24 JOURS

pour préparer son entrée en 2e année de prépa

MATHÉMATIQUES

de la SUP à la SPÉ

- Un planning optimisé de révisions
- Une sélection d'exercices les plus représentatifs de la Sup
- Les énoncés décryptés afin d'évaluer les points critiques
- Des corrigés détaillés avec les commentaires du professeur
- Les méthodes et formules à retenir

Walter **DAMIN**

ellipses

24 JOURS

pour préparer le passage en deuxième année

de Classe Préparatoire aux Grandes Écoles

pour les élèves de première année

des filières

MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Mathématiques

Walter Damin

Professeur en classe de 2TSI

au lycée Pierre-Paul Riquet à Saint Orens de Gameville

Présentation de la collection

Réussir son entrée en Spé nécessite une bonne organisation, notamment durant les vacances d'été précédant cette rentrée.

Seuls durant l'été, les étudiants doivent souvent faire face aux deux grandes interrogations suivantes :
– quels exercices travailler pour être sûr d'avoir revu l'intégralité du programme de Sup ?
– quelle méthode efficace utiliser pour bien travailler ces différents exercices ?
Il est à noter que la première question relève d'une double problématique, à la fois qualitative mais aussi quantitative.

J'ai donc conçu cette collection pour répondre à ces deux questions.

Tout d'abord, chaque ouvrage de la collection, dédiée à une matière précise, donne naissance à l'étude de 24 sujets, et **24 sujets seulement**. Les auteurs de la collection ont **méticuleusement sélectionné** ces 24 sujets afin de **garantir des révisions efficaces de l'ensemble du programme de Sup**. De plus, pour optimiser encore davantage la qualité des révisions, les auteurs ont agencé ces 24 sujets de façon très réfléchie, de sorte qu'un même thème soit revu plusieurs fois à des moments bien différents.

Ensuite, chaque ouvrage propose la même **approche très méthodique**. On se base sur 24 séances de travail réparties sur l'été : ces 24 séances doivent être prévues dans le début de l'été. Durant chaque séance, l'étudiant doit chercher, seul, un sujet complet puis il consacre la fin de cette séance à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du corrigé.

Les **24 sujets** sont toujours organisés de la façon suivante :
– une **présentation du sujet** ;
– une **analyse stratégique de l'énoncé** ;
– un **corrigé très détaillé**, de telle sorte que la solution soit comprise de tous les étudiants ;
– des **techniques à mémoriser** ;
– un **formulaire** lié à l'exercice ;
– des **commentaires pertinents**.

Bien évidemment, il est tout à fait possible de travailler méthodiquement avec les ouvrages de cette collection plus régulièrement **tout au long de l'année de Sup** (en utilisant notamment les nombreux tableaux récapitulatifs des exercices). Travailler ainsi est donc l'assurance de se préparer très sérieusement à bien aborder la Spé et les concours.

Alors, bon vent vers la réussite !

Karine Beaurpère

Sommaire

Présentation du manuel

Ce manuel a pour but de vous préparer à aborder la deuxième année de classe préparatoire aux Grandes Écoles de la façon la plus efficiente possible. Il s'adresse à tous les élèves faisant (ou venant de faire) une classe préparatoire scientifique dans les filières MPSI, PCSI, PTSI, 1TSI et 1TPC.
Il peut s'adresser aussi aux étudiants faisant une première année de cycle universitaire scientifique.

Tous les exercices proposés ici sont issus des principaux concours (et ont été posés récemment) et accessibles aux élèves de première année. En effet, seuls des sujets conçus sur le programme de première année ont été retenus dans cet ouvrage. Ce sont des sujets accessibles la plupart du temps par toutes les filières (quelques exercices peu nombreux ne sont pas abordables essentiellement dans le programme de 1TSI ou de 1TPC et d'autres sont réservés pour les filières 1TSI ou PTSI, à cause de la géométrie. Ces exercices sont indiqués).

Les derniers « Jours » sont formés d'exercices qui utilisent le logiciel Python. En effet, quelle que soit votre filière en deuxième année, vous aurez des développements en Python à faire dans certaines épreuves de Mathématiques, à l'écrit comme à l'Oral. Par exemple à l'écrit du Concours Commun INP (ex CCP), filière MP ou à l'oral dans l'épreuve de Mathématiques II de Centrale-Supélec, filières MP-PC-PSI (CCS pour TSI). Bien entendu ces exercices proposés sont faisables uniquement avec le programme de première année.
Notez que de la page 13 à la page 18, on vous propose quelques rappels sur Python pour aborder les exercices concernés ou d'autres que vous pourrez rencontrer en première année.

Parlons maintenant de la manière d'aborder ce livre. Il y a deux façons de l'utiliser.

Tout d'abord l'utiliser en cours de première année, ce qui permet de commencer à travailler des thèmes déjà abordés en classe. Attention, la numérotation des sujets, appelés « Jours », ne suit pas l'ordre classique du programme et il faudra aller vous référer aux tableaux page 19 et 20 pour traiter les planches d'exercices correspondantes à telle ou telle partie du programme de première année.

On peut aussi aborder ce livre sur une période de 4 semaines, ce qui fait l'originalité de ce manuel. La période idéale est pendant le cours de l'été entre les deux années de prépa. Vous pouvez aussi utiliser la période d'un mois qui précède le concours blanc que beaucoup de lycées font maintenant en fin de première année.

Le principe est alors le suivant.
On se base donc sur 4 semaines de révision, à raison de 6 jours de travail par semaine et d'une à deux heures par jour de travail.
Durant la première heure, vous devrez chercher, comme d'ailleurs parfois au concours

(par exemple Mines-Ponts), un sujet composé de 2 exercices. Les deux exercices que l'on vous propose dans chaque planche, appelée donc « Jour », sont issus de deux parties différentes du programme pris parmi les grands thèmes : Algèbre, Analyse, Probabilités et Géométrie. Ainsi pendant une première durée de 30 minutes, vous allez chercher la solution des deux exercices puis vous consacrerez encore 30 minutes à une analyse minutieuse du corrigé de chacun des deux exercices. Bien entendu, selon votre entraînement et votre dextérité, la première durée de 30 minutes peut être 45 minutes ou une heure.

Par ailleurs, comme indiqué plus haut, quelques exercices dépassent le programme des classes de 1TSI ou de 1TPC. Il s'agira alors toujours de quelques seconds exercices car le premier exercice de chaque « Jour » est pris généralement sur l'intersection de toutes les filières. Pour les « Jours » concernés, les étudiants de 1TSI et de 1TPC ne traiteront donc que le premier exercice.

Concrètement, cela signifie que vous devrez suivre, jour après jour, le planning qui vous est proposé ici. Le premier jour de révision, vous vous attaquerez au « Jour n^{o}1 », *etc* jusqu'au « Jour n^{o}24 ». Vous aurez alors traité 24 sujets, c'est-à-dire au total 48 exercices (un peu moins donc si vous êtes en filière 1TSI ou 1TPC).

Plus précisément, on ne vous présente qu'une sélection de sujets. Il est clair que l'on ne peut pas donner tous les sujets posés une année, ni même s'en approcher. De toute façon, cela ne serait pas très productif. Il fallait donc faire un choix. Soulignons donc que la sélection des sujets proposés ici résulte d'un travail réfléchi vous permettant d'optimiser votre préparation à aborder la deuxième année. En effet, ces sujets ont été choisis de telle sorte que vos révisions vous permettent d'aborder tous les thèmes du programme ainsi que les situations les plus classiques auxquelles vous pouvez être confronté, notamment à l'oral des concours.

Je tiens aussi à souligner que l'ordre choisi pour ces 48 exercices, fruit d'une mûre réflexion, vous permet de revoir en permanence les thèmes majeurs du programme. Seuls les « Jours » où l'on utilise Python sont placés vers la fin de cet ouvrage. Les parties du programme abordées sont bien entendu variées pour ces exercices et couvrent largement les thèmes mathématiques de première année illustrés par le logiciel.

Le but est ici d'éviter de travailler tous ces thèmes les uns après les autres. Cette approche pourrait en effet s'avérer négative puisqu'à la fin des 4 semaines de révision, le premier thème révisé serait déjà bien loin.

Chaque jour de révision est construit de la façon suivante.

Une première page comporte les deux sujets à travailler : dans sa forme, cette page est similaire à celle que vous aurez en particulier le jour de l'oral au détail près que ce jour là, vous n'aurez que 30 minutes de préparation (ou parfois aucune préparation). Ne soyez pas effrayé ! Ici, vous êtes seulement en apprentissage. Le but est de simplement vous préparer aux concours.

Je tiens de suite à insister sur le fait qu'un corrigé seul est finalement assez inutile. Il est effectivement inutile à l'étudiant qui sait faire l'exercice mais il est tout aussi inutile à l'étudiant qui ne sait pas le faire puisque c'est l'analyse du problème qui est avant tout essentielle. C'est ce qui explique les différentes parties qui vont être exposées ci-après.

Voici donc le schéma adopté pour chacun des deux exercices.

On commence par préciser à quelles filières s'adresse l'exercice (souvent toutes ou presque toutes) ainsi que le niveau de l'exercice. Le codage du niveau est le suivant :
♣ exercice facile qu'il faut savoir traiter rapidement ;
♣ ♣ exercice de niveau moyen pouvant comporter des questions un peu délicates ;
♣ ♣ ♣ exercice comportant des questions particulièrement difficiles.

La suite se découpe selon les 5 parties suivantes.

Énoncé

L'énoncé de l'exercice est redonné afin de faciliter la compréhension de l'analyse à venir. Cela évite en effet de revenir en arrière pour relire l'énoncé.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cette partie commence par présenter l'objet de l'exercice. Il précise le concours où il a été posé ainsi que la filière de deuxième année concernée. Maintenant, ceci n'est qu'une indication car bon nombres d'exercices (à peine transformés) se retrouvent dans beaucoup de filières et à plusieurs concours. C'est ce qui fait le choix de ces exercices standards et formateurs dans ce livre.

Puis l'analyse de l'énoncé se fait question par question. Il s'agit alors de comprendre la question posée et de voir comment démarrer efficacement sur cette question.
On pourra trouver ici des extraits de rapports de jurys. Ces extraits sont extrêmement importants car ils mettent en avant ce qui est véritablement attendu aux concours.
Il est bon de commencer par lire cette partie avant de lire le corrigé « technique » qui va suivre afin de bien analyser les processus conduisant à la solution à venir.

$\hookrightarrow$ Une conclusion vient ensuite mettre en avant l'essentiel de cette question

Corrigé

Cette partie correspond bien évidemment au corrigé de l'exercice. Ce corrigé est très détaillé afin de permettre une compréhension rapide. Comme je l'avais souligné déjà plus haut !

Techniques à mémoriser

Puisque ce qu'il faut retenir d'un exercice, ce sont avant tout les techniques qui ont été utilisées au cours de cet exercice, une partie complète liste l'ensemble des techniques à mémoriser issues de l'exercice étudié.

C'est pourquoi cette partie est construite avec une succession de phrases commençant par :

♡ Il faut se souvenir

Formulaire

Une dernière partie consiste à lister les formules majeures utilisées dans l'exercice.

Si vous suivez ce planning, vous aurez revu efficacement l'intégralité des thèmes du programme en ayant travaillé sur des sujets récents. C'est donc l'assurance d'une préparation au passage en deuxième année réussie.

Les numéros des exercices sont fabriqués comme suit : le premier numéro renvoie au jour de préparation où se trouve l'exercice et le deuxième numéro renvoie à la place de cet exercice dans le couplage considéré. Par exemple, tout ce qui concerne l'exercice 3.2 se trouve en deuxième partie du « Jour n°3 ».

Pour finir, donnons quelques extraits de rapports de jury assez généralistes (certains ne sont pas dénués d'un certain humour comme vous le verrez), pris dans plusieurs concours et plusieurs filières et concernant l'écrit ou l'oral. L'année est mentionnée mais ces extraits sont finalement intemporels. Vous pouvez les lire et les méditer de temps en temps.

> Rapport du jury Centrale-Supélec, filière PSI 2008
>
> Nous parlons du comportement du candidat pendant l'oral. Si nous sommes satisfait de l'effort, indispensable d'apprentissage des notions prévues par le programme, la passivité des candidats nous inquiète. Un bout de dialogue entre un candidat et l'un d'entre nous :
> *L'examinateur résume les résultats obtenus, et rappelle l'objectif de la question.*
> *L'examinateur :* -Quelle approche pourrait-on envisager maintenant ?
> *Le candidat :* -Ah mais je vois très bien où il faut arriver, mais je fais comment ?
> *L'examinateur :* -..........(Silence)
> *Le candidat (sur un ton insistant, ayant peut-être peur que l'examinateur ne se soit endormi alors que le temps passe, ou n'ait pas entendu la question...) :*
> -Monsieur ? Je fais quoi alors maintenant ? ? ?
> Une telle attitude consumériste, fréquente, est inquiétante pour de futurs ingénieurs. Certains candidats ont par ailleurs clairement avoué préférer le silence :
> « Mon prof m'a dit qu'il vaut mieux ne rien dire plutôt que de dire une bêtise ; alors je ne dirai rien. ».
> Nous ne sommes pas sûrs que le candidat qui a proféré cette sentence ait été pleinement satisfait de l'appréciation chiffrée qui a couronné son oral.

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP), filière TSI 2016

La présentation des copies est globalement bonne : résultats encadrés, efforts d'écriture et de rédaction, de clarté et de nombreux candidats essayent d'expliquer leurs raisonnements. On note encore quelques copies pour lesquelles ce soin élémentaire n'est pas apporté : les pages ne sont pas numérotées, la numérotation des questions est rare, parfois pas d'encadrement et les résultats ne se dégagent pas du texte, un texte parfois tout en bloc et sans aucune aération et donc de lecture difficile, ratures, etc. Rappelons que ce soin apporté aux copies correspond à une part non négligeable de la note finale. Dans quelques rares copies a pu être observée l'utilisation d'un langage très familier particulièrement déplacé lors d'un concours.

Rapport du jury Mines-Ponts, filière PSI 2011

Ce qui est attendu des candidats - la forme :

S'agissant d'une épreuve orale, il est nécessaire d'instaurer un dialogue avec l'examinateur. Il faut pour cela : s'exprimer clairement, utiliser un vocabulaire rigoureux, commenter les initiatives prises, expliquer la démarche de résolution suivie... De même, la gestion du tableau doit être soignée afin d'éviter les erreurs - fréquentes - de calculs, de faciliter le raisonnement, mais aussi de rendre l'exposé plus clair.

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP), filière PC 2017

La stratégie qui consiste à faire des impasses lourdes sur certaines parties du programme n'est pas objectivement payante pour les candidats. Il est en effet important de rappeler que tous les exercices, qu'ils soient majeurs (sur 14 points) ou secondaires (sur 6 points), abordent **toutes** les parties du programme (première année et deuxième année).
Il y a donc des exercices (majeurs ou secondaires) traitant des fonctions de plusieurs variables, de géométrie différentielle, de polynômes, ou encore de nombres complexes. Ces exercices sont souvent volontairement plus faciles que les autres et un candidat qui maîtrise les définitions de base peut s'octroyer un nombre appréciable de points. Il y a aussi des exercices (majeurs ou secondaires) portant principalement sur le programme de **première année**. Il est donc très utile pour un candidat de consolider ses acquis antérieurs.

Rapport du jury Centrale-Supélec, filière PSI 2008

Profitons-en ici pour saluer la presque-disparition des jeans à trous, des pantalons qu'il faut remonter toutes les trois secondes pour éviter d'exhiber son caleçon, et autres bermudas, dont le port semble plus indiqué sur les plages qu'à un oral d'entrée dans une Grande École.

Rapport du jury Centrale-Supélec, filière PSI 2011

De façon générale, les candidats n'ont pas peur des calculs, aussi compliqués soient-ils. Malheureusement, cela joue parfois des tours. Il n'est pas rare qu'en réfléchissant un peu, des calculs qui semblaient très lourds se revèlent très rapides à l'aide d'arguments simples, cela est particulièrement manifeste en algèbre linéaire et lors de la résolution de certaines équations différentielles.

> Rapport du jury Mines-Telecom, toutes filières 2017
>
> On peut conseiller aux candidats :
> • D'avoir des idées très claires sur les grands théorèmes du programme sachant qu'ils devront les utiliser sans préparation. On attend qu'ils en connaissent parfaitement les hypothèses.
> • De s'habituer (par exemple en colle) à un oral qui soit un dialogue et pas un monologue.
> • D'être honnête, en évitant par exemple de détourner des indications en laissant croire que c'est ce qu'ils avaient dit.
> • Pour avoir une idée de ce qui les attend, le jury donne aux futurs candidats cinq exemples de sujets qui pourraient être posés dans toutes les filières.

> Rapport du jury Centrale-Supélec, filière PC 2005
>
> Ce qui est surprenant, c'est que le principal problème rencontré par de nombreux candidats, et la source de leur incapacité à résoudre des problèmes, est facilement analysable : une méconnaissance, parfois même une profonde ignorance du COURS.

> Rapport du jury E3A, toutes filières 2016
>
> Les futurs candidats qui veulent réussir l'écrit doivent s'y préparer :
> • en apprenant à gérer de façon équilibrée leur temps entre les différents exercices ;
> • en s'appuyant sur des connaissances solides ;
> • en maîtrisant les techniques de calcul élémentaires.

Rappelons qu'aux concours (écrit et oral), vous risquez d'utiliser le langage Python à l'intérieur d'un exercice de mathématiques. Donnons un extrait de rapport de jury qui permet d'avoir une idée de ce qui est proposé.

> Rapport du jury Centrale-Supélec (CCS), toutes filières 2016
>
> L'épreuve orale de Mathématiques 2 du Concours Centrale-Supélec est une épreuve de mathématiques, aidée de l'outil informatique. Un ordinateur équipé des logiciels Python (distribution Pyzo) et Scilab est mis à disposition du candidat. Un pense-bête présentant différentes fonctions Python pouvant être utiles est fourni lors de l'épreuve et consultable en ligne sur le site du concours depuis la mise en place de cette épreuve. Le candidat dispose d'une préparation d'un peu moins d'une demi-heure puis est interrogé pendant 30 minutes environ.
> L'outil informatique peut être employé pour effectuer des calculs, des tracés de courbes ou de surfaces, étudier des exemples numériques correspondant à un problème théorique donné, simuler une expérience aléatoire, émettre des conjectures...
> Dans cette épreuve, l'examinateur évalue la capacité du candidat à aborder de manière constructive les notions du programme de Mathématiques de la filière.

Juste un dernier mot pour adresser un message à ma femme, Isabelle, et mes deux fils, Guillaume et Gauthier, qui font toujours preuve de patience pendant mes longues périodes de rédactions de livres aux Éditions Ellipses et enfin aussi aux étudiants qui testent régulièrement certains de mes exercices ou problèmes.

Rappels sur le langage Python pour préparer le passage en deuxième année de prépa

On fournit et on rappelle ici un tour d'horizon des différentes possibilités d'utilisation du langage Python pour faire par exemple une planche d'oral de Mathématiques 2 de Centrale-Supélec, tout en restant dans le programme de première année. Pour qu'elle soit efficace, cette liste proposée de modules, de fonctions, de commandes de base et cette revue des syntaxes classiques doivent être complétées par des points plus spécifiques (comment tracer une ou plusieurs courbes, comment créer une expérience aléatoire, comment intégrer numériquement, etc.). Ces points sont développés dans la partie « Technique » des exercices où ils sont utilisés. On les indique plus loin dans le paragraphe VI. Et ainsi, le jour adéquat, vous serez prêt.

Par ailleurs, par souci de clarté, dans les exemples et les exercices, toutes les commandes à taper par l'opérateur commencent par >>> (ce qui est le cas si l'on reste dans le *shell*), pour les différencier de ce que l'ordinateur écrit ou dessine lui-même.

I. Les fonctions de bases, les modules et les attributs

On commence par télécharger une version de Python (Python 3.4, Python 2.7 ou autre) généralement au travers d'un environnement de développement.
Parmi les plus connus citons Spyder, winpython, Pyzo et IDLE. À l'oral de Centrale-Supélec par exemple, c'est Pyzo mais ce n'est pas obligatoire pour votre préparation.

1-1 Les fonctions de base

Quand on télécharge le Python « sec », on peut utiliser un certain nombre de fonctions rentrées d'office. On peut citer entre autre celles qui enrichissent une procédure : *input* ou *return* ou encore *print*.

1-2 Les modules et les sous-modules

En plus de l'environnement et du langage Python lui-même, il existe des modules (on dit aussi bibliothèques) contenant un certain nombre de fonctions prédéfinies.
Dans le rapport de jury de l'Oral de Math II de Centrale-Supelec, il est écrit :

> Rapport du jury Centrale-Supélec (CCS), toutes filières 2017
>
> Concernant Python, **le jury attend que les candidats soient familiarisés avec l'utilisation des bibliothèques numpy, scipy et de la bibliothèque de visualisation associée matplotlib**. Cependant, *aucune connaissance de fonctions particulières n'est exigée* ; les candidats auront à leur disposition, pendant l'épreuve, des documents listant un certain nombre de fonctions qui peuvent être utilisées pour résoudre les exercices proposés.

En tout cas découvrir toutes ces fonctions et d'autres qui peuvent être utiles le jour de l'Oral n'est pas très efficace !

Comment charger un module ou une fonction d'un module ?
Soit un module générique que nous appellerons *package*. Il contient toutes les expressions et fonctions python définies dans le fichier *package.py*.
Pour importer *package* ou des fonctions ou des classes incluses dans *package*, on applique une des règles suivantes :
import package : accès à la fonction *fonction* de *package* en tapant *package.fonction*.
import package as pa : accès à la fonction *fonction* de *package* en tapant *pa.fonction*. On dit que *pa* est un alias de *package*.
from package import $*$: accès à la fonction *fonction* de *package* en tapant *fonction* (sans pré-fixage).
from package import fonction : accès à la seule fonction *fonction* de *package* en tapant *fonction*.
Parfois la fonction qui nous intéresse est dans un sous-module *sous* $-$ *package* d'un module principal *package* et on tape :
import package.sous $-$ *package as sp* ou
from package.sous $-$ *package import fonction*

Comment s'informer sur le contenu d'un module ou sur une fonction d'un module ?
dir( ) liste les modules ou fonctions déjà chargés à un moment donné.
Après avoir charché le module *package* avec *import package* :
dir(*package*) liste les fonctions et constantes du module *package*.
help(*package*) renvoie des informations sur les fonctions du module *package*.
help(*package.fonction*) renvoie des informations sur *fonction* du module *package*.

Passons maintenant aux modules incontournables.
• Le module **math** ; il contient les principales fonctions et constantes usuelles.
• Le module **numpy** ; il permet de faire du calcul scientifique et de manipuler des tableaux. On l'importe en totalité avec l'instruction :
>>> *import numpy as np*
Son alias usuel est *np*.
Notons ici une fonction de *numpy* bien pratique. C'est *copy* qui permet de copier une liste (ou un tableau) donnée en argument, de travailler sur cette copie sans modifier la liste initiale.
Le sous-module de *numpy* que l'on utilise principalement est *linalg*, consacré à tout ce qui est calcul matriciel.
>>> *import numpy.linalg as alg*
Et donc son alias usuel est *alg*.
Notons aussi *polynomial*, utile comme son nom l'indique, pour le calcul polynomial. On l'importe avec :
>>> *from numpy.polynomial import Polynomial*.
• Le module **scipy** ; il permet lui aussi de faire du calcul scientifique.
Pour le charger, on tape : *import scipy as sp*
De plus, on utilise principalement deux de ses sous-modules.
On les importe avec :
>>> *import scipy.optimize as resol* , *import scipy.integrate as integr*.
Noter le choix explicite des alias.
On peut rajouter le sous-module *scipy.special* qui contient notamment la fonction *binom* et le sous-module *scipy.stats* utile en probabilités.

• Le module **matplotlib** ; il permet de faire du graphisme (tracé de courbes en particulier). On importe son sous-module important avec l'instruction :
>>> *import matplotlib.pyplot as plt*
L'alias est ici *plt*.
• Le module **random** ; il permet en fait de générer des nombres aléatoires.
On l'importe en totalité avec :
>>> *import random as rd*

Passons à un module moins indispensable mais qui méritent le détour.
• Le module **time** ; ce module gère tout ce qui concerne le temps d'exécution. Donnons les commandes pour connaître le temps mis pour l'exécution d'une procédure donnée. Pour cela on utilise la fonction *perf_counter* du module *time*.
>>> *from time import perf_counter as pc*
>>> $t = pc(\,)$; *expression* ; $print(pc(\,) - t)$
La syntaxe « expression » est en général une valeur de la fonction dont on veut analyser la rapidité d'exécution.

1-3 Les attributs
Il faut noter aussi l'existence de fonctions utilisées comme attributs. On les fait fonctionner ainsi : on affecte une variable, on la note X par exemple et on tape $X.fonction$ ce qui fait opérer $fonction$ sur X. Donnons les principaux domaines où on va les rencontrer.
• La variable affectée a est un complexe.
Exemples : $a.real$ et $a.imag$.
• La variable affectée p est un polynôme.
Exemples : $p.coef$, $p.degree$, $p.roots$, $p.deriv$.
• La variable affectée A est une matrice.
Exemples : $A.shape$, $A.reshape$, $A.dot$, $A.T$.
• La variable affectée va est une variable aléatoire réelle.
Exemples : $va.pmf$, $va.mean$, $va.sdt$.
• La variable affectée L est une liste.
Exemples : $L.insert$, $L.append$, $L.extend$, $L.reverse$ etc.

II. Les commandes de base

2-1 Variables et affectation
L'affectation se fait avec le symbole =
>>> $a = 3$; $b = 5$; $c, d, e\ =\ 2, 4, 6$
>>> $a + b\,,\ e$
8 6
 # On peut effectuer plusieurs affectations à la fois
2-2 La fonction *print*
On affiche des résultats avec *print* en séparant les arguments par des virgules.
>>> $a = 3$; $print(2 * a, a * a, a * *10)$
6 9 59049

2-3 La fonction *return*
Elle agit comme *print*, c'est-à-dire affiche le résultat. Mais attention, si l'on fait appel à *print* trois fois dans une procédure, il y aura trois affichages. Pour *return*, c'est

le premier exécuté qui s'affiche. C'est important de le souligner dans des boucles conditionnelles.

2-4 La fonction *assert*
Si l'on tape l'instruction *assert p*, où p est une proposition, l'exécution envoie un message d'erreur si p est fausse.

2-5 Les booléens
faux est $False$ et vrai est $True$. A *and* B signifie que l'on a A et B à la fois. A *or* B signifie que l'on a A ou B. Enfin, *not* A signifie que l'on a la négation de A.
Noter que $return(a\ ==\ b)$ renvoie un booléen.

2-6 Opérations concernant les entiers, flottants et complexes
Pour commencer, trois types de nombres existent principalement, les entiers tout d'abord, puis les nombres à virgule flottante appelés aussi flottants et les nombres complexes. La notation $1e-7$ par exemple désigne 10^{-7}. Il faut s'en rappeler pour des arrêts de boucles.

• ***Opérations arithmétiques somme, différence, produit et divise*** : $+\ -\ *\ /$
• ***Exponentiation*** a^b. On écrit $a\ **\ b$
• ***Comparaison.***
a est inférieur (respectivement supérieur) ou égal à b s'écrit $a\ <=\ b$ (respectivement $a\ >=\ b$). a est égal à b s'écrit $a\ ==\ b$. (Remarquer que l'égalité est $==$ et non $=$ qui est l'affectation.) a n'est pas égal à b s'écrit $a\ !=\ b$.
• ***Minimum ou maximum*** (s'applique à autant d'argument que voulu) : min, max.
• ***Sommation***. La commande $k\ +=\ n$ signifie que l'on rajoute n à k.
• ***Produit***. La commande $k\ *=\ n$ signifie que l'on multiplie n à k.
• ***Conversion***. La commande $float(n)$ convertit l'entier n en flottant et la commande $int(x)$ donne l'entier le plus proche de x.

