caractérisation d'un sous-espace vectoriel. Mais montrer qu'une partie F d'un espace vectoriel E est "le sous-espace vectoriel engendré" par une famille de vecteurs prouve en particulier que c'est un sous-espace vectoriel !

11 Ecrire et utiliser une matrice d'application linéaire

1. Soit f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $f(P)$ tel que : $f(P)(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.
   Montrer que f est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base canonique. Déterminer son noyau et son image.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 16 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$, une base de $\ker(f)$ et montrer que : $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Le lien entre matrice et application linéaire est lié aux colonnes de la matrice.

12 Montrer qu'une application est un produit scalaire

1. Dans $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$, montrer que l'application $\varphi : (f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^t dt$ est un produit scalaire.
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ est un produit scalaire.

13 Prouver une inclusion

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que : $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que : $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$.

Pour montrer l'inclusion $A \subset B$, on fixe un élément quelconque de A et on montre qu'il appartient à B.

14 Prouver l'égalité de deux ensembles par double inclusion

Soit $A = \{(4a+b, 2a-b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$, $B = \{(4m-p+6, 2m+p) \ / \ (m,p) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $C = \{(4m+2p, 2m+p) \ / \ (m,p) \in \mathbb{Z}^2\}$.
Démontrer que : $A = B$. A et C sont-ils égaux ?

15 Construire un raisonnement par récurrence

1. Récurrence simple :
   Soit $f(x) = \arctan \dfrac{1-x}{1+x}$. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   Montrer que, pour tout $n > 0$, f admet une dérivée d'ordre n de la forme :
   $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$, où P_n est une fonction polynôme de degré $n-1$.

2. Récurrence double :
   On définit la suite de polynômes : $U_0 = 1, U_1 = X-1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = (X-2)U_{n+1} - U_n$.
   Montrer que, pour tout n, u_n est de degré n et unitaire.

3. Récurrence forte :
   On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ en posant $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = 0$.
   On suppose de plus qu'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M^n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leqslant (2M)^n$.

16 Raisonner par contraposée

n étant un entier strictement positif, montrer que si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

17 Prouver une équivalence par double implication

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $\ker u = \ker(u^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im} u \cap \ker u = \left\{\vec{0}\right\}$.

18 Raisonner par l'absurde

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas.
Montrer que f est injective.

19 Raisonner par analyse et synthèse

Autrement dit : raisonner par condition nécessaire / condition suffisante.

1. Déterminer toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre l'équation : $M + \operatorname{tr}(M) I_n = A$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   ($\operatorname{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.)

Cette liste n'est pas exhaustive. N'hésitez pas à la compléter !!