

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE RÉVISIONS

★ **Calculs algébriques**

$$1. A = \frac{43}{20} \quad B = -\frac{7}{27} \quad C = \frac{12}{7}$$

$$2. A = \frac{2}{3}\sqrt{3} \quad B = \frac{1+\sqrt{3}}{1^2-3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad C = \frac{(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{2^2-3} = -1 + \sqrt{3}$$

À retenir : On évite d'écrire des radicaux aux dénominateurs des écritures fractionnaires.

$$3. A = \frac{9!}{4!} \quad B = \frac{12!4!}{8!7!} \quad C = \frac{(n+2)!}{(n-1)!} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } C = 0 \text{ pour } n = 0$$

4. À retenir : On simplifie avant de calculer !

$$A = \frac{199!}{2!197!} = \frac{198 \times 199}{2} = 99 \times 199 = 19900 - 199 = 19701$$

$$B = \frac{20!}{3!17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{2 \times 3} = 10 \times 19 \times 6 = 1140$$

$$C = \frac{16 \times 17}{2} \times \frac{2 \times 3}{17 \times 18 \times 19} = \frac{2^4 \times 3}{19 \times 2 \times 3^2} = \frac{8}{57}$$

$$D = \frac{16 \times 17}{2} \times \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{2 \times 3}{18 \times 19 \times 20} = \frac{17 \times 2^4 \times 3}{2 \times 19 \times 2 \times 3^2} = \frac{68}{57}$$

$$5. P_1(x) = -(x+2)(3x+7)$$

$$P_2(x) = x(3x-7)$$

$$P_3(x) = 2(2x+3)(x+1)$$

$$P_4(x) = x^2(x+1) + (x+1) = (x^2+1)(x+1)$$

$$P_5(1) = 0 \text{ donc } P_5(x) = (x-1)(3x^2+5x-2) = (x-1)(x+2)(3x-1)$$

On pose $X = e^x$: $P_6(x) = X^2 - (1+e)X + e = (X-1)(X-e) = (e^x-1)(e^x-e)$

$$6. A = \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x+1}} = (x-1)\sqrt{x+1}$$

En posant : $X = e^x$, on a : $B = \frac{X^2 - X - 2}{X+1} = \frac{(X+1)(X-2)}{X+1} = \frac{(e^x+1)(e^x-2)}{e^x+1} = e^x - 2$

7. On a : $ab+bc+ac=0 \Leftrightarrow ab+bc=-ac \Leftrightarrow ab+ac=-bc \Leftrightarrow bc+ac=-ab$ d'où :

$$S = \frac{bc(b+c) + ac(a+c) + ab(a+b)}{abc} = \frac{b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2}{abc}$$

$$= \frac{a(ab+ac) + b(ab+bc) + c(bc+ac)}{abc} = \frac{a(-bc) + b(-ac) + c(-ab)}{abc} = -3$$

$$8. A = \cos x + \cos(\pi-x) - \cos x = -\cos x$$

$$B = \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{=1} + 2\sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\text{Ou } B = \cos^4 x - \sin^4 x + 2\sin^2 x = (1 - \sin^2 x)^2 - \sin^4 x + 2\sin^2 x = \dots = 1$$

$$C = \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)^3}_{=1} - 3\sin^4 x \cos^2 x - 3\sin^2 x \cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x - 1 = -3\sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + 3\sin^2 x \cos^2 x = 0$$

Car $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

★ **Démonstration par récurrence**

9. b. **Initialisation** : Pour $n = 1$, $S_2 = 1^2 = 1$ et $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc l'égalité est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose l'égalité vraie pour un entier n , $n \geq 1$, fixé.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dots = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

L'égalité est alors vraie au rang $(n+1)$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Les valeurs de ces deux sommes sont à connaître.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

10. Inégalité de Bernoulli.

Soit $P(n)$: « $\forall a > 0, (1 + a)^n \geq 1 + na$ ».

Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $\forall a > 0, (1 + a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times a$ donc l'égalité est vraie au rang 0.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, fixé. Montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a : $\forall a > 0, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Or $1 + a > 0$ donc : $\forall a > 0, (1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$

C'est-à-dire : $\forall a > 0, (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$ car $na^2 \geq 0$.

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : par principe de récurrence, on a : $\forall a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

11. b. Lorsque $q = 1$, on a : $S_n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$

c. $A_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$ $B_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right)$ $C_n = -\frac{1}{2} (1 - 3^n)$ $D_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3} \right)^k - 1 = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \right)$

★ Résolutions d'équations

12. Soit $x \in \mathbb{R}, E_1 \Leftrightarrow 3(4x + 7) - 5(x - 5) = 30 \Leftrightarrow 7x + 46 = 30 \Leftrightarrow x = -\frac{16}{7}$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \left\{ -\frac{16}{7} \right\}$.

Soit $b \in \mathbb{R}^*, E_2 \Leftrightarrow \frac{2b - 3}{2b} = \frac{10}{2b} \Leftrightarrow 2b - 3 = 10 \Leftrightarrow b = \frac{13}{2}$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{13}{2} \right\}$.

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}, E_3 \Leftrightarrow 9(a + 1)(a - 1) = 8a(a - 1) + a(a + 1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a = \frac{9}{7}$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{9}{7} \right\}$

13. 1. $x^2 + 12x + 35 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)^2 - 1 = 0$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \{-5, -7\}$.

2. Le discriminant est $\Delta = 8 > 0$ donc l'équation a 2 solutions réelles et l'ensemble des solutions est : $S = \{5 + \sqrt{2}, 5 - \sqrt{2}\}$

3. Le discriminant est $\Delta = -4 < 0$ donc E_3 n'a pas de solution réelle.

Pour ceux qui ont vu les complexes : E_3 a 2 solutions complexes conjuguées. L'ensemble des solutions est : $S = \{-2 + i, -2 - i\}$

4. L'ensemble des solutions est $S = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

5. $3x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 7) = 0$ donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{ 0, -\frac{7}{3} \right\}$

6. $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ donc pas de solution réelle.

Pour ceux qui ont vu les complexes : l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} est : $S = \{i, -i\}$

14. On sait que si on note x_1 et x_2 les solutions, éventuellement confondues, de l'équation, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. En développant et par unicité de l'écriture polynomiale, on peut identifier les coefficients devant x et x^2 , on trouve les égalités demandées.

Rq. On peut aussi reprendre les expressions de x_1 et x_2 en discutant selon le signe du discriminant Δ .

Applications :

E_1 : $(1 + \sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 = 0$ on voit que 1 est racine évidente, le produit des racines est $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$ donc

l'ensemble des solutions est : $S = \{1, 2 - \sqrt{3}\}$

Même méthode pour E_2 , on obtient que l'ensemble des solutions est : $S = \left\{ 1, -\frac{1515}{1514} \right\}$.

A retenir : En cas de racine évidente on n'a pas besoin de calculer le discriminant.

15. 1. On pose $X = e^x$ et on a : $E_1 \Leftrightarrow X^2 + (1 - \sqrt{5})X - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow X = -1$ ou $X = \sqrt{5} \Leftrightarrow e^x = -1$ ou $e^x = \sqrt{5}$

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \left\{ \frac{1}{2} \ln(5) \right\}$

$$2. E_2 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{x(1-x)} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 25x^2 - 25x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \text{ ou } x = \frac{3}{5}$$

3. On pose $X = x^2$ et on a : $E_3 \Leftrightarrow X^2 + 5X - 36 = 0 \Leftrightarrow X = 4$ ou $X = -9$ donc l'ensemble des solutions est : $S = \{-2, 2\}$

Rq. Si on résout l'équation dans \mathbb{C} , l'ensemble des solutions est : $\{-3i, 3i, -2, 2\}$

16. Le discriminant de cette équation est : $\Delta_m = (4m)^2 - 4 \times (m-1) \times (4m-1) = 20m - 4$.

• Si $\Delta_m = 20m - 4 < 0$ c'est-à-dire $m < \frac{1}{5}$ alors l'équation E_m n'a pas de solution réelle

Rq. Si on résout dans \mathbb{C} , l'équation à deux solutions complexes conjuguées :

$$\frac{4m + i\sqrt{4-20m}}{2(m-1)} = \frac{2m + i\sqrt{1-5m}}{m-1} \text{ et } \frac{2m - i\sqrt{1-5m}}{m-1}$$

• Si $\Delta_m = 20m - 4 = 0$ c'est-à-dire $m = \frac{1}{5}$ alors l'équation E_m a une unique solution réelle dite double : $-\frac{1}{2}$

• Si $\Delta_m = 20m - 4 > 0$ c'est-à-dire $m > \frac{1}{5}$ alors l'équation E_m a deux solutions réelles :

$$\frac{4m + \sqrt{20m-4}}{2(m-1)} = \frac{2m + \sqrt{5m-1}}{m-1} \text{ et } \frac{2m - \sqrt{5m-1}}{m-1}$$

17. On raisonne par équivalences :

$$S_1 : \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ y = -x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3(-x - 10) = 3 \\ y = -x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{27}{5} \\ y = -\frac{23}{5} \end{cases}. \text{ Le système } S_1 \text{ a pour unique solution } \left(-\frac{27}{5}, -\frac{23}{5} \right).$$

$$S_2 : \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_1 + 3L_2} \begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 19y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{25}{19} \\ y = \frac{10}{19} \end{cases}. \text{ Le système } S_2 \text{ a pour unique solution } \left(-\frac{25}{19}, \frac{10}{19} \right).$$

$$S_3 : \begin{cases} \sqrt{2}x - 3y = 2\sqrt{6} \\ -2x + 3\sqrt{2}y = -4\sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_1 + L_2} \begin{cases} \sqrt{2}x - 3y = 2\sqrt{6} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}x - 3y = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}x - 2\sqrt{6}}{3}$$

Le système S_3 a pour ensemble de solutions : $\left\{ \left(x, \frac{\sqrt{2}x - 2\sqrt{6}}{3} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$.

$$S_4 : \begin{cases} mx - 2y = m \\ -x + 2my = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} -x + 2my = 0 \\ mx - 2y = m \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + mL_1} \begin{cases} -x + 2my = 0 \\ 2(m^2 - 1)y = m \end{cases}$$

Deux cas sont à considérer :

• 1^{er} cas : $m^2 - 1 \neq 0$. Le système a une unique solution qui est le couple : $\left(\frac{m^2}{m^2 - 1}, \frac{m}{2(m^2 - 1)} \right)$.

• 2^{ème} cas : $m^2 - 1 = 0$ c'est-à-dire $m \in \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, l'équation $2(m^2 - 1)y = m$ n'a pas de solution.

18. La méthode consiste à raisonner graphiquement sur le cercle trigonométrique.

$$1. E_1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2. E_1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. E_3 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \text{ Posons } X = \sin x, \text{ on a : } E_4 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 2 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \text{ ou } X = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi, on a : } E_4 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$5. E_5 \Leftrightarrow 2\cos x \sin x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2\cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{OU } E_5 \Leftrightarrow \sin x = \sin(-2x) \Leftrightarrow x = -2x + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \text{ ou } -x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$6. E_6 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - 6x + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{2} + 6x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow 8x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } -4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Rq, On pouvait aussi utiliser que : } \cos(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

19. La méthode consiste à raisonner graphiquement sur le cercle trigonométrique.

$$a. \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [-\pi, -\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3}, \pi]$$

$$b. \sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{4\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$$

$$c. \sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ L'ensemble des solutions sur I est donc } S = [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}].$$

$$d. \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 4k\pi \leq x \leq 3\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{L'ensemble des solutions sur I est : } S = \{-\pi\} \cup [-\frac{\pi}{3}, \pi].$$

$$e. 2\cos(2t + \frac{\pi}{6}) > 1 \Leftrightarrow \cos(2t + \frac{\pi}{6}) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2t + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi < t < \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{L'ensemble des solutions sur I est donc } S = \left[0, \frac{\pi}{12}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$$

★ Études de signes et inégalités

20. A a deux racines réelles 1 et $-\frac{1}{7}$ donc $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{7}, 1]$

• B n'a pas de racine réelle donc pour tout $x \in \mathbb{R}, B(x) > 0$.

• On trouve $C(x) = \frac{(2x+1)^2}{x(1+x)}$ existe pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ et C(x) est du signe de $x(x+1)$

Faire un tableau de signes et on obtient : $C(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ et $C(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 0[$

• Posons $X = x^2$, on a $D(x) = 3X^2 - 4X + 1 = (3X - 1)(X - 1) = (3x^2 - 1)(x^2 - 1) = (\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)(x - 1)(x + 1)$, puis dresser un tableau de signes.

• Posons $X = e^x$, on a $E(x) = 4X^2 + X - 5 = (4X + 5)(X - 1) = (4e^x + 5)(e^x - 1)$ donc E(x) est du signe de $(e^x - 1)$
C'est-à-dire : $E(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

• Si $x \leq 0$ alors par somme de termes négatifs, on a : $F(x) < 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}, -\sqrt{x^2 + 1} \leq -1 < 0$)

Si $x > 0$, on a : $F(x) = \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} < 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) < 0$.

OU On a : $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq |x|$ et $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 1}$

Par transitivité : $\forall x \in \mathbb{R}, x < \sqrt{x^2 + 1}$ et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$.

• Si $x \leq -1$ alors $G(x) \geq \frac{1}{2} > 0$ comme somme d'un terme positif et d'un terme strictement positif : $\forall x \leq -1, -\frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}$.

et si $x \geq 1$ alors $G(x) = \frac{x^2 - 1 - \frac{1}{4}x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}x} = \frac{(\sqrt{3}x - 2)(\sqrt{3}x + 2)}{4\sqrt{x^2 - 1} + 2x}$, puis dresser un tableau de signes.

Rq. Pour $x \in]-1, 1[$, l'expression n'est pas définie car $x^2 - 1 < 0$.

21. a. Soit $x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1$. On a : $x^2 - x = x(x - 1) < 0$ donc $x^2 < x < 1$.

b. En multipliant l'égalité précédente par $x > 0$, on obtient $x^3 < x^2$ puis de même, $x^4 < x^3, x^5 < x^4$

C'est-à-dire : $0 < x^5 < x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$ et donc $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 5x^5$.

c. La question précédente montre que l'équation n'a pas de solution dans $]0, 1[$.

On remarque que 1 est solution.

Si $x > 1$ alors de même, on a : $1 < x < x^2 < x^3 < x^4 < x^5$ et $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 < 5x^5$ et l'équation n'a pas de solution dans $]1, +\infty[$.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $S = \{1\}$.

22. On étudie le signe de la différence des deux réels : $\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{x+y}{2xy} = -\frac{(x+y)(x-y)^2}{2xy(x^2+y^2)} \leq 0$.

Pour x et y strictement positifs, il est clair que la différence est négative, ainsi $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

★ Calculs de limites

23. a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{3x^2 - 2x + 2}{2x^3 + x - 5} = \frac{x^2\left(3 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{x\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}\right)}$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2x + 2}{2x^3 + x - 5} = 0$

c. On a $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}$ et la fonction cosinus est dérivable en 0 donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \cos'(0) = \sin(0) = 0$

d. On a $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ et la fonction sinus est dérivable en 0 donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \sin'(0) = \frac{1}{2} \cos(0) = \frac{1}{2}$

e. Pour tout x réel, on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc pour tout x positif, $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc en utilisant le théorème d'encadrement dit des gendarmes, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

f. On a $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0}$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$

g. On a $\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable en 1 donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{1}{1} = 1$

Rq. On pouvait aussi poser : $h = x - 1$ pour se ramener à une limite quand h tend vers 0.

h. Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0$

i. On reconnaît un taux d'accroissement et la fonction exponentielle est dérivable en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$

j. Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$

k. Par croissances comparées : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^x = 0$

l. Par somme de limites nulles : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2t} \right) = 0$

m. Pour $x \neq 0$, on a : $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}} = \frac{1}{x} \times \frac{2x}{1} = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x}} = 2$

n. On a : $\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} = 2x+1$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$

Par composition de limites : $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} \right) = \ln 3$

o. $\lim_{t \rightarrow +\infty} -t^2 + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par composition de limites $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2+1} = 0$

p. On a : $\ln(x^2 + 1) - \ln(x + 3) = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x + 3} \right) = \ln \left(\frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)} \right) = \ln \left(\frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{3}{x}} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{3}{x}} = +\infty$

Donc par composée : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x^2 + 1) - \ln(x + 3) \right) = +\infty$

★ Dérivation / Calcul de dérivées

24. f_1 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 2 \ln(x^2 + 1) + 2x \frac{2x}{x^2 + 1}$

f_2 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f_2'(x) = \sqrt{x} + (x+1) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$

f_3 est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \neq 0$, $f_3'(x) = \frac{2xe^{x^2+1}x - e^{x^2+1}}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2} e^{x^2+1}$

f_4 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = -2\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = -\omega \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega \cos(2\omega t)$

f_5 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_5'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{x^2+1}$

f_6 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_6'(x) = -e^{-x \cos x} - e^{-x} \sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

f_7 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_7'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

f_8 est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$, $f_8'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x}$

★ Calculs de primitives

25. Une primitive sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ est : $F_1 : x \mapsto 3x + \ln|x| - \frac{1}{x}$

f_2 est de la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ donc une primitive sur \mathbb{R} est : $F_2 : x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

$f_3(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ donc une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est : $F_3 : x \mapsto x - 2 \ln|x+1|$.

f_4, f_5 et f_6 sont de la forme $ku'u^\alpha$ donc $F_4 : x \mapsto \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^3}{3}$ sur \mathbb{R} , $F_5 : x \mapsto \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$ sur $] -1, +\infty[$

et $F_6 : x \mapsto -2\sqrt{1-x}$ sur $] -\infty, 1[$.

f_7 est de la forme $u'e^u$ donc une primitive sur \mathbb{R} est $F_7 : x \mapsto -\frac{1}{k}e^{-kx}$.

f_8 est de la forme $u'u$ donc une primitive sur $]0; +\infty[$ est $F_8 : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$

$F_9 : x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b)$ sur \mathbb{R}

$f_{10}(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ donc une primitive sur \mathbb{R} est $F_{10} : x \mapsto \frac{2x + \sin 2x}{4}$

26. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

b. $\int_0^1 (4x^7 - 2x^3 + 3x^2 - 2) dx = \left[4 \frac{x^8}{8} - 2 \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} - 2x \right]_0^1 = \frac{4}{8} - \frac{2}{4} + \frac{3}{3} - 2 = -1$

c. $\int_{-3}^{-2} \frac{du}{u} = \left[\ln|u| \right]_{-3}^{-2} = \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$

d. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[\ln|x| + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$

e. $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 3 \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} dx = 3 \left[\sqrt{1+x^2} \right]_{-1}^{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + 6$ (On reconnaît une expression de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

f. $\int_0^1 t e^{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2t e^{t^2-1} dt = \frac{1}{2} \left[e^{t^2-1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$

g. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{1-x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2 - 1 = 1$

h. $\int_e^2 \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_e^2 = 1 - \frac{1}{\ln 2} = \left(\text{On reconnaît une expression de la forme } -\frac{u'}{u^2} \right)$

i. On a : $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$ et

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = \left[x - \ln(1+e^x)\right]_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln 2 = \ln(e) - \ln(1+e) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right)$$

j. On a : $\frac{2t-1}{t-1} = \frac{2(t-1)+1}{t-1} = 2 + \frac{1}{t-1}$

Déterminer a et b deux réels tels que $\frac{2t-1}{t-1} = a + \frac{b}{t-1}$ et calculer $\int_2^4 \frac{2t-1}{t-1} dt = \int_2^4 \left(2 + \frac{1}{t-1}\right) dt = [2t + \ln(t-1)]_2^4 = 4 + \ln 3$

27. a. $\int_0^5 xe^{-x} dx = 1 - 6e^{-5}$

b. $\int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{4}(1+e^2)$

c. $\int_1^2 (x^2 - x + 1) \ln x dx = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{37}{36}$

d. $\int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx = \frac{\pi}{2} - 1$

e. $\int_{\pi/2}^{\pi} (x^2 - 3x) \sin(2x) dx = \frac{1}{8}(4 + 18\pi - 5\pi^2)$

f. $\int_e^2 \ln x dx = \ln 4 - 2 = 2 \ln 2 - 2$

g. $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 4 = 8 \ln 2 - 4$

h. $\int_{1/4}^1 \sqrt{x} \ln x dx = \frac{1}{12} \ln 4 - \frac{7}{18}$

28. a. On a : $I_2 = e - \sqrt{e}$

b. On réalise une intégration par parties sur $I_n + 1$ avec $u(x) = \frac{1}{x^{n-1}} = x^{-n+1}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x}$

c. On obtient : $I_3 = \frac{1}{2} \sqrt{e}$

★ Equations différentielles

29. a. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{2x} - \frac{3}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

b. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{-3x/2} + \frac{5}{3}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

c. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{-4x} - \frac{1}{4}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

d. L'unique solution est la fonction : $x \mapsto \frac{3}{5} - \frac{13}{5} e^{-5x}$

e. L'unique solution est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2} e^{-2(x+2)}$

Rappel pour les 3 derniers exemples :

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ (E) sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{ax} + f_p(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et f_p est une solution particulière de (E).

f. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{2x} - e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

g. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto (\lambda + x)e^{2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

h. Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto \lambda e^{-3x} + \frac{3}{10} \sin x - \frac{1}{10} \cos x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

★ **Dénombrement**

30. a.

- Un code à 4 chiffres est une 4 liste de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Il y a donc 10^4 codes possibles.

- Un code avec des chiffres deux à deux distincts est un 4-arrangement de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Il y en a donc $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$.

- Le complémentaire de l'ensemble des codes contenant le chiffre 1 est l'ensemble des codes ne contenant pas le chiffre 1.

Il s'agit des 4-listes de l'ensemble $\{0, 2, \dots, 9\}$. Le cardinal du complémentaire est donc égal à 9^4 .

On en déduit que le nombre de codes contenant le chiffre 1 est $10^4 - 9^4$.

- Un tel code est défini par l'emplacement des deux chiffres 8 et le choix de deux autres chiffres différents de 8.

Il y en a donc $\binom{4}{2} \times 9^2 = 486$

- Un tel code est défini en ordonnant par ordre croissant une 4-combinaison de l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Il y en a donc $\binom{10}{4} = 210$

b.

- Une main de 8 cartes dans un jeu de 52 est une 8-combinaison de l'ensemble des cartes. Il y a donc $\binom{52}{8}$ mains possibles

- Une telle main s'obtient en choisissant 3 cartes rouges parmi 26 et 5 cartes noires parmi 26. Il y en a donc $\binom{26}{3} \times \binom{26}{5}$

- Le complémentaire contient les mains ne contenant aucun cœur, c'est-à-dire les 8-combinaisons de l'ensemble des cartes privé des 13 cœurs. Le complémentaire a donc pour cardinal $\binom{39}{8}$.

Les mains contenant au moins un cœur sont au nombre de $\binom{52}{8} - \binom{39}{8}$

- Une telle main s'obtient en choisissant 3 cœurs parmi les 13 cœurs et 5 cartes parmi les 39 restantes. Il y en a donc $\binom{13}{3} \times \binom{39}{5}$

- Il faut ici faire une partition de ces mains selon qu'elles contiennent ou non le roi de cœur.

On raisonne comme précédemment.

Le nombre de mains contenant exactement 2 rois et 3 cœurs dont le roi de cœur est $\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{4}$

roi de cœur
2ème roi
autre cœurs
autres cartes

Le nombre de mains contenant exactement 2 rois et 3 cœurs sans le roi de cœur est $\binom{3}{2} \times \binom{12}{3} \times \binom{36}{3}$

roi
autres cartes

cœurs

Au total le nombre de mains recherchées est donc $\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{4} + \binom{3}{2} \times \binom{12}{3} \times \binom{36}{3}$