2-7 Fonctions réelles prédéfinies les plus utiles
Les fonctions prédéfinies peuvent venir parfois du module principal ou de *numpy* avec l'alias *np* ou de *math* avec l'alias *mt* ou de *scipy* avec l'alias *sp* ou enfin de *sympy*. On peut se rappeler que si par exemple, on tape $from\ numpy\ import\ *$ alors plus besoin d'alias.

• ***Nombres remarquables à connaître***. Pour la constante de Neper e, c'est $mt.e$ ou $np.e$, pour π c'est $mt.pi$ ou $np.pi$ et pour $+\infty$, c'est $np.inf$.

• ***Valeur absolue ou module*** de x. On écrit $abs(x)$.

• ***Fonction racine carrée*** de x. On écrit $np.sqrt(x)$.

• ***Partie entière et arrondi*** de x. La commande $mt.floor(x)$ donne la partie entière de x et $round(x, p)$ donne un arrondi de x avec p décimales.

• ***Fonctions trigonométriques ou hyperboliques***. On écrit $mt.sin(x)$, $mt.cos(x)$, $mt.tan(x)$ ou $np.sin(x)$, $np.cos(x)$, $np.tan(x)$. On peut rajouter les fonctions (explicites) $np.arctan(x)$, $np.arccos(x)$, $np.arcsin(x)$, $np.exp(x)$, $np.log(x)$.

III. Les listes

Elles sont ordonnées et commencent par le symbole [et finissent par le symbole].

- ***Syntaxe d'une liste.*** Par exemple, on tape [3, 1, 2]
- ***Liste vide***. Pour la créer, on écrit [ ]
- ***Longueur d'une liste*** L. On tape $len(L)$
- ***Premier élément de la liste*** L. On écrit $L[0]$
- ***Dernier élément de la liste*** L. On écrit $L[-1]$ ou $L[len(L) - 1]$
- ***Ajout de l'élément*** x ***en fin de la liste*** L. On écrit $L.append(x)$
- ***Renvoie le nombre d'occurences de*** x ***dans*** L. On écrit $L.count(x)$
- ***Sous-liste tirée de*** L ***de*** i ***à*** $j - 1$. On écrit $L[i : j]$

IV. Les tests et boucles
4-1 Les tests

```
>>> if test1 :
        bloc1
        elif test2 :
            bloc2
        else :
            bloc3
```

4-2 Les boucles

Deux principales : *for* et *while*

```
>>> for i in range(10) :
        print(i)
>>> while test :
        bloc1
```

V. Les fonctions et les procédures

Il n'y a pas de différence entre fonction et procédure. Ici f est son nom et x est appelé argument. Notez qu'il peut n'y avoir aucun argument comme plusieurs.

```
>>> def f(x) :
        traitement
        return(...)
```

Exemple. Une liste est un palindrome si et seulement si elle est égale à son image miroir. Écrivons une fonction *palindrome* qui teste si une liste est un palindrome. Notons l l'argument de la fonction *palindrome*. On compare l'élément de tête avec le dernier, le second avec l'avant dernier... Le dernier à comparer avec son symétrique (si l'on ne s'est pas encore arrêté) est celui d'indice $\frac{n}{2}$, où n est la taille de la liste l. Si, au cours du parcours, on rencontre deux éléments symétriques distincts, on arrête le parcours en renvoyant $False$. Si l'on arrive à la fin du parcours sans échec, la liste l est un palindrome et on retourne $True$ avec $return(True)$.

```
>>> def palindrome(l) :
        n = len(l)
        for i in range(n // 2) :
            if l[i] != l[n - 1 - i] : return(False)
        return(True)
```

VI. Points développés dans les parties « Corrigé » et « Technique » des exercices des « Jour », où Python est utilisé

• ***Comment manipuler des entiers avec Python et en particulier faire des produits ou des sommes*** :

« Jour 21.1 » « Jour 22.2 » « Jour 24.2 »

• ***Comment rentrer une fonction d'une variable avec Python*** :

« Jour 22.1 » « Jour 23.1 »

• ***Comment tracer une fonction*** $Y = f(X)$ ***ou une ligne de segments brisés avec Python*** :

« Jour 23.1 » « Jour 24.1 » « Jour 24.2 »

• ***Comment résoudre*** $f(x) = 0$ ***avec Python*** :

« Jour 22.1 » « Jour 23.1 »

• ***Comment étudier la suite*** $u_{n+1} = f(u_n)$ ***avec Python*** :

« Jour 21.1 » « Jour 23.1 » « Jour 23.2 »

• ***Comment manipuler ou faire des opérations sur des polynômes avec Python*** :

« Jour 23.2 »

• ***Comment calculer une intégrale avec Python*** :

« Jour 17.2 » « Jour 23.2 »

• ***Comment écrire puis manipuler des matrices avec Python*** :

« Jour 17.1 » « Jour 22.2 »

• ***Comment résoudre une équation différentielle du premier ordre avec Python*** :

« Jour 24.1 »

• ***Comment simuler un tirage aléatoire avec Python*** :

« Jour 22.2 »

• ***Comment rentrer les lois discrètes classiques avec Python*** :

« Jour 22.2 »

Tableaux récapitulatifs des exercices

Tableau récapitulatif des exercices de Probabilités

Numéros des exercices	Dénombrements	Probabilités	Variables aléatoires réelles
Exercice 2.2			•
Exercice 5.2		•	•
Exercice 8.2	•	•	•
Exercice 11.2		•	•
Exercice 14.1	•		
Exercice 17.1		•	•
Exercice 19.1		•	•
Exercice 22.2		•	

Tableau récapitulatif des exercices d'Analyse et de Géométrie (I)

Numéros des exercices	Suites réelles	Fonctions Continuité Dérivabilité	Intégrales définies	Équations différentielles linéaires	Arithmétique et structures
Exercice 1.1			•		
Exercice 1.2	•				
Exercice 4.1	•	•			
Exercice 5.1	•	•			
Exercice 6.1		•		•	
Exercice 7.1	•		•		
Exercice 9.1		•			
Exercice 10.1				•	
Exercice 12.2	•	•			
Exercice 13.2		•			
Exercice 15.2	•	•			•
Exercice 16.1		•	•		
Exercice 16.2		•			
Exercice 17.2			•		
Exercice 18.2	•	•	•		
Exercice 19.1		•	•		
Exercice 19.2					•
Exercice 20.1		•	•		
Exercice 20.2		•			
Exercice 21.1	•	•			
Exercice 22.1	•	•			
Exercice 23.1	•	•			
Exercice 23.2	•		•		
Exercice 24.1				•	
Exercice 24.2					•

Tableau récapitulatif des exercices d'Analyse et de Géométrie (II)

Numéros des exercices	Calculs dans les complexes	Séries numériques	Géométrie euclidienne plan et espace	Espaces préhilbertiens et euclidiens
Exercice 1.1	•			
Exercice 1.2		•		
Exercice 3.2		•		
Exercice 6.2				•
Exercice 7.1		•		
Exercice 7.2	•		•	
Exercice 9.2			•	
Exercice 12.1	•			
Exercice 13.1	•			
Exercice 14.2	•		•	
Exercice 16.1	•	•		
Exercice 17.2				•
Exercice 23.2				•

Tableau récapitulatif des exercices d'Algèbre

Numéros des exercices	Polynômes de $\mathbb{K}[X]$	Systèmes linéaires et calcul matriciel	Espaces vectoriels Applications linéaires	Déterminants
Exercice 1.1	•			
Exercice 2.1		•		•
Exercice 3.1			•	
Exercice 4.2	•	•	•	
Exercice 6.2	•			
Exercice 8.1	•	•	•	
Exercice 9.1	•			
Exercice 10.2		•		•
Exercice 11.1	•			
Exercice 12.2	•			
Exercice 13.1	•			
Exercice 15.1	•		•	
Exercice 16.2	•	•		•
Exercice 17.1		•		
Exercice 18.1		•	•	
Exercice 19.2		•	•	
Exercice 20.2	•	•		•
Exercice 21.2			•	
Exercice 22.2		•	•	
Exercice 23.2	•			

Jour n^{o}1

Exercice 1.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI

Ici, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1) Montrer que $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right)$.

Préciser alors, dans $\mathbb{R}[X]$, selon la parité de n, la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$.

2) On suppose que x est un réel différent de -1 et de 1.

a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln \left(x^2 - 2x \cos t + 1 \right) dt$.

b) Calculer I, en utilisant la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans le cas où n est pair.

Exercice 1.2 — MPSI-PCSI-PTSI

1) Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2},$$

en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2) On considère maintenant la série de même terme général u_n.

a) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

b) En cas de convergence, calculer sa somme.

c) Toujours en cas de convergence, déterminer un équivalent de son reste partiel d'ordre n.

Énoncé

Ici, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1) Montrer que $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right)$.

Préciser alors, dans $\mathbb{R}[X]$, selon la parité de n, la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$.

2) On suppose que x est un réel différent de -1 et de 1.

a) Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln \left(x^2 - 2x \cos t + 1 \right) \, dt$.

b) Calculer I, en utilisant la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans le cas où n est pair.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice proposé à l'oral de Mines-Ponts, filière MP en 2016 que l'on a juste un peu aiguillé pour devenir accessible à la majorité des filières. Il est à l'intersection de deux parties du programme. D'abord la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ et ensuite l'intégration (et plus précisément les sommes de Riemann).

> Rapport du jury Concours commun INP (ex CCP) 2011
>
> Rappelons une évidence : il faut réviser l'ensemble du programme en ce qui concerne les mathématiques, et pas seulement la deuxième année, le mieux étant naturellement un travail régulier tout au long du cycle préparatoire.

1) L'égalité proposée est la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. On rappelle que $X^n - 1$ peut se décomposer en produit de polynômes de degré 1 de la forme $X - z_k$, où z_k est une racine complexe de $z^n = 1$. Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on posera d'abord $n = 2p$, où p est entier, on cherchera les racines réelles de $z^n = 1$ et on regroupera les autres racines non réelles par deux, une racine et son conjugué. On fera le même travail avec $n = 2p + 1$.

$\hookrightarrow$ La décomposition de $X^{2p} - 1$ ou (et) de $X^{2p+1} - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles a (ont) sûrement été faite(s) au moins en exercice dans toutes les filières (hors 1TPC). Voilà une excellente révision pour le Jour numéro 1.

> Rapport du jury Mines-Ponts, filières PSI-PC-MP 2016
>
> Des difficultés dans la résolution des problèmes concernant l'algèbre générale (nombres complexes, polynômes, fractions rationnelles). Le calcul dans l'ensemble des nombres complexes pose problème et on voit certains candidats majorer des nombres complexes.

2) Ici, on doit calculer une intégrale. On a appris plusieurs méthodes standards pour calculer une intégrale (on reconnaît une primitive connue, on intègre par parties, on fait un changement de variable) mais ici l'on utilise une formule que l'on oublie souvent rapidement : la limite d'une somme de Riemann. Justement, ce livre est là pour que vous n'oubliriez rien !

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2006

D'un point de vue technique, et dans le but de permettre aux candidats de se préparer plus efficacement, parmi les points faibles qui ont été relevés lors de cet oral, retenons par exemple les sommes de Riemann pourtant bien pratiques pour déterminer les limites de certaines suites.

a) On veut montrer l'existence de I. Il faut citer le cours, en étant rigoureux. Attention, en première année, on ne voit pas encore les intégrales dites généralisées (c'est-à-dire celles où la fonction sous le symbole intégrale n'est pas définie en au moins une des bornes de l'intégrale). Donc, ce qui est demandé ici c'est simplement de vérifier que la fonction sous le signe intégrale existe et est continue sur $[0, \pi]$.

$\hookrightarrow$ Ne pas oublier que $\ln(f(t))$ n'existe que si et seulement si $f(t) > 0$. Si vous avez besoin d'un coup de pouce supplémentaire, utiliser l'égalité classique (à retenir) : $x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - e^{it})(x - e^{-it})$, après l'avoir vérifiée.

b) C'est ici que l'on fait le lien entre la décomposition en facteurs irréductibles de la première question et les sommes de Riemann. Dans le cas où $n = 2p$, on partira de l'égalité, pour $x \neq \pm 1$, et en supposant p entier non nul,

$$\frac{x^{2p} - 1}{(x-1)(x+1)} = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{p} + 1 \right),$$

Il faut composer alors par ln de chaque côté.

$\hookrightarrow$ Commencez par revoir votre cours sur les sommes de Riemann et voyez le lien avec l'égalité que vous venez de trouver. Attention, à la fin, il faudra bien séparer le cas $|x| < 1$ et le cas $|x| > 1$.

Corrigé

1) *Décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$*

L'égalité proposée est la décomposition en facteurs irréductibles de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. Nous allons, pour commencer, déterminer les racines de $X^n - 1$. Un complexe z est racine de $X^n - 1$ si et seulement si $z^n = 1$, et en posant $z = \rho e^{i\phi}$, on a :

$$\rho^n e^{in\phi} = 1 = e^{i2k\pi}, \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

En séparant module et argument, on a :

$$\begin{cases} \rho^n &= 1 \\ n\phi &= 2k\pi \end{cases},$$

où k est un entier relatif.

On a alors : $\rho = 1$ et $\phi = \dfrac{2k\pi}{n}$, et on peut restreindre $k \in [\![0, n-1]\!]$. En effet :

$$e^{i\frac{2(k+n)\pi}{n}} = e^{i\frac{2k\pi}{n} + i2\pi} = e^{i\frac{2k\pi}{n}},$$

pour tout entier k. Posons $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. Alors :

$$\boxed{X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2i\pi k}{n}} \right).}$$

Décomposition en facteurs irréductibles de X^n-1 dans $\mathbb{R}[X]$ si n est pair

Posons $n=2p$, où p est un entier naturel non nul. Reprenons $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}=e^{i\frac{k\pi}{p}}$, où $k\in[\![0,2p-1]\!]$. On remarque que si $k=0$, $z_0=1$ et si $k=p$, $z_p=-1$.
Par ailleurs, z_k et z_{2p-k} sont conjugués pour tout $k\in[\![1,p-1]\!]$. On écrit :

$$X^{2p}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left[(X-z_k)(X-\bar{z}_k)\right].$$

Et, pour tout $k\in[\![1,p-1]\!]$,

$$(X-z_k)(X-\bar{z}_k)=X^2-(z_k+\bar{z}_k)X+|z_k|^2=X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)+1.$$

Puis :

$$\boxed{X^{2p}-1=X^n-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right)+1\right).}$$

Décomposition en facteurs irréductibles de X^n-1 dans $\mathbb{R}[X]$ si n est impair

Posons $n=2p+1$, où p est un entier naturel. Reprenons encore $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}=e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}$, où $k\in[\![0,2p]\!]$. On remarque encore que si $k=0$, $z_0=1$ et c'est la seule valeur réelle.
Par ailleurs, z_k et z_{2p+1-k} sont conjugués pour tout $k\in[\![1,p]\!]$. On écrit :

$$X^{2p+1}-1=(X-1)\prod_{k=1}^{p}\left[(X-z_k)(X-\bar{z}_k)\right].$$

Et, comme plus haut, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$,

$$(X-z_k)(X-\bar{z}_k)=X^2-(z_k+\bar{z}_k)X+|z_k|^2=X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)+1.$$

Puis :

$$\boxed{X^{2p+1}-1=X^n-1=(X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right).}$$

2) Ici $|x|\neq 1$.

a) Montrons l'existence de $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)dt$. Pour cela, posons pour x fixé différent de -1 et de 1, $f_x(t)=x^2-2x\cos t+1$. Il suffit de montrer que f_x existe, est strictement positive pour $t\in[0,\pi]$. En effet, si c'est le cas, $t\mapsto\ln(f_x(t))$ existe et est continue sur $[0,\pi]$ donc intégrable sur cet intervalle et I existe.
Nous allons utiliser l'égalité :

$$x^2-2x\cos t+1=\left(x-e^{it}\right)\left(x-e^{-it}\right),$$

qui se voit rapidement en développant le second membre :

$$\left(x-e^{it}\right)\left(x-e^{-it}\right)=x^2-2x\left(e^{it}+e^{-it}\right)+1.$$

Puis en utilisant $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$.
Donc, $f_x(t)$ ne peut s'annuler dans $\mathbb{R}$ que dans le cas où $t = 0$ ou $t = \pi$, ce qui implique $x = 1$ ou $x = -1$, ce qui est exclu.
En conclusion, $f_x(t)$ a toujours le même signe pour tout x, avec $|x| \neq 1$ et pour tout $t \in [0, \pi]$ qui est strictement positif. Finalement :

$$\boxed{I \text{ existe pour tout } x \notin \{-1, 1\}.}$$

b) On écrit, pour $x \neq \pm 1$, et en supposant p un entier non nul,

$$\frac{x^{2p} - 1}{(x-1)(x+1)} = \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right),$$

en utilisant la décomposition en éléments simples de $X^{2p} - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On commence par remarquer que le rapport $\dfrac{x^{2p} - 1}{(x-1)(x+1)}$ est toujours positif. On peut le vérifier car il est le produit de $p - 1$ trinômes du second degré toujours positifs d'après plus haut. On peut aussi dire que si $x \in]-1, 1[$, $x^{2p} - 1 < 0$ et $x^2 - 1 < 0$, donc le rapport de ces deux fonctions polynomiales est positif et que si $x \notin]-1, 1[$, $x^{2p} - 1 > 0$ et $x^2 - 1 > 0$, donc le rapport de ces deux fonctions polynomiales est encore positif. On peut donc composer par ln sans souci :

$$\ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \ln \prod_{k=1}^{p-1} \left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right) = \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right),$$

en utilisant le fait qu'un ln transforme un produit en une somme. Il reste à multiplier par $\frac{\pi}{p}$ de chaque côté :

$$\frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right).$$

Il reste à utiliser le résultat suivant (rappelé bien entendu dans le formulaire !) sur les sommes de Riemann : si g est une fonction continue sur $[a, b]$ et si p est un entier non nul, alors en posant pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $t_k = a + (b-a)\dfrac{k}{p}$, la quantité $\dfrac{b-a}{p} \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} g(t_k)$ tend, quand p tend vers $+\infty$, vers $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$.
Ici, on prend $a = 0$, $b = \pi$, $t_k = k\dfrac{\pi}{p}$ et $g(t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$. Ce qui donne :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \ln\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{k\pi}{p}\right) + 1 \right),$$

et donc :

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right)\,dt.$$

Si l'on suppose $|x| < 1$, on écrit :

$$\frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p} - 1}{x^2 - 1}\right) = \frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{1 - x^{2p}}{1 - x^2}\right) = \frac{\pi}{p}\left[\ln\left(1 - x^{2p}\right) - \ln\left(1 - x^2\right)\right].$$

Comme $\ln(1-x^{2p}) \sim -x^{2p}$, quand $p \to +\infty$ et comme $\dfrac{x^{2p}}{p}$ tend vers 0, par croissances comparées, $I = 0$.

Si l'on suppose maintenant $|x| > 1$, la quantité $\dfrac{x^{2p}-1}{x^2-1}$ est équivalente à x^{2p-2} quand p tend vers $+\infty$. Donc :

$$\frac{\pi}{p} \ln\left(\frac{x^{2p}-1}{x^2-1}\right) \sim \frac{\pi}{p} \ln\left(x^{2p-2}\right) = \frac{(2p-2)\pi}{p} \ln|x|,$$

et cette dernière quantité est équivalente à $2\pi \ln|x|$, quand p tend vers $+\infty$.
On peut conclure :

$$\boxed{I = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & |x| < 1 \\ 2\pi \ln|x| & \text{si} & |x| > 1 \end{array} \right. .}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on trouve les racines $n^{\text{èmes}}$ de $\omega \in \mathbb{C}^\star$.
Si $\omega = re^{i\theta}$, où $r > 0$, on pose $z = \rho e^{i\phi}$ et on écrit que $z^n = \omega$. On en déduit que $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ et que $n\phi = \theta + 2k\pi$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.

> Rapport du jury Mines-Telecom 2016
>
> Le cours de première année est souvent très mal connu, par exemple celui sur les nombres complexes et la trigonométrie.

♡ Il faut se souvenir de l'égalité $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = \left(x - e^{i\theta}\right)\left(x - e^{-i\theta}\right)$, pour tout couple de réels $(x,\, \theta)$.

♡ Il faut se souvenir que si z est racine d'un polynôme réel alors $\bar{z}$ est aussi une racine de ce polynôme.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on met sous forme irréductible un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$.

i. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on cherche les racines de P (en utilisant le cours du chapitre sur les nombres complexes : on peut aussi, par exemple, par un changement de variable, se ramener à un degré plus simple) et on écrit P directement sous sa forme scindé.

ii. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut commencer par chercher les racines dans $\mathbb{C}$, trier les racines réelles et celles non réelles puis associer ensemble les couples de racines conjuguées $(\alpha,\, \bar{\alpha})$. On effectue tous les produits $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$. On obtient alors un produit de polynômes irréductibles du premier degré et du second degré avec un discriminant < 0.

iii. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si le degré de P n'est pas trop grand, on peut tenter des identifications en devinant en partie les facteurs irréductibles.

iv. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si la forme du polynôme s'y prête, on peut utiliser des identités remarquables.

Rapport du jury CCP, filière PC 2009

> Les candidats ont de réelles difficultés avec les polynômes, les notions de base du programme n'étant pas maîtrisées. Cela s'est révélé fort pénalisant sur cette session.

♡ Il faut se souvenir qu'un polynôme P de degré n qui admet n racines (distinctes ou non) z_k, pour k variant de 0 à $n-1$, s'écrit de façon scindé sous forme d'un produit du type $\alpha \prod_{k=0}^{n-1} (X - z_k)$ et que $\alpha = 1$ si et seulement si P est unitaire.

♡ Il faut se souvenir que si une somme du type $\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers l'infini alors il est intéressant de faire apparaître $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ qui pourra par contre, avoir une limite finie (et c'est là que les sommes de Riemann arrivent, voir le formulaire).

♡ Il faut se souvenir du fait que l'écriture $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ peut être valable sans que $\ln(f(x))$ et $\ln(g(x))$ ne le soient (on peut avoir $f(x) < 0$ et $g(x) < 0$).
Dans ce cas, il faut écrire : $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \ln(-f(x)) - \ln(-g(x))$.

♡ Il faut se souvenir des équivalents usuels et de la façon de les utiliser correctement. Ainsi, $\ln(1-u) \sim u$, à la condition que u tende vers 0. C'est ainsi le cas si l'on pose $u = x^p$, avec $|x| < 1$ et $p \to +\infty$.

Formulaire

• On appelle **racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité** tout complexe z vérifiant $z^n = 1$.
L'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est noté $\mathcal{U}_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Notons pour $k \in \mathbb{Z}$, $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. Alors :

$$\mathcal{U}_n = \{z_k;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}.$$

Exemples : $\mathcal{U}_1 = \{1\}$, $\mathcal{U}_2 = \{-1,\ 1\}$, $\mathcal{U}_3 = \{1,\ j,\ j^2\}$, $\mathcal{U}_4 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$, où j est le complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

• $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ si et seulement s'il s'écrit comme un produit de polynômes tous de degré 1.

• Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ alors P est **irréductible** dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si $\deg P \geqslant 1$ et si $P = AB$ avec A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ alors nécessairement A ou B est un polynôme constant. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg P > 1$ alors P n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

• **Théorème de d'Alembert-Gauss.**
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 est scindé dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, il existe a complexe non nul, p un entier non nul , $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{C}^p$, $(r_1, ..., r_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :

$$P = a \prod_{k=1}^{p} (X - x_k)^{r_k}.$$

> Rapport du jury E3A, toutes filières (hors TPC) 2016
>
> La factorisation de polynômes est devenue très compliquée pour beaucoup de candidats.

• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant de coefficient dominant a. Il existe alors un couple unique (A, B) de polynômes unitaires, où A est scindé sur $\mathbb{R}$ ou constant et B sans racine réelle tel que : $P = aAB$.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :

les polynômes de degré 1 ;

les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En partageant l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueurs égales à $\dfrac{b-a}{n}$, on obtient les $n + 1$ points de subdivision : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, où $k \in [\![0, n]\!]$. Considérons alors les deux fonctions en escalier φ et ψ de subdivision subordonnée commune : $\sigma = (a, a_1, ..., a_{n-1}, b)$ telles que :

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall\, x \in [a_k, a_{k+1}[\,,\ \varphi(x) = f(a_k) \text{ et } \psi(x) = f(a_{k+1}).$$

Ces fonctions en escalier approchent f et dans le cas (courant) où f est strictement monotone sur $[a, b]$, ces deux fonctions encadrent f. Les intégrales de ces deux fonctions en escalier sont **les sommes de Riemann de** f sur $[a, b]$ par rapport à σ. Il s'agit des quantités :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right),\ J_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Les suites composées des sommes de Riemann (I_n) et (J_n) convergent vers la même limite qui est $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$.

Énoncé

1) Étudier la convergence de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2},$$

en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2) On considère maintenant la série de même terme général u_n.

a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ en fonction de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

b) En cas de convergence, calculer sa somme.

c) Toujours en cas de convergence, déterminer un équivalent de son reste partiel d'ordre n.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit à la base ici d'un exercice d'oral Mines-Ponts posé à la filière PC 2016.

1) Il s'agit de faire un développement limité du terme général u_n quand n tend vers $+\infty$. On fait « apparaître » la quantité $\frac{1}{n}$.

$\hookrightarrow$ S'il vous faut plus de précision car vous ne devez pas être stoppé dès la première question, la technique est de mettre n en facteur dans $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n+2}$ pour faire apparaître $1/n$ puis on utilise le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

> Rapport du jury Mines-Telecom, toutes filières 2016
>
> On retrouve des lacunes du cours de première année. Par exemple l'utilisation des équivalents et des développements limités.

> Rapport du jury Mines-Ponts, filières PSI-PC-MP 2016
>
> En analyse, les notions d'équivalents, de domination et de négligeabilité et les développements limités (en particulier celui de $\ln(1-x)$) sont mal connus par un nombre important de candidats. Ces derniers se trouvent alors incapables de justifier la convergence d'une série.

2) On étudie maintenant la série de terme général u_n. Tout d'abord sa convergence et ensuite le calcul éventuel de sa somme. On part bien entendu de l'étude faite à la première question.

> Rapport du jury E3A, filière PSI 2016
>
> Un nombre de candidats plus important que les années passées pense qu'une série converge dès que le terme général converge vers 0.

a) Il s'agit de pousser le développement limité du terme général u_n quand n tend vers $+\infty$. On fait « apparaître » la quantité $\frac{1}{n}$.

$\hookrightarrow$ On fait comme à la question précédente mais ici on effectue le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Attention, il faut discuter selon les valeurs de a et de b, et distinguer la divergence grossière de la divergence non grossière et enfin de la convergence.

b) On calcule ici la somme de cette série.
On remarquera que u_n s'écrit comme la somme de deux différences consécutives.

$\hookrightarrow$ Le calcul d'une somme de série se fait en général de deux manières. Soit on utilise des développements en série entière connus, mais pour cela, il faut avoir fait le cours correspondant en deuxième année, soit on fait des sommes téléscopiques en partant de S_n (somme partielle de rang n). C'est bien entendu de cette façon qu'on procède ici. Allez voir la partie « Technique » pour plus de détails.

c) Pour trouver un équivalent (ou plus largement une majoration en valeur absolue) du reste d'ordre n d'une série numérique, il y a peu de méthodes (en particulier pour un élève de première année). La plus rapide des pistes est évidemment quand ce reste s'exprime simplement en fonction de n. C'est ce qui arrive ici et c'est tant mieux.

$\hookrightarrow$ Attention, il y a une forme indéterminée à lever à la fin. Vous n'allez quand-même pas croire que c'est trop simple !

Corrigé

1) La technique est donc de mettre n en facteur dans $\sqrt{n+1}$ et $\sqrt{n+2}$ pour faire apparaître $1/n$ puis on utilise le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$. On commence par écrire :

$$u_n = \sqrt{n}\left[1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right].$$

Puis, on rappelle que le développement limité de $(1+x)^\alpha$, où α est un réel, à l'ordre 1, au voisinage de 0, est : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$.
On l'applique pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x)$.
Donc : $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. De même, $\sqrt{1+\dfrac{2}{n}} = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Il reste à rassembler dans l'expression de u_n et :

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1 + a\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + b\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ce qui donne :

$$u_n = \sqrt{n}\,(1+a+b) + \left(\frac{1}{2}a + b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right),$$

en remarquant que $\sqrt{n} \times o\left(\dfrac{1}{n}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$.
• On remarque que si $1+a+b \neq 0$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 car alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$, quand n tend vers $+\infty$. Et si $1+a+b=0$, $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^{1/2}}\right)$.
Alors la suite (u_n) est convergente de limite nulle. On peut donc préciser :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1+a+b>0 \\ -\infty & \text{si } 1+a+b<0 \\ 0 & \text{si } 1+a+b=0 \end{cases}}$$

2) Pour étudier la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on utilise le développement précédent en « poussant » le développement limité d'un cran.

a) On rappelle que le développement limité de $(1+x)^\alpha$, où α est un réel, à l'ordre 2, au voisinage de 0, est : $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$.

On l'applique pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Donc, en appliquant avec $x = \dfrac{1}{n}$,

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De même, en appliquant avec $x = \dfrac{2}{n}$,

$$\sqrt{1+\frac{2}{n}} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il reste à rassembler dans l'expression de u_n, comme plus haut et :

$$u_n = \sqrt{n}\,(1+a+b) + \left(\frac{1}{2}\,a + b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{8}\,a - \frac{1}{2}\,b\right)\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$

en remarquant que $\sqrt{n} \times o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

• On remarque que si $1+a+b \neq 0$, le terme général u_n ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

• Si maintenant, $1+a+b=0$ et si $\frac{a}{2}+b \neq 0$ alors : $u_n \sim \dfrac{\frac{a}{2}+b}{\sqrt{n}}$.

Et la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

• Enfin, supposons que a et b vérifient le système : $\begin{cases} 1+a+b &= 0 \\ a/2+b &= 0 \end{cases}$.

Ce qui donne alors rapidement $a=-2$ et $b=1$. On remplace ces valeurs de a et b dans l'expression de u_n. Le développement limité du terme général u_n devient alors :

$$u_n = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On remarque que u_n est somme de deux termes de séries absolument convergentes. On peut conclure. $\sum u_n$ converge si et seulement si :

$$\boxed{a=-2 \text{ et } b=1.}$$

b) Pour $a=-2$ et $b=1$, il s'agit de calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Le premier rang n'est pas précisé mais comme u_0 existe, on prendra 0 pour premier indice.

Ici, on calcule : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout n puis on fait tendre n vers $+\infty$.
Commençons par remarquer, pour tout entier n, que :

$$u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}.$$

On peut donc écrire S_n sous la forme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right).$$

Nous allons réindexer la seconde somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right).$$

On remarque que les deux sommes ont leurs termes opposés. Seuls les premiers et derniers indices différent. Ce qui donne :

$$S_n = \sqrt{0} - \sqrt{1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = -1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}.$$

Il reste à s'occuper de $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. On l'écrit sous la forme :

$$\frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}},$$

quantité qui tend vers 0. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1.}$$

c) Posons : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
Comme la série $\sum u_n$ converge, on peut écrire :

$$S_n + R_n = -1 = -1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} + R_n.$$

Et donc : $R_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$, c'est-à-dire en utilisant la quantité conjuguée,

$$R_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}.$$

(On rappelle que $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.)
Comme enfin, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = \sqrt{n}\left[\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}}\right]$, quand n tend vers $+\infty$, on peut conclure :

$$\boxed{R_n \sim \frac{-1}{2\sqrt{n}}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que pour déterminer la nature d'une série à termes positifs ou tout simplement la limite d'une suite, commencer par avoir un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, permet souvent de conclure.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2006
>
> Dans le but de permettre aux candidats de se préparer plus efficacement, voici un point faible relevé lors de cette session : utilisation trop modérée des équivalents pour la convergence des séries.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on fait un développement généralisé en $1/n$, quand n tend vers $+\infty$, d'une quantité de la forme $u_n = f(n)$. On met n en facteur pour faire apparaître $1/n$ dans $f(n)$, et comme $1/n$ tend vers 0, on applique des développements limités usuels. Attention, il ne faut pas aller trop loin dans l'ordre du développement limité (sinon on fait des calculs pour rien et on fait des erreurs de calculs). Il faut aussi ne pas oublier $o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, si l'on va à l'ordre α, sinon, on n'a pas le droit d'écrire des égalités. Donc il faut soigner les calculs et les rendre intelligents.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2004
>
> On pourrait au moins espérer qu'une certaine habilité technique soit à même de compenser partiellement le déficit de connaissances des candidats. Ce n'est en général pas le cas comme en témoignent les brouillons quasiment vides laissés par les candidats à la fin de leur préparation, comme si, se rendant compte que leurs recettes, bien que théoriquement opérationnelles, les conduiraient à des calculs si fastidieux qu'ils préfèrent les abandonner avant même de les avoir initiés.

> Rapport du jury Mines-Ponts, filière PSI-MP-PC 2016
>
> À propos des suites et des séries, la méthode utilisant les développements limités (ou asymptotiques) pour étudier la nature d'une série de signe constant ou non, afin « d'éclater » le terme général en plusieurs morceaux à étudier séparément, est mal connue et rarement bien appliquée.

♡ Il faut se souvenir de la façon de déterminer la somme d'une série convergente $\sum u_n$. Avec le bagage de première année, on a essentiellement deux pistes :

1) Première piste. L'utilisation des séries géométriques quand u_n est de la forme Aq^n, où $-1 < q < 1$. Ainsi : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = A\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2) Deuxième piste. C'est le **principe du téléscopage** quand le terme général u_n s'écrit facilement sous la forme $f(n) - f(n+1)$, où f est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:
on calcule la somme partielle d'ordre n par « télescopage » :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (f(k) - f(k+1)) = f(0) - f(n+1).$$

On détermine, si elle existe, la limite de f en $+\infty$ et on conclut sur la nature de la série et la valeur de sa somme éventuelle.
Il existe des formes de téléscopage plus complexes, par exemple :

$$\sum_{n=p}^{q}(f(n+1)-f(n-1)) \text{ ou } \sum_{n=p}^{q}(f(n+1)-2f(n)+f(n-1))\,;$$

dans ce cas, on peut décomposer linéairement ces sommes partielles, puis décaler les indices pour faire apparaître des sommes communes qui se simplifient, ne laissant que quelques termes résiduels.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on débloque une forme indéterminée du type $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. On utilise la « forme conjuguée ». Ainsi, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

Formulaire

• Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **série** associée à la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette série est notée $\sum u_n$, pour la distinguer de la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit que u_n est son **terme général**. $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ est sa **somme partielle d'indice** n.
Chaque suite définit une série unique et réciproquement, puisque la connaissance des sommes partielles S_n équivaut à celle des termes généraux : $S_0=u_0$ et $u_n=S_n-S_{n-1}$ si $n\in\mathbb{N}^*$.
La série de terme général u_n, $\sum u_n$, est **convergente** si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente dans $\mathbb{K}$.
La limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors la **somme de la série** : on la note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.
Si la suite des sommes partielles diverge, alors la série est dite **divergente**.
Ne pas confondre $\sum u_n$, qui désigne la série elle-même, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ qui désigne la somme de cette série, c'est-à-dire la limite de la suite de ses sommes partielles. Il y a la même différence entre ces notations qu'entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.

• Si $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\geqslant 1$, quand x tend vers 0,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).$$

Jour n^{o}2

Exercice 2.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Discuter et résoudre, selon $m \in \mathbb{R}$, le système :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} mx + y + z & = & 1 \\ x + my + z & = & m \\ x + y + mz & = & m^2 \end{array} \right. .$$

Exercice 2.2 — MPSI-PCSI-PTSI

1) On définit n *v.a.r.d* **indépendantes deux à deux** $Y_1, \ldots Y_n$, de même loi et possédant un moment d'ordre 2.
Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall a > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{n\,a^2},$$

où S_n désigne la somme $Y_1 + \ldots + Y_n$.
Indication (pour PCSI-PTSI) : *on admettra que si* $Y_1, \ldots, Y_n$ *sont indépendantes deux à deux, alors* $V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k)$.

2) On tire n fois avec remise une boule parmi 2 boules rouges et 3 boules noires. Trouver n pour avoir 95% de chance d'obtenir une proportion de boules rouges comprise entre $0,35$ et $0,45$.

Énoncé

Discuter et résoudre, selon $m \in \mathbb{R}$, le système :

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} mx + y + z & = & 1 \\ x + my + z & = & m \\ x + y + mz & = & m^2 \end{array} \right. .$$

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral Mines-Telecom dans la filière PC en 2016. Il faut résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues en discutant selon un paramètre. C'est très classique. Par contre, il faut oser se lancer dans des calculs qui peuvent paraître longs. Il faut faire des opérations élémentaires sur les lignes mais en ayant l'intelligence de les optimiser pour réduire les calculs. Dans ce type d'exercice, on ne demande pas forcément de tout faire mais plutôt de montrer que l'on maîtrise ce type de calcul.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2006
>
> Il faut aussi insister sur l'importance qu'il y a à faire preuve d'énergie lors des concours. Il y a par exemple des candidats qui ne font rien tout seul alors qu'ils semblent avoir des capacités.

Pour résoudre un système linéaire (dépendant d'un paramètre), la méthode est d'utiliser des opérations élémentaires sur les lignes en faisant apparaître des 0 sous la diagonale principale puis au dessus. La méthode générique est **l'algorithme de Gauss**. Il est rappelé dans la partie technique. Dans la pratique, on fait des variantes de cet algorithme. On peut par exemple diviser ou multiplier toute une ligne par un coefficient non nul pour faire apparaître un pivot simple pour les calculs.
Par ailleurs, si vous connaissez les déterminants d'ordre 3, vous pouvez commencer par déterminer l'ensemble des paramètres m pour lesquels le déterminant du système de l'énoncé est non nul. Mais cela sera finalement une perte de temps car il faudra quand même résoudre le système à côté. Par contre, si vous êtes en (ou sortez de) filière MPSI, vous connaissez peut-être les formules de Cramer. Pour que le corrigé soit complet, nous allons en remarque résoudre le système $(\mathcal{S})$ en utilisant ces formules de Cramer.

$\hookrightarrow$ Attention, quand on fait une opération du type $L_i \leftarrow aL_i$ ou $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$, il faut que a soit non nul pour que le système résultant soit équivalent au précédent. Dans notre cas précis, cela va engendrer une discussion selon la valeur de m. Vous sortez les valeurs de m qui deviennent interdites dans le processus qui vous amène à un système réduit par lignes puis vous reprenez ensuite ces valeurs de m au moment précis où vous les avez sorties et vous résolvez le système correspondant.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Les calculs de petits déterminants, lorsqu'ils aboutissent, sont trop souvent laborieux. Les candidats développent beaucoup trop vite et n'effectuent que très rarement des opérations sur les lignes ou les colonnes.

Corrigé

Résolution de $\mathcal{S}$ par opérations élémentaires

Nous noterons dans la suite $(\mathcal{S})$ à la fois le système et l'ensemble de ses solutions. Le système $(\mathcal{S})$ correspond à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right).$$

On suppose d'abord $m \neq 0$ et on commence par effectuer les opérations élémentaires sur les lignes : $L_2 \leftarrow mL_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow mL_3 - L_1$.

Ce qui conduit à la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m-1 & m^2-1 \\ 0 & m-1 & m^2-1 & m^3-1 \end{array}\right)$.

Puis, **on suppose ensuite** $m \neq 1$ et on effectue :

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{m-1},\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{m-1},$$

qui conduisent à la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1 & m+1 & m^2+m+1 \end{array}\right)$, en utilisant $m^2-1=(m-1)(m+1)$ et $m^3-1=(m-1)(m^2+m+1)$.

Puis, **on suppose** $m \neq -1$ et on effectue : $L_3 \leftarrow (m+1)L_3 - L_2$.

Et cela conduit à la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & m^2+2m & m(m+1)^2 \end{array}\right)$, en remarquant que $(m+1)(m^2+m+1)-(m+1)=(m+1)(m^2+m+1-1)=m(m+1)^2$.

Puis, **on suppose** $m \neq -2$ et on effectue : $L_3 \leftarrow \dfrac{L_3}{m(m+2)}$.

Il reste la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array}\right)$.

Puis, on effectue les opérations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

qui conduisent à la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 0 & 1-\frac{(m+1)^2}{m+2} \\ 0 & m+1 & 0 & m+1-\frac{(m+1)^2}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array}\right)$.

Puis, on effectue les opérations élémentaires successives :

$$L_2 \leftarrow \frac{L_2}{m+1},\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

qui conduisent à la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 0 & 0 & -\frac{(m+1)^2}{m+2}+\frac{m+1}{m+2} \\ 0 & 1 & 0 & 1-\frac{m+1}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array}\right)$.

Enfin, il reste à faire l'opération élémentaire : $L_1 \leftarrow \dfrac{L_1}{m}$.

Cela donne la matrice augmentée, en arrangeant un peu les fractions :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{m+1}{m+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{array}\right).$$

Par exemple, on a fait pour L_1 :

$$\frac{1}{m}\left[-\frac{(m+1)^2}{m+2}+\frac{m+1}{m+2}\right]=\frac{m+1}{m(m+2)}\left[-m-1+1\right]=-\frac{m+1}{m+2}.$$

Alors si $m \notin \{-2,-1,0,1\}$, la solution de $(\mathcal{S})$ est unique et :

$$x=-\frac{m+1}{m+2},\ y=\frac{1}{m+2} \text{ et } z=\frac{(m+1)^2}{m+2}.$$

$$\boxed{\text{Si } m \notin \{-2,-1,0,1\},\ (\mathcal{S})=\left\{\left(-\frac{m+1}{m+2},\ \frac{1}{m+2},\ \frac{(m+1)^2}{m+2}\right)\right\}.}$$

Remarque

Dans le cas où $m \notin \{-2,-1,0,1\}$, le rang de $(\mathcal{S})$ est 3 et la solution est unique. Pour les MPSI, on dit que $(\mathcal{S})$ est un système de Cramer.

Il reste maintenant à reprendre les cas particuliers de valeurs de m que l'on a écartés au cours du processus. On reprend à chaque fois la matrice augmentée juste avant la mise de côté de chaque valeur de $m \in \{-2,-1,0,1\}$. On remplaçe à chaque fois m par sa valeur dans cette matrice augmentée.

Cas où $m=0$. On a la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Faisons (par exemple) successivement :

$$L_1 \leftrightarrow L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

On obtient rapidement : $z=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ et $x=-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Si } m=0,\ (\mathcal{S})=\left\{\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\}.}$$

Remarque

Le rang de $(\mathcal{S})$ est encore 3 et la solution est unique. On remarque que l'on retrouve le cas général avec $m=0$.

Cas où $m=1$. On a la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

$(\mathcal{S})$ a une infinité de solutions :

$$\boxed{\text{Si } m=1,\ (\mathcal{S})=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=1-y-z\}.}$$

Remarque

Dans le cas où $m=1$, le rang de $(\mathcal{S})$ est 1 car le rang de la matrice associée est 1.

Cas où $m=-1$. On a la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

On obtient rapidement : $z=0$, $x=0$ et $y=1$. On conclut :

$$\boxed{\text{Si } m=-1,\ (\mathcal{S})=\{(0,\,1,\,0)\}\,.}$$

Remarque

Dans le cas où $m=-1$, le rang de $(\mathcal{S})$ est 3 et la solution est unique. On remarque que l'on retrouve encore le cas général pour $m=-1$.

Cas où $m=-2$. On a la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$.

La dernière ligne montre que le système est incompatible.

$$\boxed{\text{Si } m=-2,\ (\mathcal{S})=\emptyset.}$$

Remarque

Dans le cas où $m=-2$, le rang de $(\mathcal{S})$ est 2 car le rang de la matrice associée est 2.

Remarque : utilisation des formules de Cramer

(**seulement pour des MPSI intéréssés ou pour calculer des déterminants**)

• On commence par calculer le déterminant Δ du système $(\mathcal{S})$: $\Delta=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$.

Si vous êtes PCSI ou PTSI, le calcul du déterminant Δ est tout à fait dans vos cordes (et comme les trois autres déterminants qui suivent) et c'est bon pour l'entraînement. Par contre, oublier les formules dites de Cramer.

Commençons donc par le calcul de Δ. Attention, on peut développer « bêtement » avec la règle de Sarrus mais quelques opérations élémentaires permettent de factoriser déjà partiellement. Il faut se rappeler, de plus, que les opérations élémentaires sur les colonnes sont autorisées pour un déterminant (contrairement à la résolution d'un système) mais que des règles supplémentaires apparaissent par rapport à la résolution d'un système.

La permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplie par -1 un déterminant ;

l'opération $L_i \leftarrow a\,L_i$ ou $C_i \leftarrow a\,C_i$ (avec $a \neq 0$) multiplie par a le déterminant.

Ici, on effectue d'abord (vous pouvez faire autre chose, on est en démocratie) :

$$L_2 \leftarrow mL_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow mL_3 - L_1,$$

en supposant $m \neq 0$. (Donc, on mettra $\dfrac{1}{m^2}$ en facteur devant le déterminant.)

$$\Delta = \frac{1}{m^2}\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m^2-1 & m-1 \\ 0 & m-1 & m^2-1 \end{vmatrix} = \frac{(m-1)^2}{m^2}\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 1 & m+1 \end{vmatrix},$$

en factorisant par $m-1$ la ligne L_2 puis la ligne L_3.

Il reste à développer selon la première colonne :

$$\Delta = \frac{(m-1)^2 m}{m^2}\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = \frac{(m-1)^2 m^2 (m+2)}{m^2} = (m-1)^2(m+2).$$

Il reste à faire le cas $m = 0$ à part. Rapidement : $\Delta = 2$.
Maintenant, si vous n'êtes pas un MPSI, vous pouvez fermer les yeux pour la suite de cette solution ou aussi calculer les trois déterminants des numérateurs des valeurs de x, de y et de z pour l'entraînement.
On utilise donc les formules de Cramer. On rappelle que si Δ est non nul, C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de Δ et B la colonne second membre du système $(\mathcal{S})$, alors $(\mathcal{S})$ a une solution unique (x, y, z) donnée par :

$$x = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\Delta},\ y = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\Delta} \text{ et } z = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\Delta}.$$

Donc, en supposant $m \notin \{-2, 1\}$ dans la suite (car on divise par Δ qui doit être donc non nul) :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)},\ y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)},\ z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)}.$$

Il reste ainsi à calculer les trois déterminants qui correspondent aux numérateurs de x, y et z.
Par exemple, pour le numérateur de x, on peut faire les opérations élémentaires :

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \text{ et } C_2 \leftarrow C_2 - C_3.$$

Puis, on développe selon la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m^2 - m & 1 - m \end{vmatrix} = -(m+1)(m-1)^2.$$

On obtient $x = \dfrac{-(m+1)(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = -\dfrac{m+1}{m+2}$. C'est bien le résultat attendu.
Pour le numérateur de y, on aboutit à $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2$, après avoir fait par exemple l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis la mise en facteur de $m - 1$ et ensuite $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et enfin un développement selon la deuxième ligne.
On obtient : $y = \dfrac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \dfrac{1}{m+2}$. C'est bien le résultat attendu.
Enfin, pour le numérateur de z, on obtient : $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix} = (m+1)^2(m-1)^2$, après par exemple avoir fait simultanément :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2,\ L_2 \leftarrow L_2 - L_2,$$

puis la mise de $(m-1)^2$ en facteur, puis les opérations :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \text{ et } C_3 \leftarrow C_3 + C_1.$$

Et il reste par exemple à développer selon la deuxième ligne.
On obtient : $z = \dfrac{(m+1)^2(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}$. C'est bien le résultat attendu.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon de transformer une matrice $A = (a_{i,j})$ ayant n lignes et p colonnes en une matrice équivalente, échelonnée par lignes, en utilisant **l'algorithme de Gauss**. Cette méthode est à la fois utile pour résoudre le système associé dont A est la matrice augmentée ou aussi simplement pour calculer le rang de la matrice A.

On pose $k = \min(n, p)$ et on suppose $k \geqslant 2$ pour que la méthode ait un intérêt puis :

1) on commence par vérifier que $a_{1,1} \neq 0$. Si tel n'est pas le cas, on permute la ligne L_1 de A et la première ligne L_i telle que $a_{i,1} \neq 0$ et on réindexe la matrice A ;
le nouveau coefficient $a_{1,1}$ est appelé premier pivot.

2) On effectue les opérations élémentaires, pour i variant de 2 à n,

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1.$$

On obtient une matrice notée $A^{(1)} = \left(a_{i,j}^{(1)}\right)$ dont la première colonne a pour premier coefficient $a_{1,1}$ et ses autres coefficients sont nuls.

3) On vérifie que $a_{2,2}^{(1)} \neq 0$; si tel n'est pas le cas, on permute la ligne L_2 de $A^{(1)}$ et la première ligne L_i (i supérieur à 2) telle que $a_{i,2} \neq 0$ et on réindexe la matrice $A^{(1)}$;
le nouveau coefficient $a_{2,2}^{(1)}$ est appelé deuxième pivot.

4) On effectue les opérations élémentaires, pour i variant de 3 à n,

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}} L_2 \,;$$

on obtient une matrice notée $A^{(2)} = \left(a_{i,j}^{(2)}\right)$ dont la première colonne a pour premier coefficient $a_{1,1}$, ses autres coefficients sont nuls et la deuxième colonne a pour premier coefficient $a_{1,2}$, pour deuxième coefficient $a_{2,2}^{(1)}$ et ses autres coefficients sont nuls.

5) On procède ainsi (au maximum il y a $k-1$ étapes) jusqu'à n'obtenir que des 0 sous la diagonale principale. Il est clair que la matrice $A^{(k-1)}$ est telle que sous sa diagonale principale, il n'y a que des 0.

6) On obtient finalement une des trois formes suivantes, où $+$ symbolise un coefficient éventuellement non nul :

$$\begin{pmatrix} + & + & . & . & . & + \\ 0 & + & . & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & + & . \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + & . & . & + \\ 0 & + & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 & + \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + & . & + \\ 0 & + & . & . \\ . & 0 & . & . \\ . & . & . & + \\ . & . & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients de la diagonale principale $\left(a_{1,1}^{(k-1)}, ..., a_{k,k}^{(k-1)}\right)$ de la matrice finale ne sont pas obligatoirement tous non nuls.

♡ Il faut se souvenir de la manière de résoudre un système linéaire par opérations élémentaires sur les lignes. Soit le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & = & \\ a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p & = & b_i \\ & = & \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array} \right. .$$

1) On écrit ce système sous forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ d'une matrice augmentée, où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ et B est une matrice colonne dont les coefficients sont $b_1, ..., b_n$.
2) Puis, on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée, en appliquant la méthode du pivot de Gauss (en procédant éventuellement à des permutations de lignes). On obtient alors d'abord une matrice augmentée du type $\left(\begin{array}{c|c} T & B^{(k)} \end{array} \right)$, où T est une matrice triangulaire supérieure et $B^{(k)}$ est une certaine matrice colonne. On peut s'arrêter là, ce qui donne un système échelonné par lignes.
On peut aussi continuer les opérations élémentaires pour obtenir une matrice augmentée du type $\left(\begin{array}{c|c} R & B^{(k')} \end{array} \right)$, où R est une matrice échelonnée réduite par lignes et $B^{(k')}$ est une certaine matrice colonne.
3) Le système étant écrit sous forme échelonné, on peut le résoudre « en remontant ». Soit r le rang (on a toujours $r \leqslant \min(n, p)$) de $(\mathcal{S})$. Traitons la suite du développement dans l'hypothèse fréquente où $0 < r < n$, (on remarque que c'est le cas par exemple si $p < n$). Supposons alors que l'on obtienne la matrice augmentée, après un certain nombre d'opérations élémentaires sur les lignes, sous la forme :

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} p_1 & + & . & . & . & . & . & + \\ 0 & p_2 & . & + & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & . & p_r & + & . & + & + \\ . & . & . & 0 & 0 & . & 0 & c_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 & c_n \end{array} \right),$$

où $p_1, ...p_r$ sont des coefficients non nuls, $+$ et $c_{r+1}, ..., c_n$ sont des coefficients issus des opérations élémentaires. Si l'un des coefficients $c_{r+1}, ..., c_n$ est non nul, le système $(\mathcal{S})$ est incompatible et n'a pas de solution. Si tous les coefficients $c_{r+1}, ..., c_n$ sont nuls, on prend $x_{r+1}, ..., x_p$ pour inconnues auxiliaires et on résout alors le système en remontant. On commence par calculer x_r en fonction des inconnues auxiliaires puis x_{r-1} jusqu'à x_1.
Il reste les cas $r = n < p$ et $r = n = p$ que l'on peut considérer comme des cas « limites » du cas développé.

♡ Il faut se souvenir que pour résoudre un système par opérations élémentaires, il ne faut **jamais** faire d'opérations sur les colonnes car on transforme alors les inconnues. Par contre, pour trouver le rang d'une matrice ou pour calculer un déterminant, on peut faire les deux (opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes).

♡ Il faut se souvenir des différentes façons de calculer un déterminant. Supposons que le déterminant soit d'ordre $n \geqslant 3$, on peut utiliser la règle de Sarrus, valable seulement pour le cas $n = 3$, (adéquat si le déterminant n'a pas de paramètre) ou un développement selon une rangée qui transforme notre déterminant en une combinaion linéaire de déterminants d'ordre inférieur $n - 1$ ou encore utiliser des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes. Attention, la multiplication d'une ligne ou d'une colonne par a multiplie le déterminant par a et la permutation de deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1. On peut aussi « patcher » les méthodes. Enfin, si le déterminant est (ou devient par opérations élémentaires) triangulaire supérieur ou inférieur, sa valeur est le produit des éléments diagonaux.

♡ Il faut se souvenir des identités remarquables. Par exemple,

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ et } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Elles permettent des factorisations.

♡ Il faut se souvenir de la façon d'écrire un déterminant qui a un paramètre sous forme factorisée. Il faut commencer par faire des opérations élémentaires qui permettent de factoriser un terme dans une rangée donnée, l'idéal est d'aboutir à un déterminant triangulaire mais ce n'est pas obligatoire.

Formulaire

• *Opérations élémentaires sur les lignes d'un système*

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne d'une matrice (augmentée ou non).
On appelle **opérations élémentaires** sur les lignes les opérations suivantes :

- Échanger l'ordre des lignes L_i et L_j $\quad (L_i \leftrightarrow L_j)$,
- Multiplier L_i par une constante non nulle $\lambda_i \in \mathbb{K}^\star$ $\quad (L_i \leftarrow \lambda_i\ L_i)$,
- Ajouter à L_i un multiple de L_j $(i \neq j)$ $\quad (L_i \leftarrow L_i + \lambda_j L_j)$.

Faire une opération élémentaire sur un système signifie que l'on fait une opération élémentaire sur la matrice augmentée correspondante.

• *Systèmes équivalents et matrices équivalentes par lignes*

Deux systèmes sont dits **équivalents** si l'on passe de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
Deux systèmes sont équivalents s'ils ont le même ensemble des solutions.
Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes par lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
On note alors :

$$A \sim_L A'.$$

Si l'on passe d'un système $(\mathcal{S})$ à un système $(\mathcal{S}')$ par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de $(\mathcal{S}')$ s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de $(\mathcal{S})$.
Ce résultat justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.

• *Systèmes triangulaires*

Un système (T) de n équations à p inconnues est dit **triangulaire** supérieur (on dit aussi **échelonné**) lorsque

$$\big(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]\big), \quad \big((i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0\big).$$

Soit (T) un système triangulaire de n équations à n inconnues. Alors : (T) possède une unique solution si et seulement si tous les coefficients diagonaux de (T) sont non nuls.
On résout un système triangulaire par remontée.

• *Matrice échelonnée par lignes*

Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;

à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente. On appelle *pivot* le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.
Un système (S) est **échelonné** ou **triangulaire supérieur** si et seulement si sa matrice A est échelonnée par lignes.
Tout système ayant au moins un coefficient non nul est équivalent à un système échelonné. C'est **l'algorithme de Gauss**, rappelé plus haut, qui l'affirme.

• *Matrice échelonnée réduite par lignes*

Une matrice échelonnée en lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes. C'est encore l'algorithme de Gauss qui permet d'arriver à ce résultat.

Énoncé

1) On définit n *v.a.r.d* **indépendantes deux à deux** $Y_1, \dots Y_n$, de même loi et possédant un moment d'ordre 2.
Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall a > 0,\ P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{n\,a^2},$$

où S_n désigne la somme $Y_1 + \dots + Y_n$.
Indication (pour PCSI-PTSI) : *on admettra que si* $Y_1, \dots, Y_n$ *sont indépendantes deux à deux, alors* $V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k)$.

2) On tire n fois avec remise une boule parmi 2 boules rouges et 3 boules noires. Trouver n pour avoir 95% de chance d'obtenir une proportion de boules rouges comprise entre $0,35$ et $0,45$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice de probabilités posé à l'oral de Mines-Telecom mais aussi à celui de l'ENSEA en 2017, exercice posable dans toutes les filières en fin de deuxième année. Il s'agit de montrer la loi faible des grands nombres et de l'appliquer à un exemple. Sachez que la loi faible des grands nombres est au programme de deuxième année de toutes les filières mais la démonstration peut se faire pratiquement avec les outils de la première année. il y a juste à admettre un résultat (rappelé plus haut) si vous êtes en PCSI ou en PTSI.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Les exercices de probabilités permettent à l'examinateur d'évaluer les capacités de réflexion du candidat. On constate, très souvent, que les explications orales qui accompagnent les résultats proposés pour les exercices de probabilités, comme la détermination d'une loi par exemple, ne sont pas toujours claires.
> À tel point, qu'il est souvent difficile de comprendre où le raisonnement du candidat est défaillant et de ce fait, il est difficile de l'aider à rectifier...
> Pourtant, Boileau disait « ce qui se conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément ».

1) L'indication (pour PCSI-PTSI) : « si $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes deux à deux, alors $V\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k)$ », est du cours pour la filière MPSI. Par contre, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est du cours pour toutes les filières de première année.

↪ Il faut d'abord écrire correctement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une *v.a.r.d* X et faire ensuite preuve de rigueur, en l'appliquant au bon X.

Rapport du jury E3A, filière PSI 2016

Quelques recommandations pour les candidats : travailler régulièrement le cours tout au long de l'année, justifier rigoureusement les résultats proposés (les approximations ou « arnaques » sont toujours sévérement sanctionnées).

2) On se doute que l'on applique la question **1)** (loi faible des grands nombres). La seule difficulté est de bien définir chacune des $v.a.r.d$ Y_i.

$\hookrightarrow$ On pense à un des résultats de première année : la somme de n variables indépendantes mutuellement qui suivent toutes la même loi de Bernoulli suit quelle loi ?

Rapport du jury Mines-Ponts 2016

Les probabilités sont, dans l'ensemble, convenablement maîtrisées, en particulier en ce qui concerne les variables aléatoires. Cependant, pour ce qui est de la partie modélisation du problème probabiliste étudié, il semble qu'il y ait un décalage entre deux catégories de candidats : ceux qui sont dans une démarche temporelle et qui ont du mal à mettre en place leurs idées et ceux qui arrivent à gérer globalement la modélisation de l'expérience et qui s'en sortent souvent mieux.

Corrigé

1) On rappelle l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout X, variable aléatoire discrète finie, $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.
Soient $Y_1, ..., Y_n$ n $v.a.r.d$ indépendantes deux à deux ayant la même espérance m et la même variance σ^2. Posons : $X = \dfrac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)$.
Alors, par linéarité de l'espérance de variables aléatoires réelles,

$$E(X) = E\left[\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)\right] = \frac{1}{n}E\left[(Y_1 + ... + Y_n)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i).$$

Et comme $E(Y_i) = m$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m = \dfrac{1}{n}.n.m = m$.
De même, en utilisant la propriété $V(aX) = a^2V(X)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et l'indépendance deux à deux des variables aléatoires Y_1, ..., Y_n, on a :

$$V(X) = V\left[\frac{1}{n}(Y_1 + ... + Y_n)\right] = \frac{1}{n^2}V\left[(Y_1 + ... + Y_n)\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Y_i).$$

Et comme $V(Y_i) = \sigma^2$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $V(X) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \dfrac{1}{n^2}.n.\sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$.
On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $X = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ et à $\epsilon = a > 0$ fixé, avec les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$ trouvées, cela donne :

$$\boxed{P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) - m\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{na^2}.}$$

2) On considère chaque tirage comme un tirage de Bernoulli, c'est-à-dire que l'on construit la *v.a.r.d* Y_i par : $Y_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ tirage est une boule rouge et $Y_i = 0$ si le $i^{\text{ème}}$ tirage est une boule noire. Les tirages sont deux à deux indépendants (car chaque tirage est considéré avec remise). Donc : $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{Y_1 + ... + Y_n}{n}$ donne la proportion de boules rouges obtenues dans n tirages.
Par ailleurs, $P(Y_i = 1) = \dfrac{2}{5}$ et $P(Y_i = 0) = \dfrac{3}{5}$ et Y_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{2}{5}\right)$.
Donc $E(Y_i) = \dfrac{2}{5}$ et $V(Y_i) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{25}$.
La variable aléatoire S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{2}{5}$.
En appliquant la question **1)** avec $m = \frac{2}{5}$ et $\sigma = \frac{6}{25}$, on a pour tout entier n non nul et tout $a > 0$,

$$(1) \quad P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) - 0.4\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{6}{25na^2}.$$

On veut trouver n pour avoir 95% de chance d'obtenir une proportion de boules rouges comprise entre $0,35$ et $0,45$, donc pour avoir 95% de chance d'obtenir une proportion de boules rouges comprise entre $0,4-0,05$ et $0,4+0,05$. Par complémentarité, on doit trouver n pour avoir au plus une probabilité de $0,05$ d'obtenir une proportion de boules rouges en dehors de la fourchette $[0,4 - 0,05, 0,4 + 0,05]$, qui peut s'écrire :

$$\left|\frac{S_n}{n} - \frac{2}{5}\right| \geqslant 0,05.$$

On doit donc trouver les entiers n vérifiant : $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{2}{5}\right| \geqslant 0,05\right) \leqslant 0,05$.
Comme on a l'inégalité (1), il suffit de choisir n entier tel que :

$$\frac{6}{25\, n\, a^2} \leqslant 0,05 \Leftrightarrow \frac{6}{25\, n\, (0,05)^2} \leqslant 0,05,$$

en prenant $a = 0,05 = \dfrac{5}{100}$ et donc $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{10^4}{25}$.
Il reste (muni d'une calculette) : $\dfrac{6 \times 10^4}{25^2 \times n} \leqslant 0,05 \Leftrightarrow n \geqslant 1920$. Finalement,

$$\boxed{n \geqslant 1920.}$$

On peut remarquer que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev étant une inégalité, elle fournit des valeurs de n suffisantes mais pas forcément nécessaires.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détecte une loi classique.
Au programme officiel en première année, il y en a trois.
1) Le modèle équiprobable : **la loi uniforme**. $X(\Omega)$ est un ensemble fini de n éléments $x_1, ..., x_n$ et chaque élément a la même probabilité d'apparition, c'est-à-dire $\frac{1}{n}$. Des cas typiques sont le lancer d'un dé non pipé ou un jeu de cartes.
2) Le schéma succès-échec : **la loi de Bernoulli**. $X(\omega) = \{0, 1\}$.

Si $P(X=1)=p$, alors $P(X=0)=q=1-p$. Le cas typique est le lancer d'une pièce truquée (dont la probabilité p d'obtenir Pile par exemple est p. Ici, le succès est d'obtenir Pile. Un autre cas typique est le tirage d'une boule dans une urne ayant deux couleurs de boules, la proportion par exemple de boules rouges est p et le succès s'il est de tirer une boule rouge est alors de probabilité p.

3) Le nombre de succès en n tentatives indépendantes : **la loi binomiale**. Chaque tirage suit le schéma de Bernoulli. Un cas typique est le tirage de n boules avec remise dans une urne possédant deux couleurs de boules, par exemple la proportion de boules rouges est p. Alors si X est le nombre de boules rouges obtenues, $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Il est à noter que les lois usuelles ne sont pas connues, ou alors de manière trop approximative pour permettre de répondre aux attentes de l'énoncé. Ainsi, la loi binomiale est parfois citée sans préciser les valeurs de ses paramètres. De même, un effort devrait être porté sur la connaissance et la notation de l'univers image d'une loi, première donnée essentielle à une présentation plus calculatoire de la loi.

Formulaire

• *Loi de Bernoulli*

$X(\Omega)=[\![0,1]\!]$ et $p\in]0,1[$.

On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p si et seulement si :

$$P(X=0)=q=1-p \text{ et } P(X=1)=p.$$

Notation : $X\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$. Et : $E(X)=p$, $V(X)=pq$.

• *Loi binomiale*

Ici $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ avec $n\geqslant 1$ et $p\in]0,1[$.

On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres** n et p si et seulement si :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k},\text{ où } q=1-p.$$

Notation : $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$. Alors : $E(X)=np$ et $V(X)=npq$.

• *Espérance et variance d'une somme de v.a.r.d*

Soient $X_1,...,X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même univers fini Ω. Alors : $E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n E(X_i)$.

Pour MPSI. Si de plus, les variables aléatoires $X_1,...,X_n$ sont **indépendantes deux à deux**, et si $(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}$, alors : $V\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n a_i^2V(X_i)$.

• *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Soit X une v.a.r discrète finie, alors : $\forall\,\varepsilon>0,\ P\big(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Jour n^{o}3

Exercice 3.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

On considère f un endomorphisme de E, espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, de dimension 3. On suppose, de plus, que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1) On considère $\vec{x}_0 \in E$ tel que $f^2(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.
Montrer que $(\vec{x}_0,\ f(\vec{x}_0),\ f^2(\vec{x}_0))$ est une base de E.

2) On veut déterminer l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

a) Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a\, Id_E + b\, f + c\, f^2$ commute avec f.

b) Montrer que tous les endomorphismes qui commutent avec f sont des combinaisons linéaires de Id_E, de f et de f^2.

Exercice 3.2 — MPSI-PCSI-PTSI

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + ... + n^2}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer la convergence de la série de terme général a_n.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$.

3) Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

4) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Énoncé

On considère f un endomorphisme de E, espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, de dimension 3. On suppose, de plus, que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1) On considère $\vec{x}_0 \in E$ tel que $f^2(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.
Montrer que $(\vec{x}_0,\ f(\vec{x}_0),\ f^2(\vec{x}_0))$ est une base de E.

2) On veut déterminer l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

a) Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a\,Id_E + b\,f + c\,f^2$ commute avec f.

b) Montrer que tous les endomorphismes qui commutent avec f sont des combinaisons linéaires de Id_E, de f et de f^2.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice d'algèbre linéaire inspiré d'une planche d'oral posée au concours de l'ENSAM, en filière PSI en 2016. Cet exercice est très classique et est posé régulièrement depuis très longtemps et donc pas forcément uniquement pour la filière PSI et pour ce concours. Ainsi, un élève de TSI2 ou de TPC2 rencontre régulièrement la première question à l'écrit comme à l'oral. Bien que la dimension (3 ici) ait son importance, cet exercice peut se traiter avant d'avoir vu la représentation matricielle des endomorphismes. Il tourne autour de la notion de combinaison linéaire de vecteurs ou d'endomorphismes. Donnons un extrait de rapport de jury un peu général sur ce sujet.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Les candidats connaissent de nombreuses techniques d'algèbre linéaire. Elles sont parfois malheureusement un masque cachant une compréhension assez pauvre des principaux concepts de l'algèbre linéaire. Parmi les concepts les plus importants et les moins bien connus, citons la notion de combinaison linéaire. De nombreux candidats ne savent pas donner des exemples de combinaisons linéaires de deux vecteurs. Dans le même ordre d'idée, la définition de la notation Vect est fort mal connue.

1) On veut montrer qu'une famille de trois vecteurs est une base de E, de dimension trois. Les hypothèses $f^3 = 0$ et $f^2(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ sont importantes.

$\hookrightarrow$ On sait qu'une famille libre de trois vecteurs de E est une base de E.

2) On veut déterminer tous les endomorphismes de E qui commutent avec f.
On procède en deux étapes (question **2)a)** puis question **2)b)**).

a) C'est la partie la plus facile.
On pose par commodité par exemple $\sigma = a\,Id_E + b\,f + c\,f^2$.

$\hookrightarrow$ On doit donc prouver que $f\,o\,\sigma = \sigma\,o\,f$.

b) Comment faire ? C'est la réciproque de la question précédente. Il faut sûrement utiliser la première question. Mais comment ? Soit ψ un endomorphisme qui commute avec f. Comme $\psi(\vec{x}_0)$ est un vecteur de E, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\psi(\vec{x}_0) = \alpha\vec{x}_0 + \beta f(\vec{x}_0) + \gamma f^2(\vec{x}_0)$. Vous avez peut-être déjà compris que l'idée est de montrer que ψ est égal à $\sigma = \alpha Id_E + \beta f + \gamma f^2$. On remarque que ψ et σ ont la même valeur pour $\vec{x}_0$. Et on sait que deux endomorphismes en dimension finie qui ont les mêmes valeurs pour une base donnée, sont égaux. À vous de continuer.

$\hookrightarrow$ Cette question est nettement moins intuitive que la première. Il faut généralement suivre les indications pour s'en sortir. L'intelligence est bien entendu de savoir rebondir quand on a ces indications.

Corrigé

1) E étant de dimension 3, il suffit de prouver que la famille $(\vec{x}_0,\ f(\vec{x}_0),\ f^2(\vec{x}_0))$ est libre. On écrit l'égalité :

$$(1)\quad a\vec{x}_0 + bf(\vec{x}_0) + cf^2(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow af^2(\vec{x}_0) + bf^3(\vec{x}_0) + cf^4(\vec{x}_0) = 0,$$

en appliquant f^2 à la première égalité (1).
Comme $f^3 = f^4 = 0$, et comme $f^2(\vec{x}_0) \neq 0$, $af^2(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow a = 0$.
On remplace dans (1), ce qui donne :

$$(2)\quad bf(\vec{x}_0) + cf^2(\vec{x}_0) = 0.$$

On applique f à l'égalité (2) et comme $f^3 = 0$, il reste :

$$bf^2(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow b = 0,$$

car $f^2(\vec{x}_0) \neq 0$. On remplace encore dans (1) et il reste :

$$cf^2(\vec{x}_0) = 0 \Rightarrow c = 0,$$

toujours en utilisant $f^2(\vec{x}_0) \neq 0$.
On est mûr pour conclure : la famille $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), f^2(\vec{x}_0))$ est libre dans un espace de dimension 3. Et d'après le cours, on en déduit :

$$\boxed{\text{la famille } (\vec{x}_0, f(\vec{x}_0), f^2(\vec{x}_0)) \text{ est une base de } E.}$$

Remarque
On sait que si $\dim E = n$, il est équivalent, pour montrer qu'une famille de n vecteurs de E est une base de E, de montrer soit qu'elle est libre, soit qu'elle est génératrice. En général, montrer la liberté d'une famille est le plus simple, comme ici. Mais parfois, il arrive qu'il faut prouver plutôt que la famille est génératrice de E. On reconnaît généralement ce cas là par l'énoncé.

2) a) Posons $\sigma = a\,Id_E + b\,f + c\,f^2$, où a, b et c sont des scalaires donnés.
Alors σ commute avec f si et seulement si $\sigma\, o\, f = f\, o\, \sigma$. On a :

$$\sigma\, o\, f = (a\,Id_E + b\,f + c\,f^2)\, o\, f = a\,f + b\,f^2,$$

car $f^3 = 0$.
De même, $f\, o\, \sigma = f\, o\,(a\,Id_E + b\,f + c\,f^2) = a\,f + b\,f^2$, toujours en utilisant $f^3 = 0$.
Les deux quantités sont finalement bien les mêmes.

$$\boxed{f \text{ et } a\,Id_E + b\,f + c\,f^2 \text{ commutent, pour tout } (a,b,c) \in \mathbb{K}^3.}$$

b) Soit ψ un endomorphisme qui commute avec f. Comme $\psi(\vec{x}_0)$ est un vecteur de E, il s'exprime dans la base $(\vec{x}_0,\ f(\vec{x}_0),\ f^2(\vec{x}_0))$.
Il existe trois scalaires α, β et γ tels que :

$$\psi(\vec{x}_0) = \alpha\vec{x}_0 + \beta\, f(\vec{x}_0) + \gamma\, f^2(\vec{x}_0) = 0.$$

Posons $\sigma = \alpha\, Id_E + \beta\, f + \gamma\, f^2$. Montrons que σ et ψ sont les mêmes endomorphismes. Pour cela, il suffit de prouver qu'ils ont les mêmes images dans une base donnée. Nous choisissons la base $(\vec{x}_0,\ f(\vec{x}_0),\ f^2(\vec{x}_0))$. On a déjà :

$$\psi(\vec{x}_0) = \sigma(\vec{x}_0).$$

Puis : $\sigma(f(\vec{x}_0)) = \alpha\, f(\vec{x}_0) + \beta\, f^2(\vec{x}_0) + \gamma\, f^3(\vec{x}_0) = \alpha\, f(\vec{x}_0) + \beta\, f^2(\vec{x}_0)$, car $f^3(\vec{x}_0) = 0$.
Comme ψ et f commutent,

$$\psi(f(\vec{x}_0)) = f(\psi(\vec{x}_0)) = f(\alpha\, \vec{x}_0 + \beta\, f(\vec{x}_0) + \gamma\, f^2(\vec{x}_0)).$$

Ce qui donne :

$$\psi(f(\vec{x}_0)) = \alpha\, f(\vec{x}_0) + \beta\, f^2(\vec{x}_0),$$

car $f^3 = 0$. Puis :

$$\sigma(f(\vec{x}_0)) = \alpha\, f(\vec{x}_0) + \beta\, f^2(\vec{x}_0) + \gamma\, f^3(\vec{x}_0).$$

Comme $f^3(\vec{x}_0) = 0$, on a bien :

$$\psi(f(\vec{x}_0)) = \sigma(f(\vec{x}_0)).$$

Enfin,

$$\psi(f^2(\vec{x}_0)) = f^2(\psi(\vec{x}_0)),$$

car si ψ et f commutent, ψ et f^2 aussi. Donc :

$$\psi(f^2(\vec{x}_0)) = \alpha\, f^2(\vec{x}_0) + \beta\, f^3(\vec{x}_0) + \gamma\, f^4(\vec{x}_0) = \alpha\, f^2(\vec{x}_0),$$

car $f^3 = f^4 = 0$. Puis :

$$\sigma(f^2(\vec{x}_0)) = \alpha\, f^2(\vec{x}_0) + \beta\, f^3(\vec{x}_0) + \gamma\, f^4(\vec{x}_0) = \alpha\, f^2(\vec{x}_0).$$

Et on a bien :

$$\psi(f^2(\vec{x}_0)) = \sigma(f^2(\vec{x}_0)).$$

On peut conclure. ψ et σ sont identiques. Donc, tout endomorphisme ψ qui commute avec f est de la forme $\alpha\, Id_E + \beta\, f + \gamma\, f^2$. Réciproquement, d'après **2)a)**, tout endomorphisme de ce type commute avec f. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'ensemble des endomorphismes qui commutent avec } f \text{ est Vect}\,(Id_E,\ f,\ f^2).}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon d'aborder une question comme **2)** ici. On doit savoir ce que l'on doit montrer et quelles sont les hypothèses et les résultats sur lesquels on peut s'appuyer et sans se focaliser sur certains. Donnons un extrait de rapport de jury, qui illustre un peu la façon de penser dans ce type de question.

> Rapport du jury ENSEA, École Navale 2016
>
> Un problème se pose dans l'analyse de l'énoncé du sujet : attention à ne pas se concentrer sur les hypothèses proposées en oubliant ce qu'il faut montrer ni à se focaliser sur ce qu'il faut montrer (ce qui part d'un bon sentiment) mais en oubliant les hypothèses. Dans le premier cas, on ne sait pas où il faut aller ; dans le second, on ne sait pas comment ; enfin, dans les deux cas, on est bloqué...
> Presque tous les candidats continuent à introduire les hypothèses des théorèmes par ce pénible et gras **il faut**. Or ceci n'est pas seulement une maladresse de langage (est-ce une contraction de « il faut vérifier que » ?), c'est une faute lourde de logique ! Ceux qui ne la commettent pas font clairement la différence !

♡ Il faut se souvenir du fait que si $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ est une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n, il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ est libre pour montrer que c'est une base de E.

♡ Il faut se souvenir que deux endomorphismes ϕ et ψ dans un espace vectoriel de dimension finie ayant pour base $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ sont égaux si et seulement pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\phi(\vec{u}_i) = \psi(\vec{u}_i)$.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2010
>
> La réussite à l'oral passe avant tout par une bonne maîtrise des concepts de base et une bonne connaissance du cours. On attend du bon sens, des raisonnements cohérents et rigoureux. Le candidat gagne toujours à exposer clairement ses idées, y compris leurs limites, à distinguer ce qu'il conjecture de ce qu'il prouve, ou encore à expliquer le plan de sa preuve avant de passer aux détails techniques. Le simple fait de préciser les théorèmes utilisés, et d'en vérifier les hypothèses de sa propre initiative, permet de marquer des points. On apprécie également le candidat qui conduit ses calculs au lieu de les subir, celui qui s'aide du triangle de Pascal quand cela est utile.

Formulaire

• *Familles libres, génératrices, bases*

Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors :
• $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E si $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p) = E$, c'est-à-dire si pour tout $\vec{u} \in E$, il existe $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + ... + a_p\vec{u}_p$.
• $\mathcal{F}$ est une **famille libre** de E si la seule façon d'écrire une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{F}$ est de prendre tous les coefficients nuls, c'est-à-dire si :

$$\forall (a_1, ..., a_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left[a_1\vec{u}_1 + ... + a_p\vec{u}_p = \vec{0} \Rightarrow a_1 = ... = a_p = 0\right].$$

• $\mathcal{F}$ est une **base** de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.

Exercice 3.2 Concours Commun INP (ex CCP) 2017 - ♣ ♣

Énoncé

On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{1^2 + 2^2 + ... + n^2}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer la convergence de la série de terme général a_n.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2$.

3) Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

4) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé au Concours Commun INP (ex CCP) en filière PSI en 2017. C'est un exercice sur les séries à termes positifs. Le but est de montrer la convergence d'une série numérique puis de trouver sa somme. On utilise au passage la série dite harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ qui est divergente (comme vous le savez) mais qui a des propriétés intéressantes (question **2)** par exemple).

1) On demande ici de montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

$\hookrightarrow$ On rappelle que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

2) On demande de trouver la limite de la suite $H_{2n+1} - H_n$. On écrit $H_{2n+1} - H_n$ sous forme d'une somme indexée de $n+1$ à $2n+1$. On reconnaît une somme de Riemann en mettant $1/n$ en facteur dans la somme.

$\hookrightarrow$ Attention aux sommes de Riemann. C'est la deuxième fois (voir le Jour 1.1) qu'elles apparaissent dans cet ouvrage. C'est donc un outil utile.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2009
>
> Les candidats sont toujours aussi peu performants sur le programme de première année (sommes de Riemann par exemple). C'est assez pénalisant.

3) Pour trouver a, b, c, on peut réduire au même dénominateur et identifier le membre de gauche $a_n = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)}$ et le membre de droite écrit sous la forme $\dfrac{P(n)}{n(n+1)(2n+1)}$, où $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On utilise alors le fait que deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients pour chaque degré sont égaux. On peut aussi appliquer une méthode plus rapide (si le dénominateur est factorisé complètement). C'est ce que l'on fait dans le corrigé. On écrit l'égalité des deux fractions. On remplace n par x, par souci de rigueur. Puis si α est une racine du dénominateur, on multiplie les deux membres par $x - \alpha$ et on applique pour $x = \alpha$. On trouve le coefficient qui se trouve au-dessus de $x-\alpha$. Si vous n'avez pas saisi l'affaire, allez voir le corrigé.

$\hookrightarrow$ La décomposition en éléments simples est une technique très classique. Elle est à connaître obligatoirement si vous arrivez de la filière MPSI. Par contre, dans toutes les autres filières, vous devez être aidé (d'où la formulation de la question **3)**).

4) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, puis on remplace a_k par une somme de trois fractions déterminées à la question **3)**. Ensuite, on remplace cette somme de trois fractions par deux différences de termes consécutifs. L'idée est ensuite de faire apparaître $H_{2n+1} - H_n$ dont on connaît la valeur de la limite. Enfin, on fait tendre n vers $+\infty$.

$\hookrightarrow$ Pour le calcul de la somme, il faut procéder méthodiquement. C'est la question la plus délicate de l'exercice mais c'est la dernière.

Corrigé

1) On commence par écrire, pour tout entier n non nul :

$$a_n = \frac{1}{1^2+2^2+...+n^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)},$$

en remarquant que $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Donc, $a_n \sim \dfrac{3}{n^3}$, quand $n \to +\infty$.

Comme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{n^3}$ converge et que $\forall n$, $a_n > 0$, il en est de même de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

$$\boxed{\text{En conclusion, la série } \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge.}}$$

2) On écrit pour tout entier n non nul :

$$H_{2n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n+j}.$$

Soit : $H_{2n+1} - H_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{1+\frac{j}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}} + \frac{1}{2n+1}$.

On reconnaît une somme de Riemann après avoir mis $1/n$ en facteur dans la somme.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{j}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, on en déduit le résultat voulu :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (H_{2n+1} - H_n) = \ln 2.}$$

3) Posons l'égalité (on remplace n par x pour pouvoir appliquer à des valeurs non entières) :

$$(1) \quad \frac{6}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}.$$

Ceux qui aiment les calculs peuvent mettre au même dénominateur et identifier. Nous allons faire autrement.
Multiplions les deux membres de (1) par x :

$$(2)\quad \frac{6}{(x+1)(2x+1)} = a + \frac{x\,b}{x+1} + \frac{x\,c}{2x+1}.$$

On applique (2) avec $x = 0$. On obtient $a = 6$.
De même, on multiplie les deux membres de (1) par $x+1$:

$$(3)\quad \frac{6}{x(2x+1)} = \frac{(x+1)a}{x} + b + \frac{(x+1)c}{2x+1}.$$

On applique (3) avec $x = -1$. On obtient $b = 6$.
Enfin, on multiplie les deux membres de (1) par $2x+1$:

$$(4)\quad \frac{6}{x(x+1)} = \frac{(2x+1)a}{x} + \frac{(2x+1)b}{x}.$$

On applique (4) avec $x = -1/2$. On obtient $c = -24$.
Comme (1) est valable si l'on remplace x par n, on peut conclure :

$$\boxed{a = 6,\ b = 6 \text{ et } c = -24.}$$

4) On va en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. On a :

$$S_n = 6\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right)\right].$$

Ou encore, en utilisant $-\dfrac{4}{2k+1} = -\dfrac{2}{2k+1} - \dfrac{2}{2k+1}$:

$$S_n = 6\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{2k} - \frac{2}{2k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{2k+2} - \frac{2}{2k+1}\right)\right].$$

Donc, en divisant par 12 de chaque côté, on obtient :

$$(5)\quad \frac{S_n}{12} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

On peut écrire la première somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)$ du second membre de la dernière égalité (5) sous la forme développée :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - ... - \frac{1}{2n+1}.$$

Ou encore sous la forme :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} - \sum_{k=2}^{2n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}.$$

Soit encore, en remarquant que les deux sommes extrêmes sont identiques :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k} = 1 - \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 1 - [H_{2n+1} - H_n].$$

De même, la deuxième somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k+2} - \frac{1}{2k+1} \right)$ du second membre de (5) devient, sous forme développée :

$$\frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - ... - \frac{1}{2n+1},$$

ou encore :

$$\frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} - \sum_{k=3}^{2n+2} \frac{1}{k} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2},$$

soit encore, en remarquant que les deux sommes extrêmes sont identiques :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{2n+2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} - \sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} - [H_{2n+3} - H_{n+1}].$$

Alors, comme $H_{2n+1} - H_n$ et $H_{2n+3} - H_{n+1}$ tendent vers $\ln 2$, quand n tend vers $+\infty$ (en effet $H_{2n+1} - H_n$ et $H_{2n+3} - H_{n+1}$ sont les termes consécutifs de la même suite), la quantité $\dfrac{S_n}{12}$ tend vers $1 + \dfrac{1}{2} - \ln 2 - \ln 2 = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = 18 - 24 \ln 2.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon de déterminer la somme d'une série convergente $\sum u_n$. Avec le bagage de première année, on a trois pistes :

1) Première piste. L'utilisation des séries géométriques quand u_n est de la forme Aq^n, où $-1 < q < 1$. Ainsi : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = A\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2) Deuxième piste. C'est le **principe du téléscopage** quand le terme général u_n s'écrit facilement sous la forme $f(n) - f(n+1)$, où f est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:
on calcule la somme partielle d'ordre n par « télescopage » :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (f(k) - f(k+1)) = f(0) - f(n+1).$$

On détermine, si elle existe, la limite de f en $+\infty$ et on conclut sur la nature de la série et la valeur de sa somme éventuelle.
Il existe des formes de téléscopage plus complexes.

Par exemple : $\displaystyle\sum_{n=p}^{q}(f(n+1)-f(n-1))$ ou $\displaystyle\sum_{n=p}^{q}(f(n+1)-2f(n)+f(n-1))$; dans ce cas, on peut décomposer linéairement ces sommes partielles, puis décaler les indices pour faire apparaître des sommes communes qui se simplifient, ne laissant que quelques termes résiduels.

3) Troisième piste. Il existe des pistes plus originales. On peut calculer seulement S_{2p} (ou S_{2p+1}). Et même utiliser des sommes de Riemann ! Mais vous serez guidés.

4) Quatrième piste. On peut faire un mixage de plusieurs pistes. C'est le cas de l'exercice que l'on vient de faire. Pour calculer la somme de la série de terme général a_n, on a utilisé des télescopages mais aussi des sommes de Riemann.

Formulaire

• Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **série** associée à la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette série est notée $\sum u_n$, pour la distinguer de la suite $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit que u_n est son **terme général**. $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ est sa **somme partielle d'indice** n.
Chaque suite définit une série unique et réciproquement, puisque la connaissance des sommes partielles S_n équivaut à celle des termes généraux : $S_0=u_0$ et $u_n=S_n-S_{n-1}$ si $n\in\mathbb{N}^*$.
La série de terme général u_n, $\sum u_n$, est **convergente** si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente dans $\mathbb{K}$.

La limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors la **somme de la série** : on la note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

Si la suite des sommes partielles diverge, alors la série est dite **divergente**.

Ne pas confondre $\sum u_n$, qui désigne la série elle-même, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ qui désigne la somme de cette série, c'est-à-dire la limite de la suite de ses sommes partielles. Il y a la même différence entre ces notations qu'entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.

• On rappelle différentes formules de sommes, pour n entier, à connaître.

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=0}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\forall q\neq 1,\ \sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ \forall(a,\,b)\in\mathbb{R}^2,\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

Jour n^{o}4

Exercice 4.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) On étudie ici ch et sh.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}^2\,(x) = 1$.

b) Déterminer les dérivées de ch et de sh en fonction d'elles-mêmes et étudier les variations de ces deux fonctions.

2) On pose dans cette question : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$.

a) Montrer que th est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On précisera ses limites en $\pm\infty$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.

c) Vérifier que th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}^{(n+1)}(x)$ en fonction des dérivées successives $\mathrm{th}^{(k)}(x)$ pour k variant de 0 à n.

e) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{\mathrm{th}^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

f) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{th}^{(2n)}(0)$. Que vaut alors a_{2n} ?

Exercice 4.2 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que Φ, défini par :

$$\Phi(P)(X) = (X^2 + X)P(-1) + (X^2 - X)P(1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Énoncé

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) On étudie ici ch et sh.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}^2\,(x) = 1$.

b) Déterminer les dérivées de ch et de sh en fonction d'elles-mêmes et étudier les variations de ces deux fonctions.

2) On pose dans cette question : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$.

a) Montrer que th est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On précisera ses limites en $\pm\infty$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.

c) Vérifier que th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}^{(n+1)}(x)$ en fonction des dérivées successives $\mathrm{th}^{(k)}(x)$ pour k variant de 0 à n.

e) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{\mathrm{th}^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

f) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{th}^{(2n)}(0)$. Que vaut alors a_{2n} ?

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice très inspiré d'une partie d'un problème posé à l'écrit du Concours Commun INP (ex CCP) en 2016 pour la filière TPC. On étudie des propriétés pour la plupart très classiques des fonctions hyperboliques ch, sh et th. Ces fonctions sont au programme officiel en MPSI, en PCSI et en PTSI. On étudie ensuite en MP les réciproques de ces fonctions. Ainsi, il faut considérer pour ces filières cet exercice plutôt comme un exercice de révision qu'autre chose. Pour les étudiants des filières TSI ou TPC, c'est quand même un bon entraînement. Rappelons qu'il a été posé aux concours pour la filière TPC.

1) On étudie ici les deux indissociables ch et sh.

a) On demande de montrer ici la formule de base de ce que l'on appelle la trigonométrie hyperbolique.

$\hookrightarrow$ Il faut utiliser bien entendu la définition de ch et de sh en fonction de l'exponentielle.

b) Ici, on étudie les variations de sh et de ch.

$\hookrightarrow$ Quand on les dérive, on comprend alors pourquoi leur destin est si lié. Vous pouvez aussi vous intéresser à leur parité, ce qui sert plus loin.

2) On étudie ici la troisième fonction hyperbolique c'est-à-dire th. C'est ici qu'il va falloir utiliser l'égalité prouvée à la question **1) a)**.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Une bonne connaissance des théorèmes du cours est indispensable pour étayer ses raisonnements, pas seulement des noms des théorèmes, qui peuvent varier, mais des hypothèses précises utilisées et des conclusions effectives. Mieux vaut ne pas nommer un théorème que lui donner un nom farfelu.

a) On propose de justifier que th est dérivable et on détermine le comportement de th aux bornes.

$\hookrightarrow$ Ici, on ne demande pas encore d'expliciter cette dérivée. C'est pour la question suivante.

b) On explicite la dérivée de th.

$\hookrightarrow$ On utilise les dérivées de ch et de sh en fonction de ces mêmes fonctions.

c) On veut justifier que th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ On se ramène à la même propriété sur ch et sh.

d) On désire une expression de la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de th en fonction des dérivées successives précédentes.

$\hookrightarrow$ C'est probablement la question la plus délicate de l'exercice. On part de la formule établie à la question **2) b)** et on utilise la formule de Leibniz. C'est l'occasion de se rappeler ce résultat et ses hypothèses.

e) On veut ici une relation entre la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de th en 0 et les dérivées successives précédentes en 0.

$\hookrightarrow$ On utilise la formule trouvée à la question **2) d)**.

f) Le but de la question est le calcul de $a_{2n} = \dfrac{1}{(2n)!}\text{th}^{(2n)}(0)$.

$\hookrightarrow$ Penser à la parité de th. Quelle est la parité de ses dérivées successives ?

Corrigé

1) a) On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \text{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On peut alors écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}^2\,(x) - \text{sh}^2\,(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Il reste à développer les deux expressions et :

$$\text{ch}^2\,(x) - \text{sh}^2\,(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2\right),$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2\,(x) - \text{sh}^2\,(x) = 1.}$$

b) Les fonctions ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car elles sont des combinaisons linéaires de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Rapidement, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x) \text{ et } \mathrm{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x).$$

Résumons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.
Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. Donc $\mathrm{ch}(x) > 0$ et :

$$\boxed{\text{sh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

Puis $\mathrm{sh}(0) = 0$. Donc la quantité $\mathrm{sh}(x)$ est strictement négative si x est strictement négatif et strictement positive si x est strictement positif.
Ainsi, on en déduit le sens de variation de ch.

$$\boxed{\text{ch est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_- \text{ et strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Remarque

On peut voir rapidement que ch est paire et que sh est impaire car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x) \text{ et que } \mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x).$$

2) a) On pose maintenant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.
On sait que $\mathrm{ch}(x) > 0$ pour tout x réel et donc cette quantité ne s'annule jamais. Cela permet de conclure :

$$\boxed{\text{th est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

Puis, la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est le rapport de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La valeur de la dérivée n'est demandée qu'à la question suivante. Attendons donc un peu.

$$\boxed{\text{th est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Si x tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \sim \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$. Donc,

$$\boxed{\mathrm{th}(x) \text{ tend vers 1 quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

Si x tend vers $-\infty$, $\dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ tend vers $\dfrac{-1}{1} = -1$. Donc,

$$\boxed{\mathrm{th}(x) \text{ tend vers } -1 \text{ quand } x \text{ tend vers } -\infty.}$$

On résume : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1$.

Remarque

On a déjà remarqué que sh est impaire et ch est paire. Donc le rapport d'une fonction impaire par une fonction paire étant une fonction impaire, on peut en déduire que th est impaire. On retrouve le fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x)$ est logiquement l'opposée de la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x)$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\operatorname{th}'(x) = \left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)' = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}'(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)},$$

ce qui donne : $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} - \dfrac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$. On obtient bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x).}$$

Remarque

On a aussi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$, ce qui prouve que th est strictement croissante.

c) Pour vérifier que th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer que cette fonction est le rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{th est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

d) Exprimons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}^{(n+1)}(x)$ en fonction des dérivées successives $\operatorname{th}^{(k)}(x)$ pour k variant de 0 à n. Pour cela, on va utiliser la formule de Leibniz. Dérivons la relation de la question **2) b)**. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}''(x) = \left(1 - \operatorname{th}^2(x)\right)' = -\left(\operatorname{th}^2(x)\right)'.$$

On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, en dérivant $(n-1)$ fois cette égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}^{(n+1)}(x) = -\left(\operatorname{th}^2(x)\right)^{(n)} = -\left(\operatorname{th}(x).\operatorname{th}(x)\right)^{(n)}.$$

La fonction $x \mapsto \operatorname{th}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, pour tout entier n, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}^{(n+1)}(x) = -\left(\operatorname{th}^2(x)\right)^{(n)} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{th}^{(k)}(x)\operatorname{th}^{(n-k)}(x).}$$

e) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{\operatorname{th}^{(k)}(0)}{k!}$. On a alors par la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \frac{\operatorname{th}^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{(n+1)!} \operatorname{th}^{(k)}(0)\operatorname{th}^{(n-k)}(0).$$

Il reste à remarquer que : $\dfrac{\binom{n}{k}}{(n+1)!} = \dfrac{n!}{(n+1)!}.\dfrac{1}{k!}.\dfrac{1}{(n-k)!} = \dfrac{1}{n+1}.\dfrac{1}{k!}.\dfrac{1}{(n-k)!}$.

Ainsi : $\dfrac{\text{th}^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = -\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\text{th}^{(k)}(0)}{k!}\dfrac{\text{th}^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$. Et finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.}$$

f) th est impaire et toutes ses dérivées successives sont paires ou impaires selon le rang de la dérivée. Ainsi, $\text{th}^{(1)}$ est paire, $\text{th}^{(2)}$ est impaire, $\text{th}^{(3)}$ est paire, et de façon générale la fonction $\text{th}^{(2n+1)}$ est paire pour tout entier n et la fonction $\text{th}^{(2n)}$ est impaire pour tout entier n.
On en déduit que, la fonction $\text{th}^{(2n)}$ étant définie en 0,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \text{th}^{(2n)}(0) = 0.}$$

En effet, une fonction impaire définie en 0 s'annule en cette valeur. On en déduit :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que pour montrer qu'une fonction est dérivable, de classe $\mathcal{C}^1$ ou de classe $\mathcal{C}^\infty$, si elle est définie de façon explicite, il suffit souvent d'utiliser des théorèmes de transport de dérivabilité par combinaison linéaire, produit, rapport ou composée.

♡ Il faut se souvenir que si f est définie en 0 et est impaire alors $f(0) = 0$.
De plus, si f est dérivable alors f' est paire.

Formulaire

• *Formule de Leibniz*

Soit n un entier, si f et g sont des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors fg est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$$\forall t \in I,\ (fg)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

• *Formule de dérivation d'un rapport*

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I,\ \left(\frac{f}{g}\right)'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2}.$$

Énoncé

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que Φ, défini par :

$$\Phi(P)(X) = (X^2 + X)P(-1) + (X^2 - X)P(1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Écrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Déterminer le noyau et l'image de Φ.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du concours Centrale-Supélec (CCS) pour la filière TSI en 2016.
C'est un exercice classique d'algèbre linéaire. On part d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On détermine sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui permet d'étudier son noyau et son image.

1) Ici, on montre que Φ est linéaire puis que c'est un endomorphisme.

$\hookrightarrow$ Il ne faut pas oublier de préciser que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ, après avoir montré la linéarité.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Trop de candidats ne connaissent pas les définitions de base : application linéaire (entre autres).

2) Ici, on demande la matrice de Φ dans la base $(1, X, ..., X^n)$.
On rappelle qu'il faut calculer les images $\Phi(X^k)$ pour tout k entier de 0 à n en fonction de 1, X, ... , X^n.
Puis, on construit la matrice de Φ, colonne par colonne.

$\hookrightarrow$ On pourra distinguer le cas pair et le cas impair.

3) On veut déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$, c'est-à-dire ici trouver une base de chacun d'eux (et donc leur dimension).

$\hookrightarrow$ Ne pas se lancer directement dans la résolution d'un système. Aller au plus simple. Par exemple, pour trouver les polynômes P tels que $\Phi(P)(X) = 0$, on rappelle qu'un polynôme est nul si et seulement ses coefficients sont nuls. On peut aussi utiliser le théorème du rang pour guider un peu les recherches pour l'image. Bref, essayez d'éviter des calculs où vous risquez de vous perdre.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Les candidats ne sont, en majorité, pas très solides au niveau calculatoire et perdent beaucoup de temps.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Parmi les points non maîtrisés, savoir trouver rapidement une base de l'image pour une application linéaire en dimension finie.

Corrigé

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrons que Φ, défini par :

$$\Phi(P)(X) = (X^2 + X)P(-1) + (X^2 - X)P(1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrons la linéarité de Φ : soient $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, et $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\Phi(P + aQ) = (X^2 + X)(P + aQ)(-1) + (X^2 - X)(P + aQ)(1),$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(P + aQ) = (X^2 + X)(P(-1) + aQ(-1)) + (X^2 - X)(P(1) + aQ(1)),$$

et en développant :

$$\Phi(P+aQ) = (X^2+X)P(-1)+a(X^2+X)Q(-1)+(X^2-X)P(1)+a(X^2-X)Q(1).$$

Ceci donne bien : $\Phi(P + aQ) = \Phi(P) + a\Phi(Q)$.
Il reste à remarquer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré au plus 2 et comme $n \geqslant 2$, $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On peut conclure :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2) Écrivons la matrice $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$ de Φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour cela, on calcule $\Phi(X^k)$ pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$. On a déjà :

$$\Phi(1) = 2X^2,\ \Phi(X) = -2X,\ \Phi(X^2) = 2X^2.$$

Puis, on remarque, de façon générale, que si k est pair, la valeur de X^k pour $X = 1$ est 1 et pour $X = -1$ est aussi 1.
Donc, si k est pair : $\Phi(X^k) = (X^2 + X)(-1)^k + (X^2 - X)1^k = 2X^2$.
Puis, si k est impair, la valeur de X^k pour $X = 1$ est 1 et pour $X = -1$ est -1.
Donc, si k est impair : $\Phi(X^k) = (X^2 + X)(-1)^k + (X^2 - X)1^k = -2X$.
Il reste deux formes de matrice $M_{\mathcal{B}}(\Phi)$, selon que n est pair ou que n est impair.

$$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair, } M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Si n est impair, $M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3) *Déterminons le noyau de* Φ *:* $\operatorname{Ker}\Phi$

$P \in \operatorname{Ker}\Phi$ si et seulement si $\Phi(P)(X) = 0$. Or :

$$\Phi(P)(X) = 0 \Leftrightarrow (P(-1) - P(1))X + (P(-1) + P(1))X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(-1) - P(1) & = & 0 \\ P(-1) + P(1) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(-1) & = & P(1) \\ P(-1) & = & -P(1) \end{array} \right. .$$

Le dernier système est équivalent à écrire que $P(-1) = P(1) = 0$, donc que -1 et 1 sont des racines de P. Ce qui signifie que P est divisible par $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$. Il reste :

$$\boxed{\operatorname{Ker}\Phi = \{(X^2-1)Q,\ \text{ où } Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\} = \operatorname{Vect}\left((X^2-1)X^k,\ k \in [\![0, n-2]\!]\right).}$$

Déterminons l'image de Φ *:* $\operatorname{Im}\Phi$

Comme $\operatorname{Ker}\Phi = \operatorname{Vect}\left((X^2-1)X^k,\ k \in [\![0, n-2]\!]\right)$ et comme la famille

$$\left((X^2-1)X^k,\ k \in [\![0, n-2]\!]\right)$$

est libre car constituée de polynômes non nuls tous de degrés différents, elle est une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}\Phi$.
Ainsi : $\dim \operatorname{Ker}\Phi = n - 1$.
Il reste à appliquer le théorème du rang. On a :

$$\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \operatorname{Ker}\Phi + \dim \operatorname{Im}\Phi \Rightarrow \dim \operatorname{Im}\Phi = n + 1 - (n-1) = 2.$$

Comme pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Phi(P) \in \operatorname{Vect}(X, X^2)$ et comme $\operatorname{Vect}(X, X^2)$ a pour base (X, X^2), $\dim \operatorname{Vect}(X, X^2) = 2$. On écrit :

$$\operatorname{Im}\Phi \subset \operatorname{Vect}(X, X^2) \text{ et } \dim \operatorname{Im}\Phi = \dim \operatorname{Vect}(X, X^2) = 2,$$

et finalement :

$$\boxed{\operatorname{Im}\Phi = \operatorname{Vect}(X, X^2).}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre qu'une application est un endomorphisme de E. Elle doit être linéaire et aller de E dans E.

♡ Il faut se souvenir de la façon de construire la matrice d'un endomorphisme ϕ dans sa base canonique $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$. On l'écrit colonne par colonne, ces colonnes étant les coordonnées des vecteurs dans l'ordre $\phi(\vec{e}_1)$, ..., $\phi(\vec{e}_n)$, exprimés dans la base $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.

♡ Il faut se souvenir qu'une famille finie de polynômes non nuls tous de dégrés différents est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

♡ Il faut se souvenir que pour avoir la dimension de $\operatorname{Im}\phi$ en dimension finie, il suffit d'appliquer le théorème du rang si l'on connaît $\dim \operatorname{Ker}\phi$.

♡ Il faut se souvenir qu'un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.

♡ Il faut se souvenir que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ avec $n \geqslant 1$ admet $a \in \mathbb{K}$ pour racine alors il existe $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$.

Formulaire

• *Théorème du rang*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f une application linéaire de E dans F. On suppose de plus que E est de **dimension finie**. Alors :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Jour n^{o}5

Exercice 5.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1) On désire ici encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

d) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

2) On étudie ici la fonction f.

a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant x$.

c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.

d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3) On étudie ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$.

b) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 5.2 — MPSI-PCSI-PTSI

Un centre téléphonique a une liste de n contacts, chacun ayant une probabilité p d'être appelé et de répondre à l'appel. Au premier tour, on appelle les n contacts et au second tour seulement ceux qui n'ont pas répondu au premier tour. On note X et Y les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de personnes répondant à l'appel au premier et au second tour.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer, pour $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, $P_{(X=i)}(Y = k)$. En déduire la loi de Y.

3) Déterminer la loi de $X + Y$ et déterminer $E(X + Y)$ de deux manières.

Énoncé

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1) On désire ici encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

d) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

2) On étudie ici la fonction f.

a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant x$.

c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.

d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3) On étudie ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$.

b) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici du premier problème posé à l'écrit du Concours Commun INP (ex CCP) en 2016, filière TSI.
L'exercice est consacré à l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On y développe un certain nombre de mécanismes classiques permettant d'avoir les informations les plus importantes sur la suite, c'est-à-dire sa convergence, sa limite et même sa vitesse de convergence.
Citons l'extrait de rapport ci-dessous qui illustre bien ce que l'on va faire.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017, filière PC
>
> L'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ est rarement bien menée. Si l'autonomie n'est plus un attendu, il est important de pouvoir suivre les indications de l'énoncé ou de l'examinateur s'il s'agit de l'oral. Par ailleurs, rares sont ceux qui envisagent l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis lors de cette étude (méthode pourtant mise en avant dans le programme).

1) Dans cette première question, on encadre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le but est de montrer que la suite (u_n) est à valeurs dans $[0,1]$, ce qui sera utile pour la suite de l'exercice.

a) On demande de vérifier une simple égalité.

$\hookrightarrow$ La preuve est immédiate. Ce qui est intéressant c'est plutôt de savoir à quoi sert cette égalité ?

b) On prouve ici que la suite (u_n) existe bien.

$\hookrightarrow$ C'est fondamental pour une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. On part de u_0 et on calcule, de proche en proche, u_1, u_2, etc. Et que fait-on si une de ces valeurs sort de l'ensemble de définition de f ?

c) On montre que $[0,1]$ est stable par f.

$\hookrightarrow$ On s'approche du résultat énoncé plus haut.
On peut utiliser le résultat de la question **1) a)**.

d) On montre ici le but de la question : $u_n \in [0,1]$ pour tout n.

$\hookrightarrow$ La recherche d'un intervalle stable pour une suite, c'est-à-dire si $u_0 \in I$ alors $u_n \in I$ pour tout n, est fondamental pour l'étude de la convergence.

2) On propose ici d'étudier plus précisément la fonction f et on en profite pour terminer par une majoration de $|f'(x)|$ pour $x \in [0,1]$, qui sera utile dans la suite.

a) Ici, on calcule f', indispensable pour la suite des événements.

$\hookrightarrow$ Ne pas bâcler la justification du fait que f est dérivable.

b) On veut comparer f et Id sur $[0,1]$.

$\hookrightarrow$ On pourrait poser $g(x) = f(x) - x$ et étudier son signe en dérivant mais il y a plus simple.

c) On passe au tracé du graphe de f.

$\hookrightarrow$ On commence bien entendu par le tableau de variation. Pour faire un graphe correct, n'oubliez pas de déterminer les pentes des tangentes aux extrémités de la courbe. On pourra aussi tracer le segment de droite $y = x$ avec $x \in [0,1]$ pour « visualiser » le résultat de la question **2) b)**.

d) On demande maintenant la majoration de $|f'|$ sur $[0,1]$.

$\hookrightarrow$ On pourra raisonner par équivalences en élevant au carré $|f'(x)|$.

3) C'est dans cette question qu'on va déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) On détermine une inégalité qui relie les quantités $|1-u_{n+1}|$ et $|1-u_n|$. À ce niveau, juste avant de commencer, on peut se poser la question suivante :
si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite l, quelles sont les valeurs possibles de l ?

$\hookrightarrow$ On utilise le résultat de la question **2) d)** et l'attendue inégalité des accroissements finis.

b) On désire une inégalité entre $|1-u_n|$ et $|1-u_0|$.

$\hookrightarrow$ Cette inégalité permet d'avoir deux informations à la fois : la valeur de la limite et la vitesse de convergence.

c) On conclut maintenant à propos de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\hookrightarrow$ C'est l'aboutissement de tout ce qui précède.

Corrigé

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x$. Et donc, on a bien :

$$\boxed{x^2 - x + 1 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}.}$$

b) On introduit $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$. En utilisant la question précedente, on remarque que $x^2 - x + 1$ est supérieur ou égal à $3/4$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}.}$$

On considère maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0, 1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

Comme le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, $u_1 = f(u_0)$ existe. Supposons que u_n existe pour n donné. Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. On peut conclure :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini.}}$$

c) Si $x \in [0, 1]$, alors $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ et donc $x^2 - x + 1 \in [0, 1]$.
On peut conclure.

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0, 1],\ f(x) \in [0, 1].}$$

d) Comme $u_0 \in]0, 1[$, $u_0 \in [0, 1]$.
Puis en utilisant la question précédente, $u_1 = f(u_0) \in [0, 1]$. Supposons $u_n \in [0, 1]$.
Alors : $f(u_n) = u_{n+1} \in [0, 1]$, d'après encore la question précédente.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1].}$$

2) a) On étudie ici la fonction f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = \sqrt{v(x)}$, où v est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est à valeurs strictement positives (et en particulier ne s'annule pas) et $\sqrt{\ }$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}.}$$

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, écrivons les équivalences (les membres étant positifs) :

$$f(x) \geqslant x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geqslant x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \geqslant x^2 \Leftrightarrow 1 \geqslant x.$$

Comme $1 \geqslant x$ est une proposition vraie, il en est de même de $f(x) \geqslant x$.

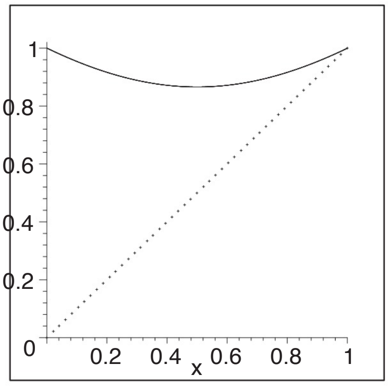
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, 1],\ f(x) \geqslant x.}$$

Remarque

On aurait pu poser $g(x) = f(x) - x$ et étudier le signe de g sur $[0, 1]$ en dérivant g, mais cette dérivée est un peu technique.

c) Représentons alors la courbe de f sur $[0, 1]$. Comme $2x - 1$ change de signe en $x = 1/2$, une étude rapide du signe de $f'(x)$ permet de dire que f décroît sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

et croît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Puis, $f(0) = f(1) = 1$ et $f(1/2) = \sqrt{3}/2$.
Enfin, $f'(0) = -1/2$ et $f'(1) = 1/2$, donc la courbe représentative de f possède une tangente de pente $-1/2$ en $(0,1)$, une tangente horizontale en $(1/2, \sqrt{3}/2)$ et une tangente de pente $1/2$ en $(1,1)$.



On trace aussi $y = x$ sur $[0,1]$ pour illustrer l'inégalité de la question **2) b)**.
d) Soit $x \in [0,1]$. On a les équivalences :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left|\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{(2x-1)^2}{4(x^2-x+1)} \leqslant \frac{1}{3}.$$

(Car toutes les quantités sont positives.) On en déduit :

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3(4x^2-4x+1) \leqslant 4(x^2-x+1) \Leftrightarrow 8x^2-8x-1 \leqslant 0.$$

Étudions le signe de $\phi(x) = 8x^2 - 8x - 1$. On a : $\phi'(x) = 16x - 8$, qui s'annule pour $x = 1/2$. Ainsi, ϕ décroît sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croît sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ avec $\phi(0) = -1$, $\phi(1/2) < 0$ et $\phi(1) = -1$. ϕ est à valeurs négatives sur $[0,1]$ et on a bien le résultat.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

3) a) *Remarque*
On commence par remarquer que $f(1) = 1$ et $x = 1$ est la seule valeur qui vérifie $f(x) = x$ sur $[0,1]$. Or, on sait que si $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe dans $\mathbb{R}$, comme f est continue, on a $f(l) = l$. Ainsi 1 sr la seule limite possible.
D'où l'intérêt de s'intéresser à $|1 - u_n|$ dans la suite de l'exercice.
Reprenons le fil du sujet.
Rappelons le corollaire de l'inégalité des accroissements finis, si f est une fonction dérivable sur un intervalle I non trivial (ici $I = [a,b]$) et s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant k$, (ici on peut prendre $k = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$), alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)||b-a|.$$

On applique avec $b = 1$ et $a = u_n$. On a alors $f(1) = 1$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.
Puis : $\sup\limits_{t\in[u_n,1]} |f'(t)| \leqslant \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On en déduit bien le résultat :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |1-u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_n|\,.}$$

b) On applique l'inégalité précédente pour $n = 1$ et $n = 2$:

$$|1-u_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_0| \text{ et } |1-u_2| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_1|\,.$$

Ce qui implique : $|1-u_2| \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 |1-u_0|\,.$

Considérons donc la proposition $\mathcal{P}_n$: $|1-u_n| \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|\,.$

Les propositions $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.

Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ soit vraie pour n entier naturel non nul. Alors, en appliquant aussi l'inégalité de la question **3) a)** pour l'entier n,

$$|1-u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1-u_{n-1}| \text{ et } |1-u_{n-1}| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} |1-u_0|\,.$$

Ce qui implique bien la proposition $\mathcal{P}_n$:

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |1-u_n| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |1-u_0|\,.}$$

Le résultat est montré par récurrence.

c) On peut en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = 0$ et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que l'équivalence $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$ n'est vraie que si a et b sont supposés au départ positifs.

Formulaire

• *Corollaire de l'inégalité des accroissements finis*

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I non trivial et s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant k$, alors :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ |f(y)-f(x)| \leqslant k|y-x|.$$

Énoncé

Un centre téléphonique a une liste de n contacts, chacun ayant une probabilité p d'être appelé et de répondre à l'appel. Au premier tour, on appelle les n contacts et au second tour seulement ceux qui n'ont pas répondu au premier tour. On note X et Y les variables aléatoires représentant respectivement le nombre de personnes répondant à l'appel au premier et au second tour.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer, pour $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, $P_{(X=i)}(Y=k)$. En déduire la loi de Y.

3) Déterminer la loi de $X+Y$ et déterminer $E(X+Y)$ de deux manières.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun Mines-Ponts pour la filière PC en 2016. Il tourne autour des lois de probabilité usuelles, des probabilités conditionnelles et des sommes de variables aléatoires.

1) On commence par déterminer la loi de X.

$\hookrightarrow$ Même si cela vous semble immédiat et intuitif, soyez rigoureux et imaginez que vous soyez à l'oral et qu'un examinateur vous demande de justifier ce que vous dites. Ici, on pourra calculer la probabilité de l'événement $(X=k)$ par des dénombrements. Illustrons par quelques extraits de rapport de jury qui peuvent vous guider dans cette question mais aussi dans les deux suivantes.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Parmi les erreurs courantes relevées : quand on demande la loi d'une variable aléatoire X, le premier point à préciser est l'ensemble des valeurs prises par cette loi, noté $X(\Omega)$. Très peu de candidats pensent à le préciser.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Il est indispensable de savoir réaliser des dénombrements simples. Les listes, arrangements, permutations, combinaisons doivent être reconnus directement.
> Dans de nombreuses situations, souvent élémentaires, l'équiprobabilité doit être citée et utiliser un dénombrement simple est la façon la plus efficace de calculer une probabilité.

2) Dans cette question, on demande de calculer une probabilité conditionnelle et ensuite d'en déduire la loi de Y, c'est-à-dire les valeurs $P(Y=k)$, pour tout $k \in Y(\Omega)$.

$\hookrightarrow$ Pour le calcul de $P_{(X=i)}(Y=k)$, on procède comme en **1)** en commençant par déterminer l'ensemble des couples (i,k) pour lesquels cette probabilité n'est pas nulle et en faisant ensuite un dénombrement. Pour la loi de Y, il faut penser à la formule des probabilités totales. Un dernier coup de pouce : on fera apparaître la formule du binôme de Newton, ce qui permettra des simplifications.

> Rapport du jury Mines Telecom 2017
>
> Le cours de probabilités, avec une mention particulière pour la formule des probabilités totales a parfois fait l'objet d'une impasse pure et simple.

3) On demande la loi de $X+Y$ et son espérance, de deux manières.

$\hookrightarrow$ On commence par déterminer $(X+Y)(\Omega)$, puis on écrit pour tout $j \in (X+Y)(\Omega)$, la probabilité $P(X+Y=j)$ sous la forme d'une somme. On utilise alors les résultats des questions **1)** et **2)**. Comme on doit calculer $E(X+Y)$ de deux manières, l'intuition nous fait dire que $X+Y$ doit suivre une loi connue (il n'y en a pas beaucoup au programme en première année), ce qui peut guider dans la simplification de la somme $P(X+Y=j)$.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Il est vivement conseillé, quand on demande l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire X de regarder d'abord si X ne suit pas une loi connue dont on connaîtrait l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance. Gain de temps assuré ! À condition bien sûr de connaître parfaitement les espérances et les variances des lois au programme.

Corrigé

1) Reprenons le processus aléatoire fourni par l'énoncé :
un centre téléphonique a une liste de n contacts, chacun ayant une probabilité p d'être appelé et de répondre à l'appel. On note X et Y les variables aléatoires représentant le nombre de personnes répondant à l'appel au premier et au second tour respectivement. À chaque tour, on appelle les contacts qui n'ont pas répondu au tour précédent. Si une personne répond à un tour, on ne la contacte plus.
Ainsi, $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Dans le cas de X, l'événement $[X=k]$, où $k \in [\![0,n]\!]$, signifie que k personnes répondent à l'appel parmi n, il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour ces k personnes et pour k personnes fixées qui ont répondu, $n-k$ n'ont pas répondu et la probabilité d'une telle figure est $p^k q^{n-k}$, en posant $q = 1-p$. On a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Finalement :

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n,p).}$$

2) • Déterminons, pour $(i,k) \in \mathbb{N}^2$, $P_{(X=i)}(Y=k)$.
D'après le processus aléatoire de l'énoncé, n personnes au maximum sont contactées au total, pour tous les tours possibles et une personne contactée dans un tour n'est plus contactée au tour suivant donc $P_{(X=i)}(Y=k) = 0$ sauf si l'on a $i \in [\![0,n]\!]$ et si l'on a $k \in [\![0,n-i]\!]$.
Supposons donc maintenant $i \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,n-i]\!]$.
Alors si i personnes ont répondu au départ, avoir $(Y=k)$ signifie que l'on contacte réellement k personnes au second tour sachant que i personnes ont déjà été contactées et ont répondu (donc ont été sorties du circuit) au premier tour. Donc on doit choisir k contacts qui vont être appelés au second tour parmi $n-i$ contacts restants à appeler, soit $\binom{n-i}{k}$ choix possibles et ce choix étant fait, la probabilité d'appeler k contacts donnés qui répondent est $p^k q^{n-i-k}$, avec $q = 1-p$.
On peut dire que la loi conditionnelle de Y sachant $(X=i)$ est la loi $\mathcal{B}(n-i,p)$.

Finalement, on résume par :

$$\boxed{\forall (i,k)\in\mathbb{N}^2,\ P_{(X=i)}(Y=k)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad (i,k)\notin [\![0,n]\!]\times[\![0,n-i]\!]\\ \dbinom{n-i}{k}p^kq^{n-i-k} & \text{si}\quad (i,k)\in [\![0,n]\!]\times[\![0,n-i]\!]\end{cases}}$$

• Déterminons la loi de Y. On sait que $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
Pour tout k fixé dans $[\![0,n]\!]$,

$$P(Y=k)=\sum_{i=0}^{n-k}P(X=i,Y=k)=\sum_{i=0}^{n-k}P_{(X=i)}(Y=k)P(X=i),$$

et donc, en utilisant les résultats précédents,

$$\begin{aligned}&P(Y=k)\\&=\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-i}{k}p^kq^{n-i-k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\\&=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(n-i)!}{k!(n-i-k)!}\frac{n!}{i!(n-i)!}p^{k+i}q^{2n-2i-k},\end{aligned}$$

ce qui donne en simplifiant et en mettant en facteur ce qui ne dépend pas de i,

$$P(Y=k)=\frac{n!}{k!}\frac{p^k}{q^k}q^{2n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1!}{i!(n-k-i)!}\left(\frac{p}{q^2}\right)^i.$$

Puis, on retrouve des coefficients binomiaux avant et dans la somme en introduisant la factorielle $(n-k)!$:

$$\begin{aligned}&P(Y=k)\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{p^k}{q^k}q^{2n}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!}\left(\frac{p}{q^2}\right)^i\\&=\binom{n}{k}\frac{p^k}{q^k}q^{2n}\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-k}{i}\left(\frac{p}{q^2}\right)^i1^{n-k-i},\end{aligned}$$

en faisant aussi apparaître la formule du binôme de Newton avec $1^{n-k-i}=1$.
On a : $\left(\dfrac{p}{q^2}+1\right)^{n-k}=\dfrac{1}{q^{2n-2k}}\left(p+q^2\right)^{n-k}$.
Il reste : $P(Y=k)=\dbinom{n}{k}\dfrac{p^k}{q^k}q^{2n}\dfrac{1}{q^{2n-2k}}\left(p+q^2\right)^{n-k}=\dbinom{n}{k}(pq)^k\left(p+q^2\right)^{n-k}$.
Or, $pq+q^2+p=p(1-p)+(1-p)^2+p=1$ et donc $q^2+p=1-pq$. Ainsi,

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}(pq)^k\left(1-pq\right)^{n-k}.$$

On peut conclure.

$$\boxed{Y\text{ suit la loi binomiale }\mathcal{B}(n,pq).}$$

3) On commence par remarquer que $(X+Y)(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Puis pour tout $j \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X+Y=j) = \sum_{i=0}^{j} P(X=i, Y=j-i) = \sum_{i=0}^{j} P_{(X=i)}(Y=j-i)P(X=i),$$

ce qui donne, en utilisant ce qui précède,

$$\begin{aligned}
&P(X+Y=j)\\
&= \sum_{i=0}^{j} \binom{n-i}{j-i} p^{j-i} q^{n-i-(j-i)} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{j} \frac{(n-i)!}{(j-i)!(n-i-j+i)!} p^{j-i} q^{n-i-(j-i)} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i q^{n-i},
\end{aligned}$$

puis en arrangeant dans la somme et en mettant en facteur ce qui ne dépend pas de l'entier i, $P(X+Y=j)$ devient :

$$\sum_{i=0}^{j} \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} p^j q^{2n-j-i} = \frac{n!}{(n-j)!} p^j q^{2n-j} \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{i!(j-i)!} \left(\frac{1}{q}\right)^i.$$

Il reste à retrouver des coefficients binomiaux, toujours dans l'idée d'appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
&P(X+Y=j)\\
&= \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j q^{2n-j} \sum_{i=0}^{j} \frac{j!}{i!(j-i)!} \left(\frac{1}{q}\right)^i\\
&= \binom{n}{j} \left(\frac{p}{q}\right)^j q^{2n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left(\frac{1}{q}\right)^i 1^{j-i}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&P(X+Y=j)\\
&= \binom{n}{j} \left(\frac{p}{q}\right)^j q^{2n} \left(1+\frac{1}{q}\right)^j\\
&= \binom{n}{j} p^j (q+1)^j q^{2(n-j)} = \binom{n}{j} (p(q+1))^j \left(q^2\right)^{n-j}.
\end{aligned}$$

On remarque que : $p(q+1) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$.
Et donc : $P(X+Y=j) = \binom{n}{j} (1-q^2)^j \left(q^2\right)^{n-j}$. On peut conclure.

$$\boxed{X+Y \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n, 1-q^2).}$$

Pour calculer $E(X+Y)$, on peut utiliser directement le fait que l'espérance d'une v.a.r qui suit une loi binomiale est le produit de ses deux paramètres, ce qui donne :

$$\boxed{E(X+Y) = n(1-q^2) = np(2-p).}$$

On peut aussi utiliser $E(X+Y) = E(X)+E(Y) = np+npq = np(1+q) = np(2-p)$ car X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y suit la loi $\mathcal{B}(n, pq)$.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine la loi d'une variable aléatoire réelle X. On commence par trouver $X(\Omega)$, ce qui permet de rechercher ensuite toutes les valeurs $P(X = x_k)$, avec $x_k \in X(\Omega)$. Puis, soit on remarque que X suit une loi connue (si par exemple $X(\Omega) = \{0, 1\}$, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X = 1)$), soit on donne toutes les valeurs $P(X = x_k)$ et on peut essayer de vérifier à la fin que $\sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = 1$, histoire de savoir si c'est cohérent.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Quand on demande la loi d'une variable aléatoire X, le premier point à préciser est l'ensemble des valeurs prises par cette loi, noté $X(\Omega)$. Très peu de candidats pensent à le préciser.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détecte que la loi de X est une loi binomiale. On commence par remarquer que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$, où n est un entier à déterminer. Puis on s'intéresse à la probabilité de l'événement $(X = k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. On peut remarquer que $(X = k)$ correspond à k succès dans une succession de n essais identiques et indépendants (ce qui peut se schématiser par la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes), chaque succès ayant une probabilité p.
Alors $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, le facteur $\binom{n}{k}$ venant du fait que l'on ne connaît pas l'emplaçement des k succès parmi les n essais.
Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine la loi d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes. (X, Y) étant un couple de variables aléatoires discrètes sur Ω :
1) Il faut commencer par établir la loi conjointe et les lois marginales. Dans le cas infini, il ne sera plus possible de rassembler les résultats dans un tableau ;
2) Leur éventuelle indépendance sera vérifiée par :
$$\forall\,(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega),\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y),$$
ou par l'indépendance, $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, de $(X = x)$ et $(Y = y)$.
3) On peut avoir à chercher la loi conditionnelle de X sachant que $(Y = y)$ (ou le contraire).

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine la loi de la somme de variables aléatoires réelles $X + Y$. Pour étudier $X + Y$, où X et Y sont deux variables aléatoires réelles définis sur Ω, on calcule $P(X + Y = k)$ « à la main » pour $k \in (X + Y)(\Omega)$. On part de la formule :

$$P(X + Y = k) = \sum_{j \in X(\Omega)} P((X = j) \cap (Y = k - j)).$$

Dans le cas très fréquent, où X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$P(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} P((X = j) \cap (Y = k - j)).$$

Si les variables aléatoires réelles dont on fait la somme, sont indépendantes : $P(X+Y=k) = \sum_{j \in X(\Omega)} P(X=j) \times P(Y=k-j)$.

Et si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, $P(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j) \times P(Y=k-j)$.

Formulaire

• *Formule du binôme de Newton*

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a,\, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

• *Espérance d'une variable aléatoire réelle finie*

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, P), telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$. Alors l'espérance de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Pour tout couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes finies définies sur (Ω, P),

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

• *Loi binomiale*

Ici $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ avec $n \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$.
On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres** n et p si et seulement si :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ où } q = 1-p.$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

• *Formule des probabilités totales*

Soit I un ensemble fini et un système complet d'événements $(A_n)_{n \in I}$, alors on a, pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{n \in I} P(B \cap A_n) = \sum_{n \in I} P_{A_n}(B)\, P(A_n).$$

Jour n^{o}6

Exercice 6.1 MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Soit f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si} \quad x \in I \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 1$.

1) On étudie ici la fonction f.

a) Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.

b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

c) Montrer que f est strictement monotone sur I.
Indication : on posera $\phi(x) = e^{-x}(x^2+3x+1) - (1+2x)$ pour tout $x > -1$ et on étudiera les variations de ϕ.

2) Résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.
Indication : on pourra décomposer $\dfrac{1+3x+x^2}{x(x+1)}$ sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x} + \dfrac{\gamma}{x+1}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3) On cherche à déterminer une solution de (E) sur $I =]-1, +\infty[$.
Soit y une telle solution.

a) Donner les expressions vérifiées par y sur I_1 et sur I_2.

b) Déterminer, en utilisant la continuité de y en 0, les valeurs des constantes d'intégration dans les expressions de y obtenues à la question précédente.
Vérifier que f est l'unique solution de (E) sur I.

Exercice 6.2 MPSI-PCSI

1) Montrer que : $\Phi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Trouver l'orthogonal de l'espace vectoriel F engendré par X^2+1 et X^2-X-1.

3) Déterminer le projeté orthogonal de X sur F.

Énoncé

Soit f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si} \quad x \in I \setminus \{0\} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 1$.

1) On étudie ici la fonction f.

a) Montrer que la fonction f est continue et dérivable en 0.

b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

c) Montrer que f est strictement monotone sur I.
Indication : on posera $\phi(x) = e^{-x}(x^2+3x+1) - (1+2x)$ pour tout $x > -1$ et on étudiera les variations de ϕ.

2) Résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.
Indication : on pourra décomposer $\dfrac{1+3x+x^2}{x(x+1)}$ sous la forme $\alpha + \dfrac{\beta}{x} + \dfrac{\gamma}{x+1}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

3) On cherche à déterminer une solution de (E) sur $I =]-1, +\infty[$.
Soit y une telle solution.

a) Donner les expressions vérifiées par y sur I_1 et sur I_2.

b) Déterminer, en utilisant la continuité de y en 0, les valeurs des constantes d'intégration dans les expressions de y obtenues à la question précédente.
Vérifier que f est l'unique solution de (E) sur I.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'une partie d'un problème posé à l'écrit du Concours Commun INP (ex CCP) en filière TPC en 2017. Encore une fois, peu importe la filière. Cet exercice est tout à fait légitime pour les autres filières. Plus précisément, on étudie ici une fonction f sur un certain intervalle I, en particulier on détermine sa monotonie puis on résout une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre (à coefficients non constants). On fait enfin le lien avec f quand on découvre que f est non seulement une solution de (E) mais l'unique solution sur I.

1) Ici, comme annoncé, on commence par l'étude de f, c'est-à-dire ici essentiellement ses variations. On va s'appuyer, comme nous allons le voir, sur des manipulations de développements limités usuels. Mais à faire soigneusement.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Une bonne connaissance des développements limités usuels est incontournable, ce qui ne dispense pas de savoir les retrouver. Par ailleurs, de nombreux étudiants confondent développements limités et équivalents.
> La connaissance des développements limités usuels n'est pas bonne.
> Pour trop d'étudiants, les erreurs de signe ou de coefficients qui sont dans les développements limités sont habituelles.

a) Avant de pouvoir dériver f, il faut justifier la dérivabilité de f.

$\hookrightarrow$ En effet, f est définie par son expression pour $x \in I \setminus \{0\}$ et pour $x = 0$. Il s'agit de commencer à vérifier que ce raccordement est continu puis qu'il est dérivable. Vous pouvez aller chercher l'outil des développements limités car on « travaille » dans un voisinage de 0.

b) On veut montrer maintenant que le raccordement est de classe $\mathcal{C}^1$.

$\hookrightarrow$ On pourra utiliser un théorème classique du cours sur le raccordement de classe $\mathcal{C}^1$ en un point.

c) On étudie la monotonie de f sur I.

$\hookrightarrow$ On utilise bien entendu le signe de la dérivée de f. Pour cela, on remarque que f' s'exprime en fonction de ϕ, proposée dans l'indication.

2) On résout ici (E) sur deux intervalles I_1 et I_2. On remarque que $x(x+1)$ ne s'annule pas sur chacun des deux intervalles. On commence par l'indication. C'est une décomposition en éléments simples. La forme à trouver est donnée car dans toutes les filières (hors MPSI), vous devez être guidé. Maintenant, si vous arrivez de MPSI, auriez-vous trouvé la forme tout seul ? L'idée est ensuite d'utiliser cette décomposition car il va s'agir d'intégrer à un moment donné cette fraction rationnelle.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> (Extrait plutôt pour les MPSI-MP). À propos des équations différentielles, rappelons par exemple que pour intégrer une fraction rationnelle, il est souhaitable de penser à la décomposer en éléments simples.

$\hookrightarrow$ Pour tout le monde, cette question est un moyen de réviser la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre un.
On commence par la résolution de l'équation homogène puis on peut tenter la méthode de variation de la constante si aucune solution particulière évidente ne vient en tête.
Citons pour l'occasion un rapport de jury assez pertinent qui tourne autour des équations différentielles linéaires.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> La pratique sur les équations différentielles linéaires du premier et du second ordre est en général convenable, mais il n'est pas toujours possible d'avoir un énoncé clair et précis des théorèmes du programme sur ce paragraphe. On rencontre cependant des étudiants désirant à tout prix utiliser une équation caractéristique, même si l'équation étudiée n'est pas à coefficients constants. Le recours à l'exponentielle ou les méthodes de variations de constantes ne sont pas toujours dominés. Pourtant cela peut permettre d'expliciter les solutions et permet d'analyser des propriétés qualitatives des solutions.

3) On cherche maintenant une solution de (E) sur I. L'idée est de raccorder les solutions sur I_1 et sur I_2. Tout le problème est que le raccordement doit être dérivable en 0 qui est la valeur ajoutée quand on passe de $I_1 \cup I_2$ à I.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Parmi les points non maîtrisés, on note que les problèmes de raccords des solutions sont survolés et non compris parfois.

a) On commence par expliciter une solution y de (E) sur I en précisant sa forme sur I_1 et sur I_2.

$\hookrightarrow$ Attention, les constantes d'intégration sur I_1 et sur I_2 n'ont aucune raison d'être égales.

b) Il s'agit ici de « raccorder » autour de 0. On va en déduire des contraintes sur les deux constantes d'intégration de la question **3) a)**.

$\hookrightarrow$ Comme l'unique solution est f, inutile de prouver que la solution est dérivable en 0, on le sait déjà !

Corrigé

1) a) On note $I =]-1, +\infty[$ et soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{x(1+x)} & \text{si} \quad x \in I \setminus \{0\} \\ \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Continuité de f en 0

On remarque que l'expression qui fournit $f(x)$ pour x non nul, prend une forme indéterminée quand x tend vers 0. Pour lever cette forme indéterminée, effectuons un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0. Pour cela, on commence à écrire celui de e^u et celui de $\dfrac{1}{1+u}$, à l'ordre 2 (l'ordre 1 suffirait pour la continuité mais autant s'avancer pour la suite, c'est-à-dire la dérivabilité) quand u tend vers 0 :

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2), \ \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2).$$

On a ici pour $x \in I \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x(1+x)} = \frac{1}{x} \times \left(1 - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \times \frac{1}{1+x},$$

soit :

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right),$$

ce qui donne, en développant et en ne gardant que les termes de degré au plus 2 dans le développement,

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \left(x - \frac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2)\right) = 1 - \frac{3}{2}x + o(x).$$

On a : $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 1 = f(0)$ et on peut conclure :

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0 \text{ avec } f(0) = 1.}$$

Dérivabilité de f en 0

f est dérivable en 0 si et seulement si la quantité $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie quand x tend vers 0. Dans ce cas, cette valeur finie est $f'(0)$. On utilise le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 trouvé précédemment, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$.

On a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1-\dfrac{3}{2}x+o(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{3}{2}+o(1)$ car $f(0)=1$.
Il reste : $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\dfrac{3}{2} = f'(0)$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{3}{2}.}$$

b) Pour montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on utilise le théorème de prolongement par classe $\mathcal{C}^1$. Il suffit de vérifier d'abord que f est continue sur I : f est continue sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ (par stabilité) et en 0, d'après **1) a)**.
Puis il faut vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\setminus\{0\}$ et que $\lim\limits_{x\mapsto 0} f'(x) = f'(0)$.
On commence par écrire que $x\mapsto 1-e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $I\setminus\{0\}$ et que $x\mapsto x(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $I\setminus\{0\}$ puis que le rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\setminus\{0\}$(dont le dénominateur ne s'annule pas sur $I\setminus\{0\}$) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\setminus\{0\}$.
Il reste à calculer $f'(x)$ pour $x\in I\setminus\{0\}$. On a :

$$\forall x\in I\setminus\{0\},\ f'(x) = \frac{e^{-x}(x+x^2)-(1-e^{-x})(1+2x)}{(x^2+x)^2} = \frac{e^{-x}(1+3x+x^2)-1-2x}{x^2(x+1)^2}.$$

On remarque que les fonctions $x\mapsto e^{-x}(1+3x+x^2)-1-2x$ et $x\mapsto x^2(x+1)^2$ sont continues sur $I\setminus\{0\}$ et la deuxième fonction ne s'annulant pas sur $I\setminus\{0\}$, leur rapport est continue sur $I\setminus\{0\}$. On retrouve au passage le fait que f' est continue sur $I\setminus\{0\}$. On fait tendre x vers 0, la quantité $f'(x)$ prend une forme indéterminée et un recours à un développement limité (l'ordre 2 est nécessaire à cause du x^2 au dénominateur) est bienvenu. Au voisinage de $x=0$, la quantité $f'(x)$ vaut :

$$\frac{\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)(1+3x+x^2)-1-2x}{x^2(x+1)^2}$$
$$= \frac{-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2(1+x)^2}.$$
$$= \frac{-\frac{3}{2}+o(1)}{(1+x)^2},$$

quantité qui tend vers $-3/2$ quand x tend vers 0.
On a bien : $\lim\limits_{x\mapsto 0} f'(x) = f'(0)$. On peut conclure :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I.}$$

c) On veut montrer que f est strictement monotone sur I. Pour cela, on pose $\phi(x) = e^{-x}(x^2+3x+1)-(1+2x)$ pour tout $x>-1$ et on étudie les variations de ϕ. La fonction ϕ est dérivable sur I car elle est issue de sommes et de produit de fonctions dérivables sur I. On a :

$$\forall x\in I,\ \phi'(x) = e^{-x}(2x+3)-e^{-x}(x^2+3x+1)-2 = e^{-x}(-x^2-x+2)-2.$$

On peut redériver cette fonction, toujours car elle est somme d'une constante et d'un produit de fonctions dérivables sur I.

$$\forall x \in I,\ \phi''(x) = e^{-x}(-2x-1) - e^{-x}(-x^2-x+2) = e^{-x}(x^2-x-3).$$

$x^2 - x - 3$ est un polynôme du second degré de racines $(1 \pm \sqrt{13})/2$ et on remarque que $\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} < -1 < \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Ainsi, la quantité $\phi''(x)$ est négative si $x \in \left]-1, \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right[$, et elle est positive si $x \in \left]\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$. Donc, la fonction ϕ' est décroissante sur $\left]-1, \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$, et est croissante sur $\left]\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$. On remarque que :

$$\phi'(-1) = 2(e-1),\ \phi'(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \phi'(x) = -2.$$

Donc la quantité $\phi'(x)$ est positive si $x \in \left]-1, 0\right]$, et est négative si $x \in \left]0, +\infty\right[$. On en déduit que ϕ est croissante sur $\left]-1, 0\right]$, et est décroissante sur $\left]0, +\infty\right[$. Comme $\phi(0) = 0$, on peut enfin dire que la quantité $\phi(x)$ est négative si $x \in \left]-1, 0\right]$, et est toujours négative si $x \in \left]0, +\infty\right[$.
On peut repasser à la dérivée de la fonction f :

$$\forall x \in I \setminus \{0\},\ f'(x) = \frac{\phi(x)}{x^2(x+1)^2}.$$

Le numérateur $\phi(x)$ de $f'(x)$ est négatif.
Puis, son dénominateur $x^2(1+x)^2$ est toujours positif.
On en déduit que la quantité $f'(x)$ est négative sur I (par rapport d'un négatif sur un positif). Donc :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } I.}$$

2) On considère l'équation différentielle : $(E)\ \ x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 1$.
On veut résoudre (E) sur $I_1 =]-1, 0[$ et sur $I_2 =]0, +\infty[$.
<u>*Résolution de l'indication*</u>
On propose de décomposer $\dfrac{1+3x+x^2}{x(x+1)}$ sous la forme :

$$\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1},\ \text{où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

Commençons par supposer cette égalité. On pose :

$$(1)\ F(x) = \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1},$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ est un couple à déterminer.
Si un tel triplet existe, multiplions par x de chaque côté de l'égalité précédente (1),

$$xF(x) = \frac{1+3x+x^2}{x+1} = x\alpha + \beta + \frac{\gamma x}{x+1},$$

et en prenant $x = 0$, on obtient : $1 = \beta$.
De même, on multiplie par $x+1$ de chaque côté de l'égalité (1).

$$(x+1)F(x) = \frac{1+3x+x^2}{x} = (x+1)\alpha + \frac{(x+1)\beta}{x} + \gamma,$$

et en prenant $x = -1$, on obtient : $1 = \gamma$.
Il reste à remarquer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et donc $\alpha = 1$ car :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\gamma}{x+1} = 0.$$

Ainsi (1) devient :

$$(2)\ \ \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

On peut vérifier réciproquement que si l'on met maintenant le second membre sous le même dénominateur, (2) est vraie.

Résolution de l'équation homogène associée à (E)

Il reste à résoudre (E) maintenant. Avant d'appliquer la méthode de variation de la constante, on commence par résoudre l'équation homogène associée :

$$(E_H)\ \ x(x+1)y'(x) + (1+3x+x^2)y(x) = 0.$$

Pour cela, un petit rappel s'impose.
Si (E_H) $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, où a et b sont continues et a ne s'annule pas sur une partie J de $\mathbb{R}$ alors si G est une primitive de $\frac{b}{a}$ sur J, l'ensemble des solutions de (E_H) sur J est constitué des fonctions du type $x \mapsto K\exp\left(-G(x)\right)$, où K est une constante réelle. Ici $J = I_1$ ou $J = I_2$ et, en utilisant (2) :

$$\forall x \in I,\ \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1+3x+x^2}{x(x+1)} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}.$$

Vous venez de comprendre où l'indication est utile. Il reste à intégrer sur $I_1 \cup I_2$ et :

$$\forall x \in I,\ G(x) = x + \ln|x| + \ln|x+1| = x + \ln|x(x+1)|.$$

Ainsi sur $I_1 =]-1, 0[$, $G(x) = x + \ln(-x(x+1))$ et l'ensemble des solutions de (E_H) est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$y_H : x \mapsto K\exp\left(-x - \ln(-x(x+1))\right) = \frac{K}{-x(x+1)}e^{-x},$$

où K est un réel.
Sur $I_2 =]0, +\infty[$, $G(x) = x + \ln(x(x+1))$ et l'ensemble des solutions de (E_H) est l'ensemble des fonctions $y_H : x \mapsto K\exp\left(-x - \ln(x(x+1))\right) = \dfrac{K}{x(x+1)}e^{-x}$, où K est un réel.
On remarque qu'en prenant $-K$ à la place de K, on en déduit que les deux ensembles de solutions correspondent aux mêmes expressions mais sur deux intervalles distincts.

Résolution de l'équation complète (E)

Il reste donc à résoudre l'équation complète. Pour cela, on va appliquer la méthode de variation de la constante.

Supposons $x \in I_1$ et posons $y(x) = \dfrac{K(x)}{x(x+1)}e^{-x}$.
Et déterminons une condition sur K pour que y soit une solution de (E).
Si $y_H(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}e^{-x}$, on remarque que y_H vérifie (E_H) et que $y(x) = K(x)y_H(x)$.
Puis, pour tout $x \in I_1$, on a : $y'(x) = K'(x)y_H(x) + K(x)y'_H(x)$.
Avec les notations $a(x) = x(x+1)$ et $b(x) = 1+3x+x^2$, $a(x)y'(x)+b(x)y(x)$ s'écrit :

$$a(x)\left(K'(x)y_H(x) + K(x)y'_H(x)\right) + b(x)K(x)y_H(x).$$

Comme $a(x)y'_H(x) + b(x)y_H(x) = 0$, on a :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = a(x)K'(x)y_H(x) = 1.$$

Il reste pour tout $x \in I_1$: $K'(x) = \dfrac{1}{a(x)y_H(x)} = \dfrac{1}{e^{-x}} = e^x$.
On intègre et : $K(x) = e^x + L$, où L est une constante d'intégration. Comme nous recherchons une solution particulière y_p, prenons $L = 0$. Il reste :

$$y_p(x) = \frac{K(x)}{x(x+1)}e^{-x} = \frac{e^x}{x(x+1)}e^{-x} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Il reste à ajouter y_p à une solution quelconque y_H de l'équation homogène associée et l'on a toutes les solutions de (E) sur I_1 et sur I_2. On peut écrire :

$$\boxed{y_1 :]-1,0[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x(x+1)} + \frac{K_1}{x(x+1)}e^{-x},\ \text{où } K_1 \in \mathbb{R}.}$$

On peut faire un raisonnement identique si $x \in I_2$:

$$\boxed{y_2 :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x(x+1)} + \frac{K_2}{x(x+1)}e^{-x},\ \text{où } K_2 \in \mathbb{R}.}$$

3) a) Une telle solution doit correspondre sur l'ensemble $I_1 \cup I_2$ à la forme trouvée à la question **2)**, c'est-à-dire :

$$\boxed{y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{K_1}{x(x+1)}e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\[2ex] \dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{K_2}{x(x+1)}e^{-x} & \text{si} \quad x \in]0,+\infty[\end{cases},\ \text{où } (K_1,K_2) \in \mathbb{R}^2.}$$

b) Si y est une solution sur $]-1,+\infty[$, nécessairement y est continue en 0 et

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = y(0).$$

Nous allons utiliser encore une fois un développement limité de e^{-x} au voisinage de 0 qui est unique, que l'on soit à gauche ou à droite de 0. On a, pour $x \in]-1,0[$,

$$y(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{K_1}{x(x+1)}e^{-x} = \frac{1}{x(x+1)}\left(1 + K_1\left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\right).$$

Cela donne : $y(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}\left(1 + K_1 - K_1x + \dfrac{K_1}{2}x^2 + o(x^2)\right)$.
Pour que cette quantité ait une limite finie quand x tend vers 0, alors nécessairement

$1+K_1 = 0$ et donc $K_1 = -1$. On retrouve la fonction f qui est donc l'unique solution. Et l'on a bien : $\lim_{x \to 0^-} y(x)$ est finie car sa valeur est $f(0) = 1$. Ce raisonnement peut être fait pour tout $x \in]0, +\infty[$ en remplaçant K_1 par K_2, et on obtient $K_2 = -1$. On retrouve la fonction f.
Il faudrait montrer que la solution unique y trouvée sur $]-1, +\infty[$ est dérivable en 0, mais ce n'est pas nécessaire car étant donné qu'il s'agit de f, on sait que f est dérivable et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]-1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'unique solution de } (E) \text{ sur }]-1, +\infty[\text{ est } f.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que si r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$) sont les racines de $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors $ax^2 + bx + c > 0$ si $x \in]-\infty, r_1[\cup]r_2, +\infty[$ et $ax^2 + bx + c < 0$ si $x \in]r_1, r_2[$.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on résout une équation différentielle linéaire du premier ordre avec la **méthode de variation de la constante**.
On pose (E) : $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ sur I.
Étape 1. On résout d'abord l'équation homogène associée (E_H). On notera y_H une solution particulière non nulle de l'équation (E_H) que l'on choisit. Cette solution peut s'écrire $y_H(t) = \exp(-G(t))$.
Étape 2. On cherche les solutions y de (E) sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)y_H(t)$ où λ est une fonction de $\mathcal{C}^1(I)$ en identifiant cette forme de y dans (E). On trouvera une égalité du type $\lambda'(t) = k(t)$, où k est une fonction continue sur I, que l'on intégrera, ce qui donne : $\lambda(t) = K(t) + L$, où $L \in \mathbb{R}$ et K est une primitive de k.
Étape 3. Et alors en posant $y_p(t) = K(t)y_H(t)$, l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S}_E(I) = \{I \to \mathbb{R} : t \mapsto L\exp(-G(t)) + y_p(t),\ L \in \mathbb{R}\}$.
On reconnaît au passage que $K(t)y_H(t)$ est une solution particulière de (E).

Formulaire

• *Développements limités de fonctions usuelles, au voisinage de* 0, *à l'ordre* n

$\triangleright$ $\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^k}{k!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\triangleright$ $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^k x^k + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$

• *Théorème de prolongement de fonction de classe* $\mathcal{C}^1$
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
On considère f une fonction définie et continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.
On suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim_{t \to a} f'(t) = l$.
Alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et telle que l'on ait l'égalité :

$$f'(a) = l.$$

Énoncé

1) Montrer que : $\Phi(P,Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Trouver l'orthogonal de l'espace vectoriel F engendré par X^2+1 et X^2-X-1.

3) Déterminer le projeté orthogonal de X sur F.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun INP (ex CCP), en filière TSI en 2016. Attention, cette partie du programme (espaces euclidiens et projeté orthogonal) n'est vue en première année que dans les filières MPSI et PCSI. En TSI, cette partie n'est faite qu'en deuxième année. C'est pourquoi nous ne proposons pas cet exercice à un élève qui fait (ou vient de faire) une TSI1. Ceci dit, les filières MP, PC, PT et PSI revoient encore ce chapitre en deuxième année. Il est donc incontournable dans vos révisions. De plus, cet exercice développe les problématiques les plus classiques de cette partie du cours. Il suffit de connaître son cours et les méthodes classiques que cet exercice permet de revoir.

1) Au démarrage, on vous propose de vérifier que l'application Φ de $(\mathbb{R}_2[X])^2$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire.

$\hookrightarrow$ C'est l'occasion de voir ou de revoir ce qu'est un produit scalaire.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Trop de candidats ne connaissent pas les définitions de base : norme, produit scalaire...

2) Il s'agit ici de déterminer l'orthogonal (pour le produit scalaire Φ) d'un sous-espace vectoriel engendré par deux polynômes libres.

$\hookrightarrow$ Que du classique. Il faut quand même connaître la technique. Pour déterminer les polynômes $P \in F^\perp$, ($F^\perp$ est l'orthogonal de $\mathrm{Vect}\left((Q_1,Q_2)\right)$, où (Q_1,Q_2) est libre), il suffit de remarquer que : $P \in F^\perp \Leftrightarrow \Phi(P,Q_1) = \Phi(P,Q_2) = 0$..

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> On peut relever un manque de technique pour trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F. Rappelons qu'une technique efficace en dimension finie reste de trouver une base de F et de traduire que $x \in F^\perp \Leftrightarrow x$ est orthogonal à chaque vecteur de la base de F.

3) On termine par le calcul du projeté orthogonal de X sur F.

$\hookrightarrow$ Deux pistes possibles s'offrent à vous.
La première piste est d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (X^2+1, X^2-X-1) de F puis d'utiliser la formule qui donne directement la projection orthogonale de X sur F, connaissant une de ses bases orthonormales.
La deuxième piste est de remarquer que si P est la projection orthogonale de X sur F alors P est une combinaison linéaire de X^2+1 et de X^2-X-1, ce qui donne deux coefficients et $X-P$ est dans $F^\perp$, c'est-à-dire est colinéaire à un vecteur non nul qui

constitue une base de $F^{\perp}$, ce qui donne un troisième coefficient. Il s'agit de trouver ces coefficients.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Le théorème d'orthonormalisation de Schmidt pose toujours des problèmes à certains étudiants.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Ne pas oublier que si p est la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_n)$ alors la formule $p(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ n'est valable que si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de F. Ainsi, une mauvaise maîtrise de l'expression d'une projection orthogonale rend difficile le calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel donné.

Corrigé

1) Il faut montrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

Symétrie

Pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$,

$$\langle P,\, Q \rangle = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$$

et

$$\langle Q,\, P \rangle = Q(0)P(0) + Q'(0)P'(0) + Q''(0)P''(0).$$

Ce sont les mêmes quantités. On a bien : $\langle P,\, Q \rangle = \langle Q,\, P \rangle$.

Bilinéarité

Pour tout $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}_2[X])^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle P,\, Q + \alpha R \rangle$

$$\begin{aligned}
&= P(0)(Q(0) + \alpha R(0)) + P'(0)(Q'(0) + \alpha R'(0)) + P''(0)(Q''(0) + \alpha R''(0)) \\
&= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0) \\
&+ \alpha \left(P(0)R(0) + P'(0)R'(0) + P''(0)R''(0)\right) \\
&= \langle P,\, Q \rangle + \alpha \langle P,\, R \rangle.
\end{aligned}$$

Forme définie et positive

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a déjà l'inégalité :

$$\langle P,\, P \rangle = P(0)^2 + P'(0)^2 + P''(0)^2 \geqslant 0.$$

La forme $\langle\, ,\, \rangle$ est bien positive. Puis :

$$\langle P,\, P \rangle = 0 \Rightarrow P(0)^2 = P'(0)^2 = P''(0)^2 = 0.$$

Cela implique que 0 est racine au moins triple de P, polynôme de degré au plus 2. Et P est nul car si 0 est racine au moins double, $P = aX^2$ et alors $P'' = 2a$, comme $P''(0) = 0$, alors $a = 0$ et $P = 0$. La forme $\langle\, ,\, \rangle$ est définie.

On peut conclure :

$$\boxed{\Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_2[X].}$$

2) La famille (X^2+1, X^2-X-1) est libre (pourquoi ?) et est donc une base de F. Pour déterminer les polynômes $P \in F^\perp$, ($F^\perp$ est l'orthogonal de Vect $((X^2+1, X^2-X-1))$), il suffit de remarquer que : $P \in F^\perp \Leftrightarrow \Phi(P, X^2+1) = \Phi(P, X^2-X-1) = 0$.

Or, $\Phi(P, X^2+1) = P(0) \times 1 + P'(0) \times 0 + P''(0) \times 2 = P(0) + 2P''(0)$.
Et de même, $\Phi(P, X^2-X-1) = P(0) \times (-1) + P'(0) \times (-1) + P''(0) \times 2$, soit :

$$\Phi(P, X^2-X-1) = -P(0) - P'(0) + 2P''(0).$$

Ainsi : $P \in F^\perp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P(0) + 2P''(0) & = & 0 \\ -P(0) - P'(0) + 2P''(0) & = & 0 \end{array} \right.$.

En retranchant les deux lignes du dernier système, $P'(0) = -2P(0)$ et donc :

$$P \in F^\perp \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} P''(0) & = & -\frac{1}{2}P(0) \\ P'(0) & = & -2P(0) \end{array} \right. .$$

Pour conclure, on peut appliquer la formule de Taylor pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{2} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

En prenant ici $a = 0$ alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{1}{2}P''(0)X^2.$$

Si l'on applique cette égalité à $P \in F^\perp$,

$$P(X) = P(0) - 2P(0)X - \frac{1}{4}P(0)X^2 = P(0)\left[1 - 2X - \frac{1}{4}X^2\right].$$

Comme $P(0)$ est un réel quelconque, on peut en déduire que :

$$\boxed{F^\perp = \text{Vect}\left(1 - 2X - \frac{1}{4}X^2\right).}$$

3) <u>*Première piste. Utiliser le procédé d'orthonormalisation à la base de F*</u>
L'idée est d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (X^2+1, X^2-X-1) de F puis d'appliquer la formule qui donne directement la projection orthogonale de X sur F, connaissant une de ses bases orthonormales.
On commence par chercher V_1 et V_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_1 & = & X^2+1 \\ V_2 & = & X^2 - X - 1 + a(X^2+1) \end{array} \right. .$$

C'est-à-dire : $\left\{ \begin{array}{rcl} V_1 & = & X^2+1 \\ V_2 & = & (a+1)X^2 - X - 1 + a \end{array} \right.$.

Par ailleurs : $\left\{ \begin{array}{rcl} V_1' & = & 2X \\ V_2' & = & 2(a+1)X - 1 \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{rcl} V_1'' & = & 2 \\ V_2'' & = & 2(a+1) \end{array} \right.$

Donc : $\Phi(V_1, V_2) = 0 \Leftrightarrow -1 + a + 0 + 2(2+2a) = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{5}$.

On pose alors : $\left\{ \begin{array}{rcl} V_1 & = & X^2+1 \\ V_2 & = & \frac{2}{5}X^2 - X - \frac{8}{5} \end{array} \right.$.

La famille (V_1, V_2) est une base orthogonale de F. Il reste à orthonormaliser.

Et : $\Phi(V_1,V_1)=1+0+4=5$, $\Phi(V_2,V_2)=\left(-\dfrac{8}{5}\right)^2+(-1)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{105}{25}=\dfrac{21}{5}$.

Alors, posons $W_1=\sqrt{\dfrac{1}{5}}V_1$ et $W_2=\sqrt{\dfrac{5}{21}}V_2$.
La famille (W_1,W_2) est une famille orthonormale de F. On applique enfin :

$$P=\Phi(W_1,X)W_1+\Phi(W_2,X)W_2,$$

où P est le projeté orthogonal de X sur F.

On a rapidement : $\Phi(W_1,X)=0$ et $\Phi(W_2,X)=-\sqrt{\dfrac{5}{21}}$.

Il reste : $P=-\sqrt{\dfrac{5}{21}}W_2=-\sqrt{\dfrac{5}{21}}\sqrt{\dfrac{5}{21}}V_2=-\dfrac{5}{21}V_2$. On conclut.

$$\boxed{P=-\frac{5}{21}\left(\frac{2}{5}X^2-X-\frac{8}{5}\right)=-\frac{2}{21}X^2+\frac{5}{21}X+\frac{8}{21}.}$$

Deuxième piste. Utiliser $F^{\perp}$

L'idée est de remarquer que si P est le projeté orthogonal de X sur F alors P est une combinaison linéaire de X^2+1 et de X^2-X-1 et $X-P$ est dans $F^{\perp}$, c'est-à-dire est colinéaire à $1-2X-\dfrac{1}{4}X^2$.
Il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que la projection P cherchée s'écrive $a(X^2+1)+b(X^2-X-1)$.
Il existe aussi $c\in\mathbb{R}$ tel que : $X-P=c\left(1-2X-\dfrac{1}{4}X^2\right)$. Cela se traduit par :

$$X-a(X^2+1)-b(X^2-X-1)=c\left(1-2X-\frac{1}{4}X^2\right).$$

En arrangeant selon les degrés des monômes, on a :

$$\left(-a-b+\frac{c}{4}\right)X^2+(1+b+2c)X-a+b-c=0.$$

Un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.
Cela donne le système : $\left\{\begin{array}{rcl} -a-b+\dfrac{c}{4} & = & 0 \\ b+2c & = & -1 \\ -a+b-c & = & 0 \end{array}\right.$.
Il reste, après calculs : $c=\dfrac{-8}{21}$, $a=\dfrac{1}{7}$ et $b=\dfrac{-5}{21}$. On peut conclure.

$$\boxed{P=\frac{1}{7}\left(X^2+1\right)-\frac{5}{21}\left(X^2-X-1\right)=\frac{-2}{21}X^2+\frac{5}{21}X+\frac{8}{21}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie F dans E, espace euclidien ou préhilbertien, muni du produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$. On prend un vecteur $\vec{X}$ quelconque de E et on exprime le fait que si $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_p)$ est une base de F, alors $\langle\vec{X},\,\vec{e}_i\rangle=0$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

♡ Il faut se souvenir que pour déterminer une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel F, en partant d'une base de ce sous-espace vectoriel, on utilise le procédé de Gram-Schmidt.

(i) Si F a pour base $(\vec{u}_1,\, \vec{u}_2)$, on pose $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ et $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + a\vec{v}_1$, où $a \in \mathbb{R}$ est tel que $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0$. Ceci permet de déterminer a. On obtient alors une base orthogonale de F puis on divise chacun des vecteurs trouvés par leur norme. Et : $\left(\dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|},\, \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}\right)$ est une base orthonormale de F.

(ii) Si F a pour base $(\vec{u}_1,\, \vec{u}_2,\, \vec{u}_3)$, on pose $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ puis $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + a\vec{v}_1$ puis $\vec{v}_3 = \vec{u}_3 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = \vec{v}_1.\vec{v}_3 = \vec{v}_2.\vec{v}_3 = 0$. Ces conditions permettent le calcul de a, b et c. On obtient alors une base orthogonale de F puis on divise chacun des vecteurs trouvés par leur norme. Et : $\left(\dfrac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|},\, \dfrac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|},\, \dfrac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}\right)$ est une base orthonormale de F.

Formulaire

• *Formule de Taylor pour les polynômes*

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Alors : $P = P(\alpha) + \dfrac{P'(\alpha)}{1!}(X-\alpha) + ... + \dfrac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X-\alpha)^n$.

• *Définition d'un produit scalaire*

Une application $\langle\, ,\, \rangle : E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'on a à la fois les quatre assertions :

(i) $\langle\, ,\, \rangle$ est bilinéaire, c'est-à-dire : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w}) \in E^3$,

$$\langle a\vec{u} + b\vec{v},\, \vec{w}\rangle = a\langle \vec{u},\, \vec{w}\rangle + b\langle \vec{v},\, \vec{w}\rangle,$$
$$\langle \vec{w},\, a\vec{u} + b\vec{v}\rangle = a\langle \vec{w},\, \vec{u}\rangle + b\langle \vec{w},\, \vec{v}\rangle\,;$$

(ii) $\forall\, (\vec{u},\, \vec{v}) \in E^2,\ \langle \vec{v},\, \vec{u}\rangle = \langle \vec{u},\, \vec{v}\rangle$;

(iii) $\forall\, \vec{u} \in E,\ \langle \vec{u},\, \vec{u}\rangle \geqslant 0$;

(iv) $\forall\, \vec{u} \in E,\ \left[\langle \vec{u},\, \vec{u}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}\right]$.

• *Orthogonal d'un sous-espace vectoriel F*

Si F est un sous-espace vectoriel de E, espace vectoriel euclidien ou préhilbertien associé au produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$, l'orthogonal de F, que l'on note $F^\perp$, est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que pour tout $\vec{v} \in F$, on ait : $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$.
On montre que cet ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, si l'on connaît une base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_l)$ de F, un vecteur $\vec{u}$ appartient à $F^\perp$ si et seulement si l'on a les égalités, pour tout i entier de 1 à l : $\langle \vec{u},\, \vec{v}_i\rangle = 0$.

• *Projeté orthogonal sur le sous-espace vectoriel F*

Soit $(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_p)$ une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel F de E espace euclidien ou un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ alors le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur F est : $p(\vec{u}) = \langle \vec{w}_1, \vec{u}\rangle \vec{w}_1 + ... + \langle \vec{w}_p, \vec{u}\rangle \vec{w}_p$.

Jour n^{o}7

Exercice 7.1 MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, un nombre réel $q \geqslant 0$ et un nombre réel α tels que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{n^q} = \alpha$.

1) Établir que pour tout $l \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $\displaystyle\int_{l-1}^{l} x^q\,dx \leqslant l^q \leqslant \int_{l}^{l+1} x^q\,dx$.

2) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} l^q$.

3) Montrer alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=1}^{n-1} l^q = \frac{1}{q+1}$.

4) On considère ici une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = 0$.

Indication : si n_0 et $\epsilon > 0$ sont tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|v_n| \leqslant \epsilon$, on pourra utiliser une majoration très simple de $\left|\displaystyle\sum_{l=n_0}^{n-1} v_l l^q\right|$ faisant intervenir $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} l^q$.

5) En faisant la synthèse de **3)** et de **4)**, montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^{q+1}} = \frac{\alpha}{q+1}$.

Exercice 7.2 MPSI-PCSI-PTSI-1TSI

On considère $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.

2) Déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ et déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in i\,\mathbb{R}$.

3) Trouver une relation entre les modules de $f(z) - 1$ et de $z + 2$, puis trouver une relation entre les arguments de ces deux expressions.

4) On note C l'ensemble des points du plan situés à une distance au plus de $R > 0$ de A d'affixe -2. Déterminer l'image de C par f.

Énoncé

On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, un nombre réel $q \geqslant 0$ et un nombre réel α tels que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{n^q} = \alpha$.

1) Établir que pour tout $l \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $\displaystyle\int_{l-1}^{l} x^q\,dx \leqslant l^q \leqslant \int_{l}^{l+1} x^q\,dx$.

2) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} l^q$.

3) Montrer alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=1}^{n-1} l^q = \frac{1}{q+1}$.

4) On considère ici une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = 0$.

Indication : si n_0 et $\epsilon > 0$ sont tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|v_n| \leqslant \epsilon$, on pourra utiliser une majoration très simple de $\left|\displaystyle\sum_{l=n_0}^{n-1} v_l l^q\right|$ faisant intervenir $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} l^q$.

5) En faisant la synthèse de **3)** et de **4)**, montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^{q+1}} = \frac{\alpha}{q+1}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'une partie d'une épreuve écrite posée à la banque d'épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistiques (BECEAS) en 2016 en filière MP. Il s'agit plus particulièrement de l'épreuve optionnelle de Mathématiques. Cet exercice tourne autour de la définition de la limite d'une suite. Plus précisément, à partir d'un équivalent de $u_{n+1} - u_n$, on aboutit à un équivalent de u_n. On y retrouve le même type de développement que pour montrer le théorème de Césaro (si la suite (u_n) tend vers l alors la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ tend aussi vers l.) Vous pouvez d'ailleurs, si vous vous en sentez le courage, démontrer (ou remontrer si vous l'avez déjà vu) ce résultat avant ou après avoir fait cet exercice.

Pour en revenir à l'exercice proposé, il s'agit de bien suivre les questions, de connaître son cours sur la définition d'une limite (la place de ϵ et du rang N) et être rigoureux dans son développement. C'est un bon entraînement en particulier pour l'écrit des concours. Donnons des extraits de rapport de jury qui montrent toute la difficulté à coucher sur le papier un bon raisonnement.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Rappelons que le raisonnement le plus fréquent en Mathématiques est le raisonnement déductif. Les candidats abusent toujours du raisonnement par équivalence sans prendre les précautions parfois nécessaires.

Rapport du jury Navale 2016

Un problème se pose dans l'analyse de l'énoncé du sujet : attention à ne pas se concentrer sur les hypothèses proposées en oubliant ce qu'il faut montrer ni à se focaliser sur ce qu'il faut montrer (ce qui part d'un bon sentiment) mais en oubliant les hypothèses. Dans le premier cas, on ne sait pas où il faut aller ; dans le second cas, on ne sait pas comment ; enfin, dans les deux cas, on est bloqué...

Rapport du jury Navale 2016

Presque tous les candidats continuent à introduire les hypothèses de la plupart des théorèmes par ce pénible et gras **il faut**. Or ceci n'est pas seulement une maladresse de langage (est-ce une contraction de « il faut vérifier que » ?), c'est une faute lourde de logique ! Ceux qui ne la commettent pas font clairement la différence !

1) On commence par montrer une double inégalité incluant des intégrales.

$\hookrightarrow$ Inutile d'intégrer.

Partir de l'encadrement de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pour une fonction f croissante.

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017

D'une manière générale, les candidats sont rapidement démunis pour effectuer des majorations, minorations ou encadrement de certaines fonctions ou aussi d'intégrales.

2) On désire encadrer $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} l^q$.

$\hookrightarrow$ On utilise évidemment la question **1)**. Là, vous avez le droit d'intégrer.

3) On veut montrer une égalité avec une limite.

$\hookrightarrow$ On prend la double inégalité de la question **2)** et on multiplie de chaque côté par ce qu'il faut.

4) On veut montrer qu'une limite est nulle. C'est la question la plus difficile de l'exercice.

$\hookrightarrow$ On suit l'indication. On se fixe $\epsilon > 0$ fixé et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, il existe n_0 entier non nul tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| \leqslant \epsilon$. La suite de l'indication nous dirige sur le découpage de la somme $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q$ en deux sommes : $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = \sum_{l=1}^{n_0-1} v_l l^q + \sum_{l=n_0}^{n-1} v_l l^q$.
On peut utiliser la classique inégalité triangulaire plusieurs fois pour la première somme et on majore la seconde somme en majorant $|v_l|$ par ϵ car $l \geqslant n_0$. À vous de continuer.

5) On utilise les résultats des questions **3)** et **4)** pour en déduire la limite de $\dfrac{u_n}{n^{q+1}}$. C'est seulement dans cette question que l'on utilise l'hypothèse de départ, c'est-à-dire le fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-u_n}{n^q} = \alpha$.

$\hookrightarrow$ Il suffit de choisir $v_n = \dfrac{u_{n+1}-u_n}{n^q} - \alpha$ qui est le terme général d'une suite qui tend vers 0.

Corrigé

1) On utilise le résultat suivant pour f croissante et intégrable sur $[a,b]$.

$$(b-a)f(a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)f(b).$$

Ici, l'on prend $f(x) = x^q$, où $q \geqslant 0$ fixé et donc cette fonction f est clairement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire que f est croissante sur $[l-1,l]$ et sur $[l,l+1]$ pour tout $l \in [\![1,n-1]\!]$, donc :

$$\boxed{\text{pour tout } l \in [\![1,n-1]\!],\ \int_{l-1}^{l} x^q\,dx \leqslant l^q \leqslant \int_l^{l+1} x^q\,dx.}$$

2) Pour tout $n \geqslant 2$ et pour tout $l \in [\![1,n-1]\!]$,

$$\int_{l-1}^{l} x^q\,dx \leqslant l^q \leqslant \int_l^{l+1} x^q\,dx.$$

On somme pour l variant de 1 à $n-1$:

$$\sum_{l=1}^{n-1}\int_{l-1}^{l} x^q\,dx \leqslant \sum_{l=1}^{n-1} l^q \leqslant \sum_{l=1}^{n-1}\int_l^{l+1} x^q\,dx.$$

Cela donne :

$$\int_0^{n-1} x^q\,dx \leqslant \sum_{l=1}^{n-1} l^q \leqslant \int_1^n x^q\,dx.$$

Il reste à intégrer :

$$\left[\frac{x^{q+1}}{q+1}\right]_0^{n-1} \leqslant \sum_{l=1}^{n-1} l^q \leqslant \left[\frac{x^{q+1}}{q+1}\right]_1^n,$$

c'est-à-dire (on remarque que $0^{q+1} = 0$) :

$$\boxed{\frac{(n-1)^{q+1}}{q+1} \leqslant \sum_{l=1}^{n-1} l^q \leqslant \frac{n^{q+1}}{q+1} - \frac{1}{q+1}.}$$

3) On reprend la double inégalité précédente et on multiplie par $\dfrac{1}{n^{q+1}}$ de chaque côté,

$$\frac{1}{n^{q+1}} \times \frac{(n-1)^{q+1}}{q+1} \leqslant \frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=1}^{n-1} l^q \leqslant \frac{1}{n^{q+1}} \times \frac{n^{q+1}}{q+1} - \frac{1}{n^{q+1}} \times \frac{1}{q+1}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche de la nouvelle double inégalité a pour équivalent :

$$\frac{1}{n^{q+1}} \times \frac{(n-1)^{q+1}}{q+1} \sim \frac{n^{q+1}}{n^{q+1}(q+1)} = \frac{1}{q+1}.$$

Quant au membre de droite de la nouvelle inégalité, il vaut :

$$\frac{1}{n^{q+1}} \times \frac{n^{q+1}}{q+1} - \frac{1}{n^{q+1}} \times \frac{1}{q+1} = \frac{1}{q+1} - \frac{1}{n^{q+1}(q+1)},$$

et il tend vers $\dfrac{1}{q+1}$, quand n tend vers $+\infty$.
En utilisant le théorème des Gendarmes, on peut conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=1}^{n-1} l^q = \frac{1}{q+1}.}$$

4) On considère ici une suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On veut montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^{q+1}} \displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = 0$.
Pour cela, on donne dans l'énoncé une indication : si n_0 et $\epsilon > 0$ sont tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $|v_n| \leqslant \epsilon$, on pourra utiliser une majoration très simple de $\left|\displaystyle\sum_{l=n_0}^{n-1} v_l l^q\right|$ faisant intervenir $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} l^q$.
On se donne donc $\epsilon > 0$ fixé et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, il existe n_0 entier non nul (que l'on a le droit de prendre supérieur ou égal à 2 pour ne pas avoir de souci pour les bornes des indices des sommes qui vont suivre) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| \leqslant \epsilon$.
La suite de l'indication nous dirige sur le découpage de la somme $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q$ en deux sommes :

$$\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = \sum_{l=1}^{n_0-1} v_l l^q + \sum_{l=n_0}^{n-1} v_l l^q.$$

On peut utiliser la classique inégalité triangulaire plusieurs fois,

$$\left|\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q\right| \leqslant \left|\sum_{l=1}^{n_0-1} v_l l^q\right| + \sum_{l=n_0}^{n-1} |v_l|\, l^q,$$

en remarquant que l^q est positif.
Puis sur la dernière somme, on majore $|v_l|$ par ϵ car $l \geqslant n_0$. On a :

$$\left|\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q\right| \leqslant \left|\sum_{l=1}^{n_0-1} v_l l^q\right| + \epsilon \sum_{l=n_0}^{n-1} l^q.$$

On multiplie cette dernière inégalité de chaque côté par $\dfrac{1}{n^{q+1}}$:

$$\frac{1}{n^{q+1}}\left|\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q\right| \leqslant \frac{1}{n^{q+1}}\left|\sum_{l=1}^{n_0-1} v_l l^q\right| + \epsilon \times \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=n_0}^{n-1} l^q.$$

La quantité $\left|\sum_{l=1}^{n_0-1} v_l l^q\right|$ est constante quand on fait tendre n (supérieur à n_0) vers $+\infty$ et donc la quantité $\frac{1}{n^{q+1}}\left|\sum_{l=1}^{n_0-1} v_l l^q\right|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on peut la majorer par ϵ à partir de n supérieur à d'un certain rang $n_1 \geqslant n_0$.
La quantité $\frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=n_0}^{n-1} l^q$ tend vers $\frac{1}{q+1}$ quand n tend vers $+\infty$. En effet,

$$\frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=n_0}^{n-1} l^q = \frac{1}{n^{q+1}}\left(\sum_{l=1}^{n-1} l^q - \sum_{l=1}^{n_0-1} l^q\right),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=n_0}^{n-1} l^q = \frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=1}^{n-1} l^q - \frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=1}^{n_0-1} l^q.$$

Le premier terme du membre de droite de l'égalité précédente tend vers $\frac{1}{q+1}$ quand n tend vers $+\infty$, d'après la question **3)**, et le deuxième terme du membre de droite de l'égalité précédente tend vers 0 quand n tend vers$+\infty$. En effet, la quantité $\sum_{l=1}^{n_0-1} l^q$ est constante quand n tend vers $+\infty$.
On peut en déduire qu'il existe n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$:

$$\left|\frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=n_0}^{n-1} l^q\right| \leqslant 2.$$

(Car une suite qui tend vers $1/(q+1)$ avec $q \geqslant 0$, est inférieure à 2 en valeur absolue à partir d'un certain rang.) Finalement,

$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1, n_2),\ \frac{1}{n^{q+1}}\left|\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q\right| \leqslant \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

On a bien prouvé que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{q+1}}\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = 0.}$$

5) On considère maintenant une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, un nombre réel $q \geqslant 0$ et un nombre réel α tels que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{n^q} = \alpha$.
En faisant la synthèse de **3)** et de **4)**, on veut montrer : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^{q+1}} = \frac{\alpha}{q+1}$.
Posons pour tout n entier non nul, $v_n = \frac{u_{n+1}-u_n}{n^q} - \alpha$.
D'après l'hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. On peut appliquer le résultat de la question **4)**.

$$\forall l \in [\![1, n-1]\!],\ v_l = \frac{u_{l+1} - u_l}{l^q} - \alpha \Rightarrow \forall l \in [\![1, n-1]\!],\ v_l l^q = u_{l+1} - u_l - \alpha l^q.$$

En sommant, on a : (1) $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = \sum_{l=1}^{n-1} (u_{l+1} - u_l) - \alpha \sum_{l=1}^{n-1} l^q$.

On remarque que $\displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} (u_{l+1} - u_l) = u_n - u_1$ et en multipliant par $\dfrac{1}{n^{q+1}}$ de chaque côté dans (1), on obtient :

$$(2)\ \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=1}^{n-1} v_l l^q = \frac{u_n - u_1}{n^{q+1}} - \alpha \frac{1}{n^{q+1}} \sum_{l=1}^{n-1} l^q.$$

Le premier membre de (2) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'après **4)**.

Puis, d'après la question **3)**, la quantité $\alpha \displaystyle\sum_{l=1}^{n-1} l^q$ issue du second membre de (2), tend vers $\dfrac{\alpha}{q+1}$. Enfin, la première partie du second membre de (2) s'écrit :

$$\frac{u_n - u_1}{n^{q+1}} = \frac{u_n}{n^{q+1}} - \frac{u_1}{n^{q+1}},$$

puis, comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_1}{n^{q+1}} = 0$, il reste :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n^{q+1}} = \frac{\alpha}{q+1}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'encadrement pour f croissante et intégrable sur $[a, b]$:

$$(b-a)f(a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant (b-a)f(b).$$

On a une double inégalité analogue si f est décroissante.

Formulaire

• *Limite finie d'une suite*

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Alors u converge vers l si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait : $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

• *Théorème d'encadrement ou des Gendarmes*

Soient u, v et w trois suites réelles, $l \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si u et w convergent vers l et si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ alors la suite v est convergente elle aussi et sa limite est l.

Énoncé

On considère $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.

2) Déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ et déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in i\,\mathbb{R}$.

3) Trouver une relation entre les modules de $f(z) - 1$ et de $z + 2$, puis trouver une relation entre les arguments de ces deux expressions.

4) On note C l'ensemble des points du plan situés à une distance au plus de $R > 0$ de A d'affixe -2. Déterminer l'image de C par f.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Banque PT en 2016.
C'est l'étude d'une fonction à variable complexe et à valeurs complexes. Cette partie du programme est moins utilisée que d'autres dans les concours mais tombe quand même de temps en temps. Donc il faut s'y préparer.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Les questions portant sur les complexes ont révélé une absence de connaissance sur cette partie du programme et ont été clivantes en ce qui concerne l'appréciation des prestations. Ne pas comprendre le terme « affixe » dans un énoncé ou ne pas connaître l'écriture algébrique d'un nombre complexe sont des lacunes inacceptables pour un futur élève-ingénieur. L'absence de lien entre le plan complexe et les propriétés géométriques ou l'incapacité à exprimer des transformations géométriques ont été saillantes et donnent une très mauvaise image du travail fourni par le candidat.

1) Pour commencer, on doit montrer que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer, ce qui fait *a priori* deux choses. Mais, on peut tout traiter ensemble.

↪ On pose $z' = f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, où z est un complexe différent de -2. Puis, on écrit z en fonction de z', et on exclut les éventuelles valeurs z' qui posent problème pour faire cela.

2) On cherche tous les z tels que $f(z)$ soit réel et de même tous les z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur. On peut interpréter géométriquement ces ensembles.

↪ On rappelle que Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$ et que Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\bar{Z}$.

3) On veut une relation entre $|f(z)-1|$ et $|z+2|$ puis entre $\arg(f(z)-1)$ et $\arg(z+2)$.

↪ Il est temps de revoir les règles quand on cherche le module ou un argument d'un rapport de deux complexes.

4) On cherche l'image par f de $C = \{z \in \mathbb{C},\ |z+2| \leqslant R\}$.

↪ C est l'intérieur d'un disque de centre $A(-2)$ et de rayon R.
On utilise ici la question **3)**.

Corrigé

1) On considère donc $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.
Pour montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer, on pose $z' = f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, où z est un complexe différent de -2. Alors :

$$z' = \frac{z}{z+2} \Leftrightarrow z'(z+2) = z \Leftrightarrow z(z'-1) = -2z'.$$

En supposant $z' \neq 1$, on a : $z = \dfrac{2z'}{1-z'}$. Ainsi, f possède une fonction réciproque :

$$\boxed{f^{-1} : E = \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{-2\},\ z \mapsto \frac{2z}{1-z}.}$$

2) • *Détermination de tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$*
On suppose $z \neq -2$. On a les équivalences :

$$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z+2} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}+2} \Leftrightarrow z\bar{z} + 2z = z\bar{z} + 2\bar{z} \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

Donc :

$$\boxed{f(z) \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } z \text{ est réel et différent de } -2.}$$

• *Détermination de tous les complexes z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$*
On suppose $z \neq -2$. On a les équivalences :

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z}{z+2} = -\frac{\bar{z}}{\bar{z}+2} \Leftrightarrow z\bar{z} + 2z = -z\bar{z} - 2\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} = 0.$$

Posons $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1.$$

On reconnaît une équation du cercle Γ de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1.
Attention, $z \neq -2$ et on remarque que le point A d'affixe -2 appartient au cercle Γ. Il faut donc l'enlever. Finalement :

$$\boxed{f(z) \in i\mathbb{R} \text{ si et seulement si } M(z) \in \Gamma \setminus \{A(-2)\}.}$$

3) Posons $Z_1 = f(z) - 1$ et $Z_2 = z + 2$, avec $z \neq -2$. On a :

$$Z_1 = \frac{z}{z+2} - 1 = \frac{-2}{z+2}.$$

Puis : $|Z_1| = \left|\dfrac{2}{z+2}\right| = \dfrac{2}{|z+2|}$.
Puis : $\arg Z_1 = \arg\left(\dfrac{-2}{z+2}\right) = \arg(-2) - \arg(z+2) = \pi - \arg(Z_2)$. On peut résumer :

$$\boxed{|Z_1| = \frac{2}{|Z_2|} \text{ et } \arg Z_1 = \pi - \arg(Z_2).}$$

4) Posons $C = \{z \in \mathbb{C},\ |z+2| \leqslant R\} = \{z \in \mathbb{C},\ |Z_2| \leqslant R\}$, avec les notations de la question **3)**.

On en déduit d'après toujours la question **3)**,

$$z \in C \Leftrightarrow |f(z) - 1| = |Z_1| = \frac{2}{|Z_2|} \geqslant \frac{2}{R}.$$

Ainsi, si B est le point d'affixe 1,

$$\boxed{f(C) \text{ est le complémentaire du disque ouvert de centre } B \text{ et de rayon } \frac{2}{R}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection. Une première piste est de montrer que f est à la fois injective et surjective. Dans le cas particulier où E et F sont finis de même cardinal, l'injectivité (ou la surjectivité) seule suffit. Une deuxième piste, si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, est de vérifier que f est strictement monotone et continue (en particulier, on peut utiliser la dérivabilité de f si c'est le cas). Une troisième piste est d'expliciter (comme ici dans le corrigé) une fonction réciproque, ce qui revient à démontrer directement la bijectivité.

♡ Il faut se souvenir des différentes façons dont on traduit le fait qu'un complexe est réel.
Un complexe est réel s'il est nul ou si un argument est un multiple de π.
Un complexe est réel si et seulement s'il est égal à son conjugué.

♡ Il faut se souvenir des différentes façons dont on traduit le fait qu'un complexe est imaginaire pur.
Un complexe est imaginaire pur s'il est nul ou si un argument est de la forme $\pm\frac{\pi}{2}+k\pi$, où k est un entier relatif.
Un complexe est imaginaire pur si et seulement s'il est opposé à son conjugué.

♡ Il faut se souvenir que $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ est une équation dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R > 0$.

Formulaire

• On rappelle que si z et z' sont deux complexes non nul, alors :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'.$$

Jour n^{o}8

Exercice 8.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Ici, n est un entier naturel non nul et on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n. On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

1) Montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme.
On note dans la suite ϕ_n cet endomorphisme.

2) Expliciter la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :
(i) $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\phi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.
(ii) $(s_0, s_1, ..., s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n) = Id.$$

6) En déduire l'expression de s_i en fonction de X pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 8.2 — MPSI-PCSI-PTSI

Ici n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'univers Ω de l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme, c'est-à-dire que chaque permutation peut être choisie avec la même probabilité $\dfrac{1}{n!}$.
Si $\sigma \in \Omega$, on définit la *v.a.r* X_k par $X_k(\sigma) = 1$ si k est un point fixe de σ (c'est-à-dire $\sigma(k) = k$) et 0 sinon.

1) Que dire de la *v.a.r* X_k ? Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2) Calculer $E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

3) Soit N la *v.a.r* qui à σ associe son nombre de points fixes.

 a) Calculer $P(N = n)$, $P(N = n - 1)$ et $P(N = n - 2)$.

 b) Exprimer N en fonction des X_k. En déduire $E(N)$.

 c) (***Seulement MPSI.***) En déduire $V(N)$.

Exercice 8.1 Arts et Metiers ParisTech-ESTP-Polytech 2017 - ♣ ♣ ♣

Énoncé

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' son polynôme dérivé. Ici, n est un entier naturel non nul et on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes dont le degré est inférieur ou égal à n. On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

1) Montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme.
On note dans la suite ϕ_n cet endomorphisme.

2) Expliciter la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :
(i) $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\phi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$.
(ii) $(s_0, s_1, ..., s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n) = Id.$$

6) En déduire l'expression de s_i en fonction de X pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'écrit des Concours Arts et Métiers ParisTech-ESTP-POLYTECH (banque E3A) pour la filière MP en 2017.
C'est un exercice d'Algèbre linéaire qui plus précisément est axé sur l'étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et de sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$. L'ensemble est très classique et vous devez démarrer sans problème un exercice de ce type.

1) On montre que la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme.

$\hookrightarrow$ Ne pas oublier de montrer d'abord la linéarité. En faisant cela, il suffit alors de montrer que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par ϕ sont toujours dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2) On désire la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Cette matrice peut être utile pour la suite.

$\hookrightarrow$ Si vous avez déjà les images $\phi_n(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, c'est rapide.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> On constate parfois un manque de maîtrise du lien entre une matrice et l'application linéaire qui lui est associée dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, ce qui est source d'erreurs de raisonnement. De façon plus générale, pour beaucoup de candidats, l'algèbre linéaire se réduit trop souvent au calcul matriciel.

3) On montre ici que l'endomorphisme ϕ_n est en fait un automorphisme, c'est-à-dire un endomorphisme bijectif.

$\hookrightarrow$ Plusieurs méthodes s'offrent à vous. Soit on utilise le déterminant de ϕ_n (si vous savez déjà le faire) et c'est alors le plus rapide, soit vous montrez que le noyau est nul (car on est en dimension finie), soit vous montrez que le rang de la matrice est $n+1$, soit vous explicitez la fonction réciproque, ce qui permet de s'avancer pour la suite.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Trop de candidats annoncent u injectif $\Leftrightarrow$ u surjectif $\Leftrightarrow$ u bijectif car u est un endomorphisme (sans évoquer qu'ils sont en dimension finie) ou car on est juste en dimension finie (sans dire que l'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension).

4) On veut montrer l'existence et l'unicité d'une famille de $n+1$ polynômes dont on connaît les images par ϕ_n. Cette famille doit être une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\hookrightarrow$ On utilise bien entendu fortement le fait que ϕ_n est un automorphisme.

5) On demande de prouver une égalité entre des polynômes d'endomorphismes.

$\hookrightarrow$ La finalité de cette question est d'expliciter l'inverse de $Id - \delta$.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> En Algèbre linéaire, les polynômes d'endomorphismes donnent toujours lieu à de nombreuses surprises.

6) On explicite ici les polynômes $s_0, ..., s_n$ dont on a prouvé l'existence et l'unicité à la question **4)**.

$\hookrightarrow$ On utilise la question **5)** et donc le fait que l'on sait expliciter $\phi_n^{-1} = (Id - \delta)^{-1}$.

Corrigé

1) On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

Pour montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme, il faut montrer la linéarité de ϕ et montrer que l'image de $\mathbb{R}_n[X]$ est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité de ϕ

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - (P + \lambda Q)' = P + \lambda Q - P' - \lambda Q' = P - P' + \lambda (Q - Q').$$

On retrouve $\phi(P) + \lambda\phi(Q)$.

La restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$ est elle un endomorphisme ?

$\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la base $(1, X, ..., X^n)$.
Il suffit de vérifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\phi(1) = 1,\ \phi(X) = X - 1.$$

Puis :

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ \phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

Le polynôme $X^k - kX^{k-1}$ est de degré k pour tout k compris entre 1 et n. Donc $\phi(X^k)$ est un polynôme de degré au plus n pour tout entier k compris entre 0 et n.

On peut conclure :

$$\boxed{\phi \text{ induit sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ un endomorphisme, noté } \phi_n.}$$

2) On veut expliciter la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire dans la base $\beta = (1, X, X^2, ..., X^n)$. On utilise la question précédente. On sait que $\phi(1) = 1$ et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. On en déduit chaque colonne de la matrice $M_\beta(\phi_n)$, matrice représentative de ϕ dans la base canonique β de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{M_\beta(\phi_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3) On veut démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 01

Si vous connaissez les déterminants d'ordre n, on peut remarquer que le déterminant de $M_\beta(\phi_n)$ est triangulaire supérieure et est donc égal au produit des ses éléments diagonaux qui sont tous des 1.
Ainsi, $\det M_\beta(\phi_n) = 1 \neq 0$ et ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 02

On peut prouver que le noyau de ϕ_n est nul. En effet, si tel est le cas, comme ϕ_n est un endomorphisme en dimension finie, ϕ_n qui est alors injectif est bijectif (par le théorème du rang).
Soit donc $P \in \operatorname{Ker} \phi_n$, on a : $P = P'$. Or si P est de degré $k \geqslant 1$, P' est de degré $k-1$. Donc si $P \in \operatorname{Ker} \phi_n$, P est constant et comme P' est alors nul, $\operatorname{Ker} \phi_n$ est réduit au polynôme nul.

Méthode 03

On peut montrer que $M_\beta(\phi_n)$ est de rang $n+1$, ce qui permet alors de dire que ϕ_n est surjectif donc bijectif (endomorphisme en dimension finie). Si l'on fait les opérations élémentaires simultanées :

$$C_2 \leftarrow C_2 + C_1,\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2,\ ...,\ C_n \leftarrow C_n + nC_{n-1},$$

la matrice $M_\beta(\phi_n)$ se transforme en I_{n+1}, qui est bien de rang $n+1$.

Méthode 04

On peut expliciter l'inverse de ϕ_n, ce qui prouvera son existence et par la même occasion que ϕ_n est bijectif.
Soit $Q = P - P' = \phi_n(P)$. En dérivant, $Q' = P' - P''$, puis de manière générale,

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)}.$$

Et enfin $Q^{(n)} = P^{(n)}$ car P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de degré au plus n. En sommant toutes ces égalités, on aboutit à :

$$\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = P - P' + ... + P^{(n-1)} - P^{(n)} + P^{(n)} = P.$$

Tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ possède donc un antécédent unique qui est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$. Ainsi,

$$\boxed{\phi_n \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

4) Comme ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $\dfrac{X^i}{i!}$, élément de $\mathbb{R}_n[X]$, possède donc un antécédent unique par ϕ_n que l'on peut appeler s_i. Et $s_i \in \mathbb{R}_n[X]$.
Finalement, il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}.}$$

Par ailleurs, ϕ_n^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme la famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car cette famille est formée de $n+1$ polynômes (non nuls) tous de degrés différents dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, on peut conclure que l'image de cette base par l'automorphisme ϕ_n^{-1} (qui est la famille $(s_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) est encore une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On peut conclure :

$$\boxed{(s_0, s_1, ..., s_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

5) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. La quantité :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n)$$

vaut, en la développant :

$$Id + \delta + ... + \delta^n - \delta - ... - \delta^n - \delta^{n+1}.$$

Or $\delta^{n+1} = 0$ car la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est nulle. Donc :

$$\boxed{(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n) = Id.}$$

6) On remarque que $\phi_n = Id - \delta$ et donc $\phi_n^{-1} = Id + \delta + ... + \delta^n$. On retrouve l'expression trouvée à la quatrième méthode du développement de la question **3)**.

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (Id + \delta + ... + \delta^n)\left(\frac{X^i}{i!}\right).$$

Alors, pour i fixé dans $[\![0, n]\!]$,

$$\phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + i\frac{X^{i-1}}{i!} + ... + i(i-1)...(i-(i-1))\frac{X^{i-i}}{i!}.$$

C'est-à-dire :

$$\phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + \frac{X^{i-1}}{(i-1)!} + ... + \frac{X^0}{0!}.$$

On peut conclure :

$$\boxed{\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}.}$$

Remarque

Si vous avez fait la méthode 04 à la question **3)**, la question **6)** semble être un « remake » de cette question **3)**. Elle s'adresse donc surtout à ceux qui n'auraient pas fait la méthode 04 et non explicité ϕ_n^{-1} à la question **3)**. C'est-à-dire certainement à une majorité d'entre vous.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon de construire la matrice d'un endomorphisme ϕ dans un espace vectoriel de dimension finie E dans la base canonique $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ de E. On l'écrit colonne par colonne, chaque colonne correspondant aux coordonnées des vecteurs dans l'ordre $\phi(\vec{e}_1)$, ..., $\phi(\vec{e}_n)$ exprimés dans la base $(\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_n)$.

♡ Il faut se souvenir qu'une famille finie de polynômes non nuls tous de degrés différents est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre que ϕ, endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, est un automorphisme de E. On peut par exemple montrer que $\operatorname{Ker}\phi$ est nul, on peut aussi expliciter ϕ^{-1} directement, on peut aussi déterminer la matrice de ϕ dans une de ces bases et vérifier que cette matrice a pour rang la dimension de E (en calculant $\det\phi$ qui doit être non nul), on peut aussi montrer que ϕ transporte une base sur une base.

Formulaire

• *Familles libres, génératrices, bases*

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que :
$\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E si $\operatorname{Vect}(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_p) = E$, c'est-à-dire si :

$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists\,(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \vec{x} = \lambda_1\vec{x}_1 + ... + \lambda_p\vec{x}_p.$$

$\mathcal{F}$ est une **famille libre** de E si :

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \left[\lambda_1\vec{x}_1 + ... + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0\right].$$

$\mathcal{F}$ est une **base** de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est à la fois une famille libre et une famille génératrice de E.

• *Théorème du rang*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f une application linéaire de E dans F. On suppose de plus que E est de **dimension finie**. Alors :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Énoncé

Ici n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'univers Ω de l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme, c'est-à-dire que chaque permutation peut être choisie avec la même probabilité $\dfrac{1}{n!}$.
Si $\sigma \in \Omega$, on définit la *v.a.r* X_k par $X_k(\sigma) = 1$ si k est un point fixe de σ (c'est-à-dire $\sigma(k) = k$) et 0 sinon.

1) Que dire de la *v.a.r* X_k ? Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$.

2) Calculer $E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

3) Soit N la *v.a.r* qui à σ associe son nombre de points fixes.

  a) Calculer $P(N = n)$, $P(N = n-1)$ et $P(N = n-2)$.

  b) Exprimer N en fonction des X_k. En déduire $E(N)$.

4) (***Seulement MPSI.***) En déduire $V(N)$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun INP (ex CCP) en filière MP en 2017. Tout est réalisable avec le bagage de première année (MPSI-PCSI-PTSI). Le calcul de $E(XY)$ n'étant pas au programme en 1TSI et 1TPC, les élèves de ces filières se cantonneront à la question **1)**. Enfin, la formule qui donne la variance d'une somme de n variables aléatoires réelles (non nécessairement indépendantes) est utilisée à la question **3) c)** et n'a pu être vue que par les seuls MPSI. Elle est rappelée dans l'analyse de la question **3) c)**. Si vous provenez de PCSI ou de PTSI, vous pouvez tenter cette question avec ce rappel. Maintenant, encore une fois, cette formule est vue en seconde année dans toutes les filières et il n'est pas interdit pour vous de vous avancer un peu car le but de ce livre n'est-il pas de vous préparer à la deuxième année ?
Pour en revenir au contenu de l'exercice, bien entendu il traite de variables aléatoires réelles discrètes finies mais son originalité porte sur son univers qui est l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$. Ainsi, on a l'impression au départ que c'est un exercice de dénombrement. C'est en partie le cas car on utilise régulièrement le fait qu'il y a $n!$ permutations dans $[\![1, n]\!]$. De plus, pour calculer des probabilités, les dénombrements ne sont jamais très loin. Avant d'entrer dans une analyse détaillée des questions, donnons quelques extraits de rapport de jury autour des variables aléatoires réelles et qui peuvent un peu vous guider au fil des questions.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Il est indispensable de savoir réaliser des dénombrements simples. Les listes, arrangements, permutations, combinaisons doivent être reconnus directement.
> Dans de nombreuses situations, qui sont souvent élémentaires, on peut citer l'équiprobabilité et utiliser un dénombrement simple est la façon la plus efficace de calculer une probabilité.

Rapport du jury Banque E3A 2016

En probabilités, on peut remarquer souvent une confusion entre $X(\Omega)$ et Ω et la restitution de formules non explicitées.

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017

En ce qui concerne les probabilités, une des grandes difficultés relevées est la difficulté de compréhension du texte présenté. Certains candidats se contentent de proposer une loi du cours sans prendre garde de justifier le choix de leur réponse, voire l'adéquation de leur réponse au problème posé.

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016

On souhaiterait que les candidats fassent un effort de réécriture de tous les événements qu'ils rencontrent (à l'aide d'intersection, de réunion, de complémentaires) avant de se lancer dans le calcul de probabilