Opérations dans $\mathbb{R}$.
Formules sommatoires.
Systèmes linéaires.

I. Opérations dans $\mathbb{R}$ (valable dans $\mathbb{C}$).

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède **deux lois internes (opérations)** : une **addition** $(+)$ **et une multiplication** $(\times)$ qui vérifient les propriétés suivantes et qui en font un **corps commutatif** :

- Tous réels $x, y, et\ z$ vérifient :$(x+y)+z = x+(y+z)$ et $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$. On dit que les deux opérations $(+)$ et $(\times)$sont associatives.
- Tous réels $x\ et\ y$, $x+y = y+x$ et $x\times y = y\times x$. Les deux opérations sont dites commutatives.
- Tout réel x vérifie $x+0 = x$ (ajouter 0 n'a aucun effet). On dit que 0 est l'élément neutre pour (+).
- Pour tout réel x $x\times 1 = x$ (multiplier par 1 n'a aucun effet). cela signifie que 1 est l'élément neutre pour (×).
- Tout réel x a un symétrique pour l'addition appelé opposé de x qui est $-x$ car il vérifie : $x+(-x) = 0$ (ajouter à un réel son opposé donne l'élément neutre 0 de l'addition)

par définition, $a-b = a+(-b)$. On définit ainsi la soustraction de réels.

- Tout réel x non nul a un symétrique pour la multiplication appelé inverse de x qui est x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ car il vérifie $x\times\frac{1}{x} = 1$. (multiplier un réel par son inverse donne l'élément neutre 1 de la multiplication). Par définition, si $b\neq 0$ alors $a\times\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$. On définit ainsi la division de réels.
- Pour tous réels x, y et z,$(x+y)\times z = (x\times z)+(y\times z)$. La multiplication est dite distributive sur l'addition.
- Pour tous réels x et y , $(x\times y = 0\ si\ et\ ssi\ x = 0\ ou\ y = 0)$. On dit alors que la multiplication de $\mathbb{R}$ est **INTÈGRE**. (ou $\mathbb{R}$ est INTÈGRE). Cette propriété est essentielle pour résoudre les équations.

2. Equations : Soient a , b, et x réels (ou complexes).

- $$\left(a+x=b \underset{\underset{\text{de part et d'autre}}{\text{on ajoute } a}}{\overset{\overset{\text{on soustrait } a}{\text{de part et d'autre}}}{\Leftrightarrow}} x=b-a\right) \quad \text{et} \quad \left(ax=b \underset{\underset{\text{de part et d'autre}}{\text{on multiplie par } a}}{\overset{\overset{\text{on multiplie par } 1/a}{\text{de part et d'autre}}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} x=\frac{b}{a} & si\ a=0 \\ x\ quelconque\ si\ a=\ b=0 \\ impossible\ si\ a=0\ et\ b\neq 0 \end{cases}\right).$$
- Soit A et B deux expressions dépendantes de x. $A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0\ ou\ B(x) = 0$.

3. Règles de calcul sur les fractions : Pour tous réels (ou complexes) k, $a, b, c\ et\ d$ éventuellement non nuls,

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $k\times\frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$ $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}$ $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$ $\frac{\left(\frac{c}{d}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{c}{d}\times\frac{b}{a} = \frac{cb}{ad}$.

4. ATTENTION : $\frac{a+a}{a+b} \neq \frac{a}{b}$ **et** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$.

5. Méthode : Pour additionner deux fractions, on cherche le plus petit dénominateur commun qui n'est pas forcément le produit des deux dénominateurs. Lorsque ces dénominateurs sont entiers, ce plus petit dénominatuer commun est le PPCM des deux dénominateurs.

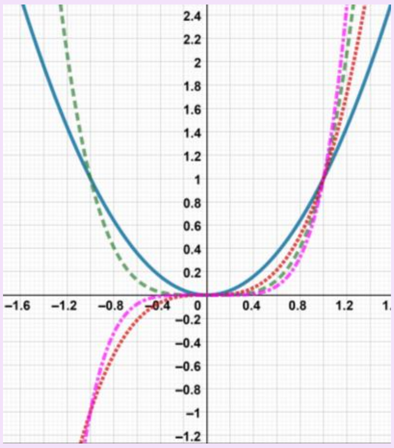
5bis. Exemples : 1) $\frac{1}{40}-\frac{3}{35}+\frac{2}{56} = \frac{1}{8\times5}-\frac{3}{7\times5}+\frac{2}{7\times8} = \frac{7}{8\times5\times7}-\frac{3\times8}{7\times5\times8}+\frac{2\times5}{7\times8\times5} = \frac{7-24+10}{8\times5\times7} = \frac{-7}{8\times5\times7} = -\frac{1}{40}$.

2) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{1}{a^2-ab}+\frac{1}{ab+b^2} = \frac{1}{(a-b)(a+b)}-\frac{1}{a(a-b)}+\frac{1}{b(a+b)} = \frac{ab}{ab(a-b)(a+b)}-\frac{b(a+b)}{a(a-b)b(a+b)}+\frac{a(a-b)}{b(a+b)a(a-b)} = \frac{ab+b(a+b)+a(a-b)}{b(a+b)a(a-b)} = \frac{ab+b^2+a^2}{b(a+b)a(a-b)}$.

7. Définition: pour tout réel (ou complexe) x et tout entier naturel p non nul, $x^0 = 1$ et $x^p = \underbrace{x\times x\times\ldots\times x}_{p\ fois} = x^{p-1}\times x$.

Pour tout réel (ou complexe) x non nul et tout entier naturel p , $x^{-p} \equiv \frac{1}{x^p} = \left(\frac{1}{x}\right)^p$.

8. On définit et représente alors les fonctions puissances :



9. Règles de calcul sur les puissances entières : Pour tous entiers p et q, pour tous réels (ou complexes si p et q sont entiers) x et y éventuellement non nuls, ▪ $x^p x^q = x^{p+q}$ ▪ $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$ ▪ $(x^p)^q = x^{pq}$ ▪ $x^p y^p = (xy)^p$ ▪ $\frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p$.

9bisExemples : $\frac{(-2)^{2k+4}\times 3^{k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}} = \frac{(-1)^{2k+4}\times 2^{2k+4}\times 3^{k-1}}{2^{2k}\times 3^{-k+1}} = (2^{2k+4-2k}\times 3^{k-1+k-1}) = 2^4\times 3^{2k-2}$.

10. Identités remarquables et plus : Pour tous réels (ou complexes) a et b et c ,

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $(*)$ et $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ et $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(***)$ et $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $(**)$ et $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

↪**Démo :** il suffit de développer la forme factorisée pour obtenir la forme développée.

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \underbrace{=}_{(\times) distributive\ sur\ (+)} (a+b)a+(a+b)b \underbrace{=}_{(\times) distributive\ sur\ (+)} (a^2+ba)+(ab+b^2) \underbrace{=}_{(+) associative\ et\ (\times) commutative} a^2+2ab+b^2 (*)$

$(a+b)(a-b) = a^2+ba-ab-b^2 = a^2-b^2$ et $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 = a^3-b^3$ $(**)$

$\underbrace{(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2}_{méthode\ à\ retenir} \underbrace{=}_{on\ applique\ (*)\ à\ (a+b) et\ c} (a+b)^2+2(a+b)c+c^2 \underbrace{=}_{(\times) distributive\ sur\ (+)\ et\ formiule\ précédente} (a^2+2ab+b^2)+(2ac+2bc)+c^2$

Ainsi, $(a+b+c)^2 \underbrace{=}_{(+) associative\ et\ commutative} a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

De même, , $\underbrace{(a-b)^2 = (a+(-b))^2}_{méthode\ à\ retenir} \underbrace{=}_{on\ applique\ (*)\ à\ a\ et -b} a^2+2a(-b)+(-b)^2 = a^2-2ab+b^2$.

Ensuite, $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = \cdots. = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(***)$.

Alors, $(a-b)^3 = (a+(-b))^3 \underbrace{=}_{on\ applique\ (***)\ à\ a\ et -b} a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Enfin, $a^3+b^3 = a^3-(-b)^3 \underbrace{=}_{on\ applique\ (**)\ à\ a\ et -b} (a-(-b))(a^2+a(-b)+(-b)^2) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$.

II. Généralisation (valable dans $\mathbb{C}$).

1. Notation $\sum$ et $\prod$.

11. Généralisation : Pour tous réels (ou complexes) u_k, $\sum_{k=1}^n u_k = u_1+u_2+\ldots+u_n$ et $\prod_{k=1}^n u_k = u_1\times u_2\times\ldots\times u_n$.

- $\sum_{k=p}^n u_k = \sum_{k\in[\![p,n]\!]} u_k = u_p+u_{p+1}+\ldots+u_{n-1}+u_n$ et $\prod_{k=p}^n u_k = \prod_{k\in[\![p,n]\!]} u_k = u_p\times u_{p+1}\times\ldots\times u_n$
- $\sum_{\substack{k\in[\![0,2n]\!]\\ k\ pair}} u_k = \sum_{j=0}^n u_{2j} = u_0+u_2+u_4+\ldots+u_{2n-2}+u_{2n}$ et $\prod_{\substack{k\in[\![0,2n]\!]\\ k\ pair}} u_k = \prod_{j=0}^n u_{2j} = u_0\times u_2\times\ldots\times u_{2n}$
- $\sum_{\substack{k\in[\![1,2n+1]\!]\\ k\ impair}} u_k = \sum_{j=0}^n u_{2j+1} = u_1+u_3+\ldots+u_{2n-1}+u_{2n+1}$ et $\prod_{\substack{k\in[\![0,2n+1]\!]\\ k\ impair}} u_k = \prod_{j=0}^n u_{2j+1} = u_1\times u_3\times\ldots\times u_{2n+1}$

12. Exemples importants : $\sum_{k=0}^n \underbrace{1}_{u_k} = n+1$ et $\sum_{k=1}^n \lambda = n\lambda$ et $\sum_{k=1}^n 1 = n$ et $\prod_{k=1}^n \lambda = \lambda^n$.

13. NB : $\sum_{k=p}^m 1 = m-p+1$ =nombre de termes d'une somme allant de p à m .

14.Exemple Calculons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^k k}_{u_k}$.

Si n est pair alors $S_n = \underbrace{-1+2}_{=1}\underbrace{-3+4}_{=1}\underbrace{-5+6}_{=1} - \cdots \underbrace{-(n-1)+n}_{=1} = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n}{2}\,termes} = \frac{n}{2}$.

Si n est impair alors $S_n = \underbrace{-1+2}_{=1}\underbrace{-3+4}_{=1}\underbrace{-5+6}_{=1} - \cdots \underbrace{-(n-2)+(n-1)}_{=1} - n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{\frac{n-1}{2}\,termes} - n = \frac{n-1}{2} - n = -\frac{n+1}{2}$.

Vérification : $S_3 = -1+2-3 = -2 = -\frac{3+1}{2}\ OK$; $S_6 = -1+2-3+4-5+6 = 3 = \frac{6}{2}\ OK$.

15.Propriétés Pour tous entiers naturels n et p tels que $p \in \{1, \dots, n\}$ et tous réels (ou complexes) u_k et v_k,

1) $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^{n} u_k$ et $\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{k=0}^{p-1} u_k \times \prod_{k=p}^{n} u_k$

2) Pour tous réels α et β indépendants de n, $\sum_{k=0}^{n}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$ et

3) $\prod_{k=0}^{n} u_k v_k = \prod_{k=0}^{n} u_k \times \prod_{k=0}^{n} v_k$ (en particulier, $\prod_{k=0}^{n} \alpha u_k = \alpha^{n+1} \prod_{k=0}^{n} u_k$) et si, de plus, tous les v_k sont non nuls alors $\prod_{k=0}^{n} \frac{u_k}{v_k} = \frac{\prod_{k=0}^{n} u_k}{\prod_{k=0}^{n} v_k}$.

4) $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k\ pair}} u_k + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k\ impair}} u_k$ et $\prod_{k=0}^{n} u_k = \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \equiv 0[3]}} u_k \times \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \equiv 1[3]}} u_k \times \prod_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \equiv 2[3]}} u_k$ (...)

16.Théorème :

- *Si pour tout* n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *alors* $u_0 = S_0$ *et* $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n > 0$. ↪Démo
- Si pour tout entier n, $u_n \neq 0$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$, alors pour tout entier n *non nul*, $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$. ↪Démo

16bis. **si je connais une expression de S_n ou P_n alors je peux trouver une expression de u_n.**

2. Changements d'indice ou réécriture.

17. Exemples : $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{[\![0,n]\!]=\{n-l\ /l\in[\![0,n]\!]\}}{\overset{\substack{k=n-l \\ i.e.\ l=n-k}}{\underbrace{\triangleq}}} \sum_{l=0}^{n} u_{n-l} \underset{[\![0,n]\!]=\{p-1\ /p\in[\![1,n+1]\!]\}}{\overset{\substack{k=p-1 \\ i.e.\ p=k+1}}{\underbrace{\triangleq}}} \sum_{p=1}^{n+1} u_{p-1}$ et $\prod_{k=2}^{n} u_k \underset{[\![2,n]\!]=\{i+2\ /p\in[\![0,n-2]\!]\}}{\overset{i=k-2}{\underbrace{\triangleq}}} \prod_{i=0}^{n-2} u_{i+2}$

17bis .Exemples : 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{k}$

2) $\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 2^k$.

3) D' une part, $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{n}(k(k+1)+1) = \sum_{k=2}^{n+1}((k-1)k+1) = \sum_{k=2}^{n+1}(k^2-k+1)$.

D'autre part, $\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$.

17ter Exercice : Calculons $D_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})$. $D_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} k} = n+1$.

3. Télescopage

18.Somme télescopique : $\sum_{k=p}^{n}(u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$. **Produit télescopique** : $\prod_{k=p}^{n} \frac{w_k}{w_{k+1}} = \frac{w_p}{w_{n+1}}$

En conséquence : $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$. ↪Démo

Si je connais $u_{n+1} - u_n$, alors je connais u_n !!

18bisExemples:

1. $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \underset{\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{(k+1)}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}{\underbrace{=}} \sum_{k=1}^{n}(\underbrace{\frac{1}{k}}_{u_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{u_{k+1}}) = \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}\right]}_{\substack{à\ détailler\ si\ je\ ne\ vois\ pas\ tout\ de\ suite \\ la\ somme\ telescopique}} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ Calculons $P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

$P_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1^3}{k^3+1^3} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}(k+1)} \prod_{k=2}^{n} \frac{(k(k+1)+1)}{(k(k-1)+1)} \underset{\substack{avec \\ u_k=k(k-1)+1}}{\underbrace{=}} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=3}^{n+1} k} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{u_{n+1}}{3} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)+1}{3} = \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = \frac{1}{3}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{2}{3}$.

18ter Deux exercices corrigés classiques :

1. Montrer qu'il existe des réels a, b et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\,; -1\,; 2\}$, $\frac{1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$. En déduire $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k-2)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

- Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\,; -1\,; 2\}$, $\frac{a(x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-2)} + \frac{bx(x-2)}{x(x+1)(x-2)} + \frac{cx(x+1)}{(x-2)x(x+1)} = \frac{(a+b+c)x^2+(-a-2b+c)x-2a}{x(x+1)(x-2)}$.

Donc pour de tels réels a,b et c existent, il faut que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\,; -1\,; 2\}, 1 = (a+b+c)x^2 + (-a-2b+c)x - 2a$. Il suffit donc que a, b, et c vérifient :

$\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a-2b+c=0 \\ -2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2}\ (L_1) \\ -2b+c=-\frac{1}{2}\ (L_2) \\ b+c=\frac{1}{2}\ (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2}\ (L_1) \\ -3b=-1\ (L_2 \leftarrow L_2-L_3) \\ 3c=\frac{1}{2}\ (L_3)\quad (L_3 \leftarrow 2L_3+L_2) \end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{1}{6} \end{cases}$. (RQUE : nous venons d'effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle simple $\frac{1}{x(x+1)(x-2)}$, méthode que nous étudierons plus largement dans la chapitre suivant)

$S_n=\sum_{k=3}^{n}\underbrace{\frac{1}{k(k+1)(k-2)}}_{v_k}=\sum_{k=3}^{n}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{k}+\frac{1}{3}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{6}\frac{1}{(k-2)}\right)=-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{6}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2}\overset{réécriture}{\triangleq}-\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{3}\sum_{k=4}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k}$

$S_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3}\left(\sum_{k=3}^{n-2}\frac{1}{k}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right).$

$S_n=\left(\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}_{=0}\right)\left(\sum_{k=4}^{n-2}\frac{1}{k}\right)+\frac{5}{36}-\frac{1}{6}\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{6\,n}+\frac{1}{3(n+1)}=\frac{5}{36}-\frac{1}{6}\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{6\,n}+\frac{1}{3(n+1)}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{5}{36}$.

2. Supposons qu'il existe a et b réels tels que $b-1-a\neq 0$ *et* pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+a}{n+b}$.

Montrons que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{1}{a+1-b}\left[(n+b)u_{n+1}-(b-1)u_0\right]$. On notera, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\forall k\in\mathbb{N}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{k+a}{k+b}$ donc, $(k+b)u_{k+1}-(k+a)u_k=0$ et par conséquent $\sum_{k=1}^{n}[(k+b)u_{k+1}-(k+a)u_k]=0$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}[(k+b)u_{k+1}-(k+a)u_k]=\sum_{k=0}^{n}[(k+b)u_{k+1}-\underbrace{(k+b-1)u_k}_{v_k}+(b-1-a)u_k]$

$=\left[\sum_{k=0}^{n}(v_{k+1}-v_k)\right]+\left[(b-1-a)\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)\right]\overset{télescopage}{\triangleq}v_{n+1}-v_0+(b-1-a)S_n$

$=(n+b)u_{n+1}+(b-1)u_0+(b-1-a)S_n$.

Par conséquent, $(n+b)u_{n+1}-(b-1)u_0+(b-1-a)S_n=0$. Ainsi, comme $b-1-a\neq 0$, $S_n=\frac{1}{a+1-b}\left[(n+b)u_{n+1}-(b-1)u_0\right]$.

3. Somme double et finie

19.Définition : Soit n et p des entiers naturels. Soit $n\times p$ nombres réels (ou complexes) notés a_{ij} tels que $i\in\{1,..,n\}$ et $j\in\{1,..,p\}$. La somme de tous les réels a_{ij} est la somme double notée :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}a_{ij}$$

$$\sum_{\substack{r\leq i\leq s\\m\leq j\leq q}}a_{ij}\ \textit{désigne la somme de tous les réels } a_{ij}\ \textit{tels que}\ \begin{cases}r\leq i\leq s\\m\leq j\leq q\end{cases}.$$

20.Théorème d'interversion de deux SOMMES FINIES :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$$

$$\textit{De même,}\quad\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}a_{ij}\right)$$

↪Démo (Cf illustration)

20bis Illustration :

j / i	$j=1$	$j=2$	…	j	…	$j=p$	**Somme des complexes de chaque ligne**
$i=1$	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1p}	$\sum_{j=1}^{p}a_{1j}$
$i=2$	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2p}	$\sum_{j=1}^{p}a_{2j}$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{ip}	$\sum_{j=1}^{p}a_{ij}$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
$i=n$	a_{n1}	a_{i3}	…	a_{nj}	…	a_{np}	$\sum_{j=1}^{p}a_{nj}$
Somme des complexes de chaque colonne	$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n}a_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}$	…	$\sum_{i=1}^{n}a_{ip}$	**la somme de tous les complexes a_{ij} vaut : $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$**

21.Théorème sur le produit de deux sommes finies : $a_1, \dots a_n, b_1, \dots, b_p$ des nombres réels (ou complexes). Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{p} b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_i b_j$$

↪ Démo

21bis.Exemples : $\sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}} 1 = \sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}} 1\times 1 = \left(\sum_{1\le i\le p} 1\right)\left(\sum_{1\le j\le q} 1\right) = pq$.

En utilisant les formules qui suivent : $\sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le q}} j2^i = \left(\sum_{1\le i\le p} i\right)\left(\sum_{1\le j\le q} 2^j\right) = p\frac{2^{q+1}-1}{2-1} = p(2^{q+1}-1)$.

III. Formules sommatoires

1. Sommes des n premiers entiers à différentes puissances

22.Théorème de calcul des sommes des n premiers entiers à différentes puissances :

Pour tout enrtier naturel n,

$$\sum_{k=0\ ou\ 1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad et \quad \sum_{k=0\ ou\ 1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad et \quad \sum_{k=0\ ou\ 1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

↪ Démo

22 bis Exemples :

1) Calculons la somme des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$

$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = 2\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$

2) Calculons $S(n) = \sum_{\substack{3\le i\le 2n+1\\ 2\le j\le 2n}} ij$ où n entier naturel supérieur à 3.

$$S(n) = \sum_{\substack{3\le i\le 2n+1\\ 2\le j\le 2n}} ij = \sum_{\substack{3\le i\le 2n+1\\ 2\le j\le 2n}} i\times j \underbrace{=}_{\substack{théo\\ produit\ de\\ deux\ sommes}} \left(\sum_{i=3}^{2n+1} i\right)\left(\sum_{j=2}^{2n} j\right) \underbrace{=}_{\substack{je\ fais\ apparaitre\\ deux\ sommes\ de\ la\ forme\\ \sum_{k=1}^{N} k\\ et\ je\ compense}} \left[\left(\sum_{i=1}^{2n+1} i\right) - 1 - 2\right]\left[\left(\sum_{j=1}^{2n} j\right) - 1\right]$$

$$S(n) \underbrace{=}_{\substack{j'applique\\ la\ formule\\ \sum_{k=1}^{N} k=\frac{N(N+1)}{2}\\ avec\ N=2n+1\ puis\ N=2n}} \left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2} - 3\right)\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - 1\right)$$

2) Calculons $T(n) = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{i}{j}$.

$T(n) = \sum_{1\le i<j\le n} i/j = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\times\frac{1}{j}\right)$. Or $\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\times\frac{1}{j}\right) = \frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i\right) = \frac{1}{j}\frac{(j-1)j}{2} = \frac{(j-1)}{2}$.

Donc , $T(n) = \sum_{j=2}^{n}\frac{j-1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j - \sum_{j=2}^{n} 1\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j - 1 - \sum_{j=1}^{n} 1 + 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n(n-1)}{4}$.

2. Sommes géométriques

23.Théorème de factorisation de $1 - z^n$.

Pour tout réel (ou complexe) z, pour tout entier naturel non nul n, $1 - z^n = (1-z)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right)$. ↪ Démo

23bisAutre version : pour tout réel z, pour tout entier naturel n, $1 - z^{n+1} = (1-z)\left(\sum_{k=0}^{n} z^k\right)$.

24.Théorème de somme géométrique . Soit z un réel(ou complexe) et n un entier naturel .

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} & si\ z\neq 1 \\ n+1 & si\ z=1 \end{cases} .$$

Et plus généralement, $\forall z\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, \forall p\in[\![0;n]\!]$,

$$\sum_{k=p}^{n} z^k = z^p\sum_{k=0}^{n-p} z^k = \begin{cases} z^p\left(\frac{1-z^{n-p+1}}{1-z}\right) & si\ z\neq 1. \\ n-p+1\ si\ z=1 \end{cases}$$

$$Autrement\ dit, si\ z\neq 1\ alors\ \sum_{k=p}^{n} z^k = premier\ terme\ \times\left(\frac{1-z^{nombre\ de\ termes}}{1-z}\right)$$

↪ Démo

24bisExemples : 1) Calculons $S = \sum_{k=2}^{n+2}(nk + 2^{k+1} - 1)$

$S = \sum_{k=2}^{n+2}(nk + 2^{k+1} - 1) = \left(n\sum_{k=2}^{n+2} k\right) + 2\left(\sum_{k=2}^{n+2} 2^k\right) - \left(\sum_{k=2}^{n+2} 1\right)$.

$S=(n\sum_{k=1}^{n+2}k-n)+2(\sum_{k=0}^{n+2}2^k-1-2)-(\sum_{k=2}^{n+2}1)$.

$S=n\frac{(n+2)(n+3)}{2}-n+2.\frac{1-2^{n+3}}{1-2}-6-(n+2-2+1)=n\frac{(n+2)(n+3)}{2}-2n+2^{n+4}-9$.

2) Calculons $S=\sum_{0\le i\le j\le n}2^{i+j}$

$S=\sum_{0\le i\le j\le n}2^{i+j}=\sum_{0\le i\le j\le n}2^i2^j=\sum_{i=0}^{n}2^i(\sum_{j=i}^{n}2^j)=\sum_{i=0}^{n}2^i(\sum_{j=0}^{n}2^j-\sum_{j=1}^{i-1}2^j)=\sum_{i=0}^{n}2^i\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}-\frac{2^i-1}{2-1}\right)$

$S=\sum_{i=0}^{n}2^i(2^{n+1}-2^i)=\sum_{i=0}^{n}2^i(2^{n+1}-2^i)=2^{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}2^i\right)-\left(\sum_{i=0}^{n}4^i\right)$

$S=2^{n+1}\frac{2^{n+1}-1}{2-1}-\frac{4^{n+1}-1}{4-1}=2^{2(n+1)}-2^{n+1}-\frac{4}{3}.4^n+\frac{1}{3}=\left(4-\frac{4}{3}\right).4^n-2^{n+1}+\frac{1}{3}=\left(\frac{8}{3}\right).4^n-2.2^n+\frac{1}{3}$.

25. Théorème de factorisation de a^n-b^n. Soit $a\ et\ b$ deux réels (ou complexe) et n un entier naturel non nul .

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+a^2b^{n-3}+ab^{n-2}+b^{n-1})\ .$$

$$a^n-b^n=(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}\right)=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}b^k\ .$$

↪ Démo

25bisCas particuliers importants

- En prenant $n=2\ ou\ 3$, on retrouve : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\ et\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
- En prenant $a=1\ et\ b=z$, on retrouve la factorisation de $1-z^n$.

3. Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

26. Définition d'une factorielle et d'un coefficient binomial: Soit $k\ et\ n$ deux entiers naturels .

- Factorielle n est l'entier naturel noté $n\,!$ défini par : $0\,!=1$ si $n=0$

$et\ si\ n\ge 1\ alors\ \ n!=1\times 2\times\ldots\times n=n\times(n-1)\times\ldots\times 1=\prod_{k=1}^{n}k=n\times(n-1)!=$

$=produit\ de\ tous\ les\ entiers\ compris\ entre\ 1\ et\ n.$

- Le coefficient binomiale k parmi n est noté $\binom{n}{k}$ $et\ défini\ par$: $\binom{n}{k}=\begin{cases}\frac{n!}{k!(n-k)!} & si\ 0\le k\le n\\ 0 & si\ k>n\end{cases}$.

27bis.NB: 1) $(2n)!\ne 2(n!)$

2) $si\ n\ge k$ alors $\frac{n!}{(n-1)!}=n$, $\frac{n!}{(n-2)!}=n(n-1)$ et plus généralement, $\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)\ldots..(n-k+1)$

3) $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

27ter Exercice corrigé classique: Ecrire les expressions $A=\prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $B=\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$ et $\frac{A}{B}$ avec des factorielles et coeff. binomiaux

$A=2\times 4\times..\times(2n).\underbrace{=}_{\substack{je\ mets\ 2\\ en\ facteur\\ sur\ chaque\ terme\ pair}}(2\times 1)\times(2\times 2)\ldots(2\times n)$ ou bien $A=\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n(\prod_{k=1}^{n}k)=2^nn!$

$A\underbrace{=}_{je\ regroupe\ tous\ les\ facteurs\ 2}2^n(1\times 2\times\ldots\times n)=2^nn!$

$B=1\times 3\times 5\times\ldots(2n+1).\underbrace{=}_{\substack{je\ fais\ apparaitre\\ les\ entiers\\ manquants\\ pour\ avoir\\ une\ factorielle\\ et\ je\ compense}}\frac{1\times2\times3\times4\times5\times\ldots\times(2n)\times(2n+1)}{2\times4\times..\times(2n)}\underbrace{=}_{\substack{je\ reconnais\ A\\ au\ dénominateur\\ et\ j'applique\\ la\ technique\\ précédente}}\frac{(2n+1)!}{2^nn!}$.

$\frac{A}{B}=2^nn!\times\frac{2^nn!}{(2n+1)!}=2^{2n}\frac{n!n!}{(2n+1)(2n!)}\overset{car\ \binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{=}\frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

28.Propriétés : Si $k\ et\ n$ sont deux entiers naturels tels que $0\le k\le n\ alors$ $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. ↪ Démo.

29. Valeurs particulières : $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$ si $n\ge 1$ **et enfin** $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}$ si $n\ge 2$.

30.Formule de Pascal: Pour tous $k\ et\ n$ entiers naturels, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$. ↪ Démo

31. Exercice corrigé classique : Calculons $W_n=\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{n}$.

$W_n=\sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{n}=\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}\underbrace{=}_{\substack{triangle\\ de\\ Pascal}}\underbrace{\sum_{k=n}^{2n}\left[\underbrace{\binom{k+1}{n+1}}_{u_{k+1}}-\underbrace{\binom{k}{n+1}}_{u_k}\right]}_{somme\ télescopique}=u_{2n+1}-u_n=\binom{2n+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}=\binom{2n+1}{n+1}=\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}$.

23. Conséquence : Pour tous k *et* n entiers naturels, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel (et $\binom{n}{k} \geq 1$ $dès$ que $n \geq k \geq 0$) ↪ Démo

24. Méthode de triangle de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux : Considérons un tableau $n+1$ lignes, $n+1$ colonnes . On numérote les lignes et colonnes de 0 à n . Nous allons remplir ce tableau avec les coefficients binomiaux $\binom{s}{k}$ pour s *et* k entre 0 et n de la manière suivante :

en ligne s et colonne k va se trouver le coefficient binomial k parmi s : $\binom{s}{k}$.

Tout d'abord, je remplis la ligne 0 et la colonne 0 facilement car $\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 \text{ } si \text{ } k = 0 \\ 0 \text{ } sinon \end{cases}$ et $\binom{s}{0} = 1$ pour tout s.

Je remplis ensuite les autres cases en utilisant la formule de Pascal :

$colonne \ k \quad colonne \ k+1$

$$\underbrace{\binom{s}{k} + \binom{s}{k+1}}_{=\binom{s+1}{k+1}} \quad ligne \ s$$

$$ligne \ s+1$$

24ter Tableau de Pascal :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

24bis Triangle de Pascal :

k \ s	colonne $k=0$	colonne $k=1$	colonne $k=2$	colonne $k=3$		colonne $k=j$	colonne $k=j+1$		colonne $k=n-2$	colonne $k=n-1$	colonne $k=n$
ligne $s=0$	$\binom{0}{0}$=1	$\binom{0}{1}$=0	$\binom{0}{2}$=0	0	…	0	0	…	0	0	0
$s=1$	$\binom{1}{0}$=1	$\binom{1}{1}$=1	$\binom{1}{2}=0$	0		0	0	…	0	0	0
$s=2$	1	2 +	1	0		0	0	…	0		0
$s=3$	1	3	= 3	1		0	0	…	0		0
$s=4$	1	4	6	4	0	0	0	…	0		0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ …	⋮	⋮	… ⋮	⋮	⋮	⋮
$s=n-1$	1	$n-1$	$\frac{(n-1)(n-}{2}$			$\binom{n-1}{j}$ +	$\binom{n-1}{j+1}$	…	$n-1$	1	0
$s=n$	1	n	$\frac{n(n-1)}{2}$	…	…	$\binom{n}{j}$	$=\binom{n}{j+1}$	…	$\frac{n(n-1)}{2}$	n	1

25. Théorème : Formule du binôme de Newton (FBN) . Soit a *et* b deux nombres réels (ou complexes) et n un entier naturel .

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} b^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} b^{n-1}a + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} b^{n-2}a^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n} ba^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} a^n .$$ ↪ Démo

26. NB : 1) Les coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ sont rangés dans le tableau de Pascal à la ligne $s = n$.

2) On retrouve les développements suivants : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (avec $n = 2$) et de : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$(avec $n = 3$).

27. Corollaire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. ↪ Démo

27bis NB : ne pas confondre avec : $W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{n}$ *et* S_n

28. Exemples classiques :

1) Développons :

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$(a-b)^7 = 1a^7 + 7a^6(-b) + 21a^5(-b)^2 + 35\,a^4(-b)^3 \;+ 35a^3(-b)^4 + 21a^2(-b)^5 + 7a(-b)^6 + 1(-b)^7$

$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35\,a^4b^3 \;+ 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$.

2) Calculons $T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$. $T_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k = (1-1)^n = \begin{cases}0 \; si \; n \neq 0\\ 1 \; si \; n = 0\end{cases}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $X_n = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ pair}}\binom{n}{k}$ et $Y_n = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ impair}}\binom{n}{k}$.

Alors $X_n + Y_n = S_n \; et \; X_n - Y_n = T_n$. Autrement dit, $\begin{cases}X_n + Y_n = 2^n\\ X_n - Y_n = 0\end{cases}$ Donc, $X_n = \frac{2^n+0}{2} \; et \; Y_n = \frac{2^n-0}{2}$. Ainsi, $X_n = Y_n \; = 2^{n-1}$.

Tableau de Pascal :

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

28bis Exercices corrigés: 1) Calculons $H_n = \sum_{k=0}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.

$H_n \underbrace{=}_{FBN} \sum_{k=0}^{n}\underbrace{(k+1)^5}_{u_{k+1}} - \underbrace{k^5}_{u_k} \underbrace{=}_{télescopage} (n+1)^5 - 0^5 = (n+1)^5$.

2) Calculons $R_n = \sum_{k=1}^{n-3}\binom{n-1}{k+1}3^{k-1}$.

$$R_n = \sum_{k'=2}^{n-2}\binom{n-1}{k'}3^{k'-2} = \frac{1}{9}\left(\sum_{k'=2}^{n-2}\binom{n-1}{k'}3^{k'}\right) = \frac{1}{9}\left(\sum_{k'=2}^{n-2}\binom{n-1}{k'}3^{k'}1^{n-1-k'}\right)$$

$$R_n = \frac{1}{9}\left[\left(\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'}3^{k'}1^{n-1-k'}\right) - \left(\binom{n-1}{0}3^0 + \binom{n-1}{1}3^1 + \binom{n-1}{n-1}3^{n-1}\right)\right] = \frac{1}{9}((1+3)^{n-1} - (1 + (n-1)3 + 3^{n-1}))$$

Ainsi, $R_n = \frac{1}{9}(4^{n-1} - 3^{n-1} - 3n + 2))$.

4. Application à quelques suites récurrentes particulières

29. Rappel Définition d'une suite : Une suite réelle (resp. complexe) est une relation qui associe un réel (resp. un complexe) à chaque entier naturel (ou parfois seulement à partir d'un certain rang n_0). Si u est une suite alors on note u_n le réel (resp. complexe) associé à l'entier naturel n par la suite u et u est aussi notée (u_n) ou$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ou$(u_n)_{n\geq n_0}$.

29bis Remarque : une suite réelle (resp. complexe) peut être assimilée à une famille de réels (complexes) rangée.

30. Définition d'une suite arithmétique :(u_n) est une suite arithmétique lorsqu'il existe un réel (ou complexe) b tel que : $\forall n \in \mathbb{N}\,, u_{n+1} = u_n + b$. b est appelée la raison de la suite (u_n).

31.Propriété d'une suite arithmétique : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison b alors $\forall n \in \mathbb{N}\,, u_n = u_0 + nb$ et $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}b$.

32. Définition d'une suite géométrique : (u_n) est une suite géométrique lorsqu' il existe un réel *ou complexe* a tel que :$\forall n \in \mathbb{N}\,, u_{n+1} = au_n$. a est appelé la raison de la suite (u_n).

33.Propriété d'une suite géométrique $Si(u_n)$ est une suite géométrique de raison a alors $\forall n \in \mathbb{N}\,, u_n = u_0a^n$ et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u_0 \; si \; a \neq 1\\ (n+1)u_0 si \; a = 1\end{cases} \; et \; \sum_{k=p}^{n} u_k = \begin{cases}\frac{1-a^{n-p+1}}{1-a}u_0 \; si \; a \neq 1\\ (n-p+1)u_0 si \; a = 1\end{cases} \; où \; p \in [\![0;n]\!]$$

34. Rappel de terminale (démo plus tard) : Soit a un réel.

- si $a = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 1$
- si $-1 < a < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$
- si $a > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
- si $a < -1$ alors $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite quand $n \to +\infty$

35. Définition d'une suite arithmético-géométrique (u_n) est une suite arithmético-géométrique lorsqu' il existe deux réels (ou complexes) a et b tel que : $\forall n \in \mathbb{N}\,, u_{n+1} = au_n + b$.

36. Méthode pour obtenir une expression d'une suite arithmético-géométrique :

1. On cherche alors LE réel L tel que : $L = aL + b$
2. On montre que la suite $(u_n - L)$ est géométrique de raison a.
3. On peut alors écrire que : $u_n - L = a^n(u_0 - L)$ et donc $u_n = L + a^n(u_0 - L)$.

36bis Exemple : Soit u la suite définie par : $u_0 = (-1) \; et \; \forall n \in \mathbb{N},\; 2u_{n+1} - 3u_n = 5$. Exprimons u_n en fonction de n puis calculons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Je constate que u est arithmético-géométrique $\left(a = \frac{3}{2} et\ b = \frac{5}{2}\right)$. Je cherche alors le réel L tel que : $L = \frac{3}{2}L + \frac{5}{2}\ ie. L = -5$. Je pose alors pour tout n , $v_n = u_n — (-5)$.

On a donc, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}$ et $L = \frac{3}{2}L + \frac{5}{2}$. Donc, $u_{n+1} - L = \left(\frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}L + \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}(u_n - L)$. Autrement dit, $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$. Donc la suite v est géométrique et ainsi, pour tout n , $v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n v_0$ ie. $u_n + 5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n (u_0 + 5)$.

J'en conclus que pour tout n , $u_n = -5 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Alors, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(-5 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^k\right) = -5(n+1) + 4\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}$. Ainsi, $S_n = -9 - 5n + 12\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

IV. Systèmes linéaires

1. Exemples et définitions

37. S_0: $\{x + y + 3z = 0$ est un système linéaire de 1 équation à 3 inconnues x, y et z.

S_{0bis}: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues.

S_1: $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x - y + t = 0 \\ 1x + 2t = 1 \\ 1t = -1 \end{cases}$ est un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues.

S_5: $\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ 10x - 2y + 4t = 0 \\ 5x - y + 2t = -1 \end{cases}$ est un système linéaire de 3 équations à 4 inconnues.

S_{11}: $\begin{cases} x \quad +my \quad +(m-1)z \quad = \quad 0 \\ 3x \quad +2y \quad +mz \quad = \quad 3 \\ (m-1)x \quad +my \quad +(m+1)z \quad = \quad m \end{cases}$ *de paramètre* $m \in \mathbb{R}$ est un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues x, y et z et à un paramètre m.

38. Définitions :

- RESOUDRE (S_0), c'est trouver tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l' équation , ces triplets sont les solutions de (S_0)
- RESOUDRE (S_5), c'est trouver tous les quadruplets $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant les 3 équations , ces quadruplets sont les solutions de (S_5). ….
- Un système est dit compatible lorsqu'il admet au moins une solution.
- Un système de n équations à n inconnues admettant une unique solution est dit de Cramer.
- Deux systèmes linéaires sont équivalents lorsqu'ils ont exactement les mêmes solutions. On note $(S) \Leftrightarrow (S')$.

38bis NB : 1) (S): $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ xy - e^y = 2 \end{cases}$ est un système **NON** linéaire de 2 équations à 2 inconnues. On ne donnera pas de méthode systématique pour résoudre un tel système sauf dans le cas d'un système de la forme $\begin{cases} x - y = s \\ xy = p \end{cases}$ (Cf chapitre suivant).

2) (S): $\begin{cases} \ln(x) - 2\ln(y^2) = 1 \\ \ln\left(\frac{x}{3y}\right) = 2 \end{cases}$ est un système **NON** linéaire de 2 équations à 2 inconnues qui peut être ramené à un système linéaire en posant $X = ln(x)$ et $Y = ln(y)$. En effet , (S) s' écrit alors (S'): $\begin{cases} X - 4Y = 1 \\ X - Y = 2 + \ln(3) \end{cases}$.

2. Opérations élémentaires

39. Définition : Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont :

Op 1 : échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$

Op 2: multiplier une ligne par un scalaire non nul $L_i \leftarrow \mu L_i\ tq\ \mu \in K^*$

Op 3 : ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par un scalaire $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j\ tq\ \alpha \in K$ et $i \neq j$.

Opérations élémentaires	**39 bis** Opérations élémentaires inverses
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_j \leftrightarrow L_i$
$L_i \leftarrow \mu L_i\ tq\ \mu \in K^*$	$L_i \leftarrow \frac{1}{\mu} L_i\ tq\ \mu \in K^*$
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j\ tq\ \alpha \in K$ et $i \neq j$	$L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j\ tq\ \alpha \in K$ et $i \neq j$

40. Ces opérations étant réversibles , si l'on passe de S à S' en effectuant l'une des opérations précédentes alors on sait passer de (S') à (S) en effectuant l'opération inverse et par suite, vérifier (S), c' est vérifier (S') ; par conséquent, (S') et (S) ont les mêmes solutions. On a alors $(S) \Leftrightarrow (S')$.

41.ATTENTION : si l'on fait plusieurs opérations élémentaires en même temps pour passer de (S) à (S'), il faut s'assurer que (S') et (S) sont bien équivalents i.e. ont les mêmes solutions. Il ne faut pas perdre ou rajouter de solutions.

Reprenons un des exemples précédents. Lorsque je fais $\begin{matrix} L_1 \leftarrow 4L_1 - 3L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_1 + 5L_2 \end{matrix}$, je fais beaucoup d'opérations élémentaires simultanément : $L_1 \leftarrow 4L_1 - 3L_2$ se décompose en deux opérations $L_1 \leftarrow 4L_1$ *puis* $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ idem pour $L_2 \leftarrow 3L_1 + 5L_2$. Donc, je me suis assuré de pouvoir passer de (S') à (S) en effectuant $\begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{29}(5L_1 + 3L_2) \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{29}(-3L_1 + 4L_2) \end{matrix}$.

Un « mauvais exemple de résolution « : soit (S): $\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$. Alors, (S): $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \underset{\substack{je\ suis\ incapable \\ de\ retrouver\ (S)}}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{\rightleftarrows}} (S')$: $\begin{cases} -x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$. Les solutions (x, y) de (S) vérifient $x = -2$. Mais tous les couples $(-2, y)$ ne sont pas solutions car $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}$.

Pour éviter cette dernière erreur, on va dans les systèmes à plus de 2 inconnues et/ou deux équations ordonner nos cacluls et appliquer une méthode systématique qui évite une vérification perpétuelle (Cf paragraphe 5.).

3. Résolution d'un système linéaire échelonné

42. Définition : Un système linéaire est échelonné lorsqu'en passant d'une ligne à la suivante, une inconnue « disparait » (en fait son coefficient devient nul) et cette inconnue ne réapparaitra sur aucune ligne suivante comme dans les exemples suivants :

43. Méthode : un système échelonné est facile à résoudre : on commence par la dernière ligne et on remonte comme illustré dans les exemples suivants :

$S_0 : \{x + y + 3z = 0 \quad \Leftrightarrow x = -y - 3z$. Donc (S_0) a une infinité de solutions qui sont tous les triplets de la forme $(-y - 3z, y, z)$ tels que y et z réels. Autrement dit $Sol(S_0) = \{(-y - 3z, y, z)/y, z\ réels\}$.

En exprimant x en fonction de y et z , y et z deviennent des inconnues secondaire

Inconnue principale

S_1: $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 2x - y + t = 0 \\ x + 2t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{je\ commence\ par\ la\ dernière\ ligne\ qui\ donne\ la\ valeur\ de\ t \\ puis \\ je\ réinjecte\ dans\ la\ ligne\ précédente\ (L3) pour\ obtenir\ la\ valeur\ de\ x \\ puis \\ je\ réinjecte\ dans\ la\ ligne\ précédente\ (L2) pour\ obtenir\ la\ valeur\ de\ y \\ et\ enfin \\ je\ réinjecte\ dans\ la\ ligne\ précdédente\ (L1)\ pour\ obtenir\ la\ valeur\ de\ z}} \begin{cases} z = 6 \\ y = 5 \\ x = 3 \\ t = -1 \end{cases}$. Donc $Sol(S_1) = \{(3,5,6,-1)\}$

S_2: $\begin{cases} 2x + y + z + 4t = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}y - 3\right) \\ z = \frac{1}{2}(3y - 2) \\ x = 2 - 2y \end{cases}$.Donc $Sol(S_2) = \left\{\left(2 - 2y, y, \frac{3}{2}y - 1, \frac{3}{8}y - \frac{3}{4}\right)/y\ réel\right\} = \left\{\left(2, 0, -1, -\frac{3}{4}\right) + y\left(-2, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}\right)/y \in \mathbb{R}\right\}$.

S_3: $\begin{cases} 2x + y + z + 4t = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}$ n'a pas de solution à cause de sa dernière équation impossible. Donc $Sol(S_3) = \emptyset$.

Equation de compatibilité = équation sans inconnue qui peut être impossible ou toujours vraie ou dépendre de paramètres (mais jamais d'inconnues)

S_4: $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ x + 2z = 1 \\ z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - t \\ x = -3 \\ z = 2 \end{cases}$. Donc $Sol(S_4) = \{(-3, 4 - t, 2, t)/t\ réel\} = \{(-3,4,2,0) + \boldsymbol{t}((0,-1,0,1)/\boldsymbol{t}\ réel\}\ et\ rg(S_4) = 4$.

4. Résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues

Pour être certain que $S \Leftrightarrow S'$, il faut vérifier que l'on peut passer de S à S' et de S' à S en effectuant des calculs autorisés (notamment sans diviser par zéro). On va très vite donner trois opérations autorisées qui conservent les solutions et l'équivalence des systèmes.

44. Exemple : un grand classique $(S)\colon \begin{cases} x+y=p \\ x-y=q \end{cases}$.

Méthode 1

$$(S)\colon \begin{cases} x+y=p \\ x-y=q \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1+L_2) \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1-L_2)}}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1-L_2}}{\rightleftarrows}} (S')\colon \begin{cases} 2x = p+q \\ 2y = p-q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p+q}{2} \\ y = \frac{p-q}{2} \end{cases}.$$

44bisExemple : $(S)\colon \begin{cases} 3x+5y=3 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$.

$$(S)\colon \begin{cases} 3x+5y=3 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{29}(5L_1+3L_2) \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{29}(-3L_1+4L_2)}}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow 4L_1-3L_2 \\ L_2 \leftarrow 3L_1+5L_2}}{\rightleftarrows}} (S')\colon \begin{cases} 29y = 18 \\ 29x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{29} \\ y = \frac{18}{29} \end{cases}.$$

Méthode 2

44terExemple : $(S)\colon \begin{cases} 3x-y=3 \\ -6x+2y=-4 \end{cases}$.

$(S)\colon \begin{cases} 3x-y=3 \\ -6x+2y=-2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2+2L_1}{\rightleftarrows}} (S)\colon \begin{cases} 3x-y=3 \\ 0=-1 \end{cases}$. (S) est donc incompatible.

Méthode 3

44quaterExemple : $(S)\colon \begin{cases} 3x-y=3 \\ -6x+2y=-6 \end{cases}$.

$(S)\colon \begin{cases} 3x-y=3 \\ -6x+2y=-6 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2+2L_1}{\rightleftarrows}} (S)\colon \begin{cases} 3x-y=3 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow (S)\colon \begin{cases} y=3x-3 \\ 0=0 \end{cases}$.

(S) est donc compatible et $Sol(S) = \{(x, 3x-3)/x \in \mathbb{R}\}$

Méthode 4

5. Résolution d'un système linéaire : méthode générale

45. METHODE de résolution par échelonnement : Soit (S) un système linéaire. Pour résoudre (S) par échelonnement, les étapes sont

1. Descente : en effectuant des opérations élémentaires successives sur les lignes de (S), on échelonne (S) pour obtenir un système échelonné (S') équivalent à (S).
   a) Je regarde s'il n'y a pas des opérations élémentaires évidentes permettant de simplifier considérablement (S). Et je les effectue l'une après l'autre (pas en même temps) . SI NON ….alors :
   b) Faire apparaitre dans (S) un coefficient égal à ± 1 devant l'une des inconnues par exemple x.
   c) Placer la ligne contenant ce coefficient (=appelé pivot) en L_1 en échangeant deux lignes.
   d) Utiliser cette L_1 pour éliminer les x sur les autres lignes en effectuant des opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1 \; avec \; i \neq 1$. Comme je ne modifie pas L_1 et que j'utilise uniquement L_1 pour éliminer les x dans les AUTRES lignes, je peux faire plusieurs opérations simultanément. Les opérations inverses sont $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_1 \; avec \; i \neq 1$.
   e) Les lignes L_2, L_3 …ne contiennent plus de x. Appelons (S_1) le système formé des lignes L_2, L_3 …
   f) Faire apparaitre dans (S_1) un coefficient égal à ± 1 devant l'une des inconnues par exemple y.
   g) Placer la ligne contenant ce nouveau pivot en ligne 2: L_2 de (S) (ce qui correspond à la ligne 1 de (S_1))
   h) Utiliser cette L_2 pour éliminer les y sur les lignes suivantes.
   i) (…)
2. Remontée : on résout (S') qui a les mêmes solutions que (S) .

45bisExemples de résolution par échelonnement de systèmes de 3 équations à 3 inconnues:

- $S_1\colon \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 7x-2y+4z=0 \\ 5x-y+2z=-1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ \text{je ne modifie pas } L_1}}{\overset{\substack{\text{je ne modifie pas } L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 11x+2z=2 \\ 7x+z=0 \end{cases} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 7x+z=0 \\ 11x+2z=2 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \\ L_2 \text{ et } L_1 \text{ inchangées}}}{\rightleftarrows}} \underbrace{\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 7x+z=0 \\ -3x=2 \end{cases}}_{\text{système échelonné}}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1+z-2x \\ z = -7x \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1+z-2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}+z \\ z = (-7)\times\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{14}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{3}+\frac{14}{3} = 7 \\ z = \frac{14}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_1) = \left\{\left(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}; 7\right)\right\}$.

remontée

remontée

- $S_2 : \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ x-7y+5z=-2 \\ 3x-4y+2z=-1 \end{cases} \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-7y+5z=-2 \\ 2x+3y-3z=1 \\ 3x-4y+2z=-1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+3L_1 \\ \textit{je ne modifie pas } L_1}}{\overset{\substack{\textit{je ne modifie pas } L_1 \\ L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 17y-13z=5 \\ 17y-13z=5 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3+L_2 \\ \textit{je ne modifie pas } L_1, \textit{ni } L_2}}{\overset{\substack{\textit{je ne modifie pas } L_1, \textit{ni } L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-L_2}}{\rightleftarrows}} \underbrace{\begin{cases} 2x+3y-3z=1 \\ 17y-13z=5 \\ 0=0 \end{cases}}_{\substack{\textit{système échelonné} \\ \textit{et compatible}}} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}z-\frac{3}{2}\left(\frac{5}{17}+\frac{13}{17}z\right) \\ y=\frac{5}{17}+\frac{13}{17}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{17}+\frac{4}{17}z \\ y=\frac{5}{17}+\frac{13}{17}z \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_2)=\left\{\left(\frac{1}{17}+\frac{4}{17}z, \frac{5}{17}+\frac{13}{17}z, z\right) / z\in\mathbb{R}\right\}$.

45ter Exemples de résolution par échelonnement d'autres systèmes linéaires:

Des systèmes presque échelonnés :

- $S_5 : \begin{cases} 2x+y-z+t=1_{(L_1)} \\ 10x-2y+4t=0_{(L_2)} \\ 5x-y+2t=-1_{(L_3)} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2+2L_3}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 2x+y-z+t=1_{(L_1)} \\ 0=2_{(L_2)} \\ 5x-y+2t=-1_{(L_3)} \end{cases}$. Donc, $Sol(S_5)=\emptyset$.

Inconnues principales

- $S_6 : \begin{cases} 2x+y+4z+7t+w=2_{(L_1)} \\ 3x-y+3z=1_{(L_2)} \\ 5x+y+z+1t+2w=8_{(L_3)} \end{cases} \overset{L_1\leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x+y+z+1t+2w=8_{(L_1)} \\ 3x-y+3z=1_{(L_2)} \\ 2x+y+4z+7t+w=2_{(L_3)} \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+7L_1}{\overset{L_3\leftarrow L_3-7L_1}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 5x+y+z+t+2w=8_{(L_1)} \\ 3x-y+3z=1_{(L_2)} \\ -33x-6y-3z-13w=-54 \end{cases}$

$\underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\overset{L_2\leftrightarrow L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 5x+y+z+1t+2w=8_{(L_1)} \\ -33x-6y-3z-13w=-54_{(L_2)} \\ 3x-y+3z=1_{(L_3)} \end{cases} \overset{REMONTEE}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t=\frac{-19}{39}-\frac{10}{39}y+\frac{8}{13}x_{(L_1)} \\ w=\frac{1}{13}(53-7y-30x)_{(L_2)} \\ z=\frac{1}{3}(1+y-3x)_{(L_3)} \end{cases}$.

Système échelonné

Donc, $Sol(S_6)=\left\{\left(x, y, \frac{1}{3}(1+y-3x), \frac{1}{13}(53-7y-30x), -\frac{19}{39}-\frac{10}{39}y+\frac{8}{13}x\right) / x \text{ et } y \text{ réels}\right\}$.

Inconnues secondaires

45quater Des systèmes à échelonner :

$S_7 \begin{cases} 1x+y+4z+7t=2 \\ x+2y+4z+5t=0 \\ x-y+3z+2t=1 \\ \quad = 8 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1 \\ L_4\leftarrow L_4+L_1}}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x+y+4z+7t=2 \\ y-2t=-2 \\ -2y-z-5t=-1 \\ -3z-6t=6 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_3 \\ \textit{je ne touche plus}}}{\overset{L_2\leftrightarrow L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x+y+4z+7t=2 \\ -2y-1z-5t=-1 \\ y-2t=-2 \\ -3z-6t=6 \end{cases} \underset{L_4\leftrightarrow L_4+3L_2}{\overset{L_4\leftrightarrow L_4-3L_2}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x+y+4z+7t=2 \\ -2y-z-5t=-1 \\ 1y-2t=-2 \\ 6y+9t=9 \end{cases}$

j'utilise L_1 pour éliminer les x dans les lignes L_2,L_3,L_4

j'utilise L_2 pour éliminer les z dans les lignes L_3,L_4

Pivot = coefficient non nul utilisé pour éliminer l'inconnue correspondante dans les lignes suivantes
On essaie de choisir ou faire apparaitre un pivot égal à ±1 pour simplifier les calculs.

Comme j'utilise une seule et même ligne pour éliminer une inconnue sur les autres lignes, il y a équivalence !!

$\underset{L_4\leftarrow L_4+6L_3}{\overset{L_4\leftarrow L_4-6L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x+y+4z+7t=2 \\ -2y-z-5t=-1 \\ y-2t=-2 \\ 21t=21 \end{cases} \underset{L_4\leftrightarrow\frac{1}{21}L_4}{\overset{L_4\leftrightarrow\frac{1}{21}L_4}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 1x+y+4z+7t=2 \\ -2y-1z-5t=-1 \\ 1y-2t=-2 \\ 1t=1 \end{cases} \underset{L_4\leftrightarrow\frac{1}{21}L_4}{\overset{L_4\leftrightarrow\frac{1}{21}L_4}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x=11 \\ z=-4 \\ y=0 \\ t=1 \end{cases}$. Donc, $Sol(S_7)=\{(11,0,-4,1)\}$

j'utilise L_3 pour éliminer y dans L_4

- $S_8 : \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+2z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2-L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} 0=-3 \\ x-y+2z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$. Donc, $Sol(S_8)=\emptyset$.

- $S_{8bis} :: \begin{cases} 5x+3y+7z=0 \\ 3x-2y+4z=1 \\ 6x+4y-2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_3 \\ \textit{je fais apparaitre} \\ \textit{un pivot égal à } \pm1}}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} -x-y+9z=-3 \\ 3x-2y+4z=1 \\ 6x+4y-2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-6L_1}}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+6L_1}}{\rightleftarrows}} \begin{cases} -x-y+9z=-3 \\ -5y+31z=-8 \\ -2y+52z=-15 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_3 \\ \textit{je fais apparaitre} \\ \textit{un pivot égal à } \pm1}}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} -x-y+9z=-3 \\ -y-73z=22 \\ -2y+52z=-15 \end{cases}$

$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\rightleftarrows}} \begin{cases} -x-y+9z=-3 \\ -y-73z=22 \\ 198z=-59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+\frac{49}{198}+9\left(-\frac{59}{198}\right)=\frac{56}{99} \\ y=73\times\frac{59}{198}-22=-\frac{49}{198} \\ z=-\frac{59}{198} \end{cases}$. Donc, $Sol(S_{8bis})=\left\{\left(\frac{56}{99}; -\frac{49}{198}; -\frac{59}{198}\right)\right\}$.

•**46. METHODE de résolution par substitution** : on exprime l'une des inconnues en fonction des autres et on remplace dans les autres équations … puis on recommence avec les autres équations : on y exprime une autre inconnue en fonctions des autres inconnues …..

46bis. Exemples de systèmes à résoudre par substitution :

$S_9 : \begin{cases} 5x+z=0 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 2y+3z=2 \end{cases}$ (un système de 3 équations à 3 inconnues.)

$$S_9 : \begin{cases} 5x+z=0 \\ 3x-y+2z=-1 \\ 2y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z \\ 3\left(-\frac{1}{5}z\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z\right)+2z=-1 \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z \\ \left(-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}+2\right)z=-\frac{1}{2} \\ y=2-3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z \\ \left(\frac{29}{10}\right)z=-\frac{1}{2} \\ y=2-3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{29} \\ z=-\frac{5}{29} \\ y=2+\frac{15}{29}=\frac{73}{29} \end{cases}$$. Ainsi,

$Sol(S_9)=\left\{\left(\frac{1}{29};\frac{-5}{29};\frac{73}{29}\right)\right\}$.

$S_{9bis} : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2z=1 \\ t+z=2 \end{cases}$ (un système de 3 équations à 4 inconnues.)

$S_{9bis} : \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2z=1 \\ t+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1+3z \\ x=1+2z \\ t=2-z \end{cases}$. Donc, $Sol(S_{9bis})=\{(1+2z,1+3z,z,2-z)/z\in\mathbb{R}\}$.

Des systèmes où l'on hésite : $S_{10} : \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z+t=1 \\ y+t+z=2 \\ x+y+t=-1 \end{cases}$. On peut mixer les méthodes mais je vérifie toutes mes équivalences !!!

$$S_{10} : \begin{cases} 1x+y+z=0 \\ x+z+t=1 \\ y+t+z=2 \\ x+y+t=-1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_4\leftarrow L_4+L_1}}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-L_1}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x+y+z=0 \\ t-y=1 \\ y+t+z=2 \\ t-z=-1 \end{cases} \underset{substitution}{\overset{\Leftrightarrow}{par}} \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=t-1 \\ t-1+t+t+1=2 \\ z=t+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{4}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \\ t=\frac{2}{3} \\ z=\frac{5}{3} \end{cases}$$ Donc, $Sol(S_{10})=\left\{\left(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$.

•47.METHODE de résolution de système à paramètre : on cherche toujours les couples (x,y) ou les triplets (x,y,z) ou quadruplet (x,y,z,t) …. Mais le nombre de solutions et les solutions dépendront du (ou des) paramètre(s). Il faut surtout faire attention à bien détailler les opérations élémentaires effectuées et les opérations inverses pour ne pas diviser par un facteur dépendant du paramètre qui pourrait être nul pour certaines valeurs du (des) paramètre(s) : je vérifie toutes mes équivalences !!!

47 bis. Des systèmes à paramètres :

■ $$S_{11} : \begin{cases} 1x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ 3x & +2y & +mz & = & 3 \\ (m-1)x & +my & +(m+1)z & = & m \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+(m-1)L_1}}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-(m-1)L_1}}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(m-3m+3)z & = & 3 \\ & (m-m(m-1))y & +((m+1)-(m-1)^2)z & = & m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(-2m+3)z & = & 3 \\ & (2m-m^2)y & +(3m-m^2)z & = & m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(-2m+3)z & = & 3 \\ & (2-m)my & +(3-m)mz & = & m \end{cases}$$

<u>1er cas $m=0$</u> . Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2z & = & 0 \\ 2y & +3z & = & 3 \\ & 0=0 & & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=-\frac{3}{2}z+\frac{3}{2} \\ 0=0 \end{cases}$. Donc, $Sol(S_{11})=\left\{\left(-2z,-\frac{3}{2}z+\frac{3}{2},z\right)/z\in\mathbb{R}\right\}$.

<u>2ème cas $m\neq 0$</u> . Alors $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (2-3m)y & +(-2m+3)z & = & 3 \\ & (2-m)y & +(3-m)z & = & 1 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2+2L_3}{\overset{L_2\leftarrow L_2-2L_3}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1 \\ & (2-m)y & +(3-m)z & = & 1 \end{cases}$

$$S_{11} \underset{L_3\leftarrow L_3-\left(\frac{3-m}{3}\right)L_2}{\overset{L_3\leftarrow L_3+\left(\frac{3-m}{3}\right)L_2}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1 \\ & (2-m)+\frac{3-m}{3}(-2-m)y & & = & 1+\frac{3-m}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1. \\ & (m^2-4m)y & & = & 6-m \end{cases}$$

<u>1er sous − cas $m\neq 0$ et $m=4$.</u> Alors, $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +my & +(m-1)z & = & 0 \\ & (-2-m)y & -3z & = & 1 \\ & 0=2 & & & \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_{11})=\emptyset$.

<u>2ème sous − cas $m\neq 0$ et $m\neq 4$.</u> Alors, $S_{11} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{m^2-2m-4}{m(m-4)} \\ z=-\frac{4}{m(m-4)} \\ y=\frac{6-m}{m(m-4)} \end{cases}$. Ainsi, $Sol(S_{11})=\left\{\left(\frac{m^2-2m-4}{m(m-4)},\frac{6-m}{m(m-4)},-\frac{4}{m(m-4)}\right)\right\}$.

■ $S_{12} : \begin{cases} x & +2y & -z & = & a \\ -2x & -3y & +3z & = & b \\ x & +y & -2z & = & c \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1-L_3}{\overset{L_2\leftarrow L_2+L_1+L_3}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x & +2y & -z & = & a \\ & 0=b+a+c & & & \\ x & +y & -2z & = & c \end{cases}$

<u>1er cas: $a+b+c=0$.</u> . Alors $S_{12} : \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & -z & = & a \\ & 0=0 & & & \\ x & +y & -2z & = & c \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{\overset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} x+2y-z=a \\ -y-z=c-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3z-a+2c \\ y=-z+a-c \end{cases}$.

Donc, $Sol(S_{12})=\{(3z-a+2c,-a+a-c,z)/z\ \in\mathbb{R}\}$.

<u>2ème cas: $a+b+c\neq 0$.</u> . Alors $Sol(S_{12})=\emptyset$.

$$\blacksquare S_{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +y & +z & = & \lambda x \\ x & +y & +z & = & \lambda y \\ x & +y & +z & = & \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x & +y & +z & = & 0 \\ x & +(1-\lambda)y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{\rightleftarrows}} \begin{cases} (3-\lambda)x & +(3-\lambda)y & +(3-\lambda)z & = & 0 \\ x & +(1-\lambda)y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

$\underline{1er\ cas:\ \lambda = 3.}$ $S_{13} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x \quad -2y \quad +z \quad = \quad 0 \\ x \quad +y \quad -2z \quad = \quad 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(z, z, z)/z \in \mathbb{R}\}$.

$\underline{2ème\ cas:\ \lambda \neq 3.}$ $S_{13} \underset{L_1 \leftarrow (3-\lambda)L_1}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3-\lambda}L_1}{\rightleftarrows}} \begin{cases} x & +y & +z & = & 0 \\ x & +(1-\lambda)y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad +y \quad +z \quad = \quad 0 \\ -\lambda y = 0 \\ -\lambda z = 0 \end{cases}.$

$\underline{1er\ sous-cas:\ \lambda = 0.}$ Alors, $S_{13} \Leftrightarrow x = -y - z$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(-y - z, y, z)/(y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

$\underline{2ème\ sous-cas:\ \lambda \neq 0\ et\ \lambda \neq 3.}$ Alors, $S_{13} \Leftrightarrow x = y = z = 0$. Donc, $Sol(S_{13}) = \{(0,0,0)\}$.

Par substitution :

$$\blacksquare S_{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + t = 2 \\ y + z + t = -1 \\ x + t + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ x + y + t = 2 \\ t = -1 - y - z \\ x + t + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ 1 - y - z + y - 1 - y - z = 2 \\ t = -1 - y - z \\ 1 - y - z - 1 - y - z + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ t = -1 - y - z \\ -2z - y = 2 \\ -2y - z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ t = -1 - y - z \\ -2z - y = 2 \\ -2y - z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y - z \\ t = -1 - y - z \\ 3z = -1 \\ 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ t = \frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

48. BILAN :

Pour résoudre un système linéaire(S) : on va le plus souvent faire des opérations élémentaires sur (S) . On regarde d'abord si des opérations simples permettent de simplifier très vite le système (méthode 3,4). Ensuite, on utilise les méthodes classiques dans le cas d'un système 2×2 *dont les équations ne sont pas colinéaires, on* obtient directement les valeurs des deux inconnues (méthode 1, 2)

dans le cas des autres systèmes, on obtient un système linéaire équivalent à (S) et échelonné (donc facile à résoudre). (méthode 5).

On peut aussi faire par substition. Notamment dans un système 3×3, on peut utiliser une équation pour exprimer une inconnue en fonction des deux autres et en remplaçant dans les autres équations, on obtient un système 2×2 que l'on sait résoudre. La substitution est aussi pratique lorsque dans le système $n \times n$, chaque ligne contient $(n - 1)$ inconnues qui ne sont jamais les mêmes. ….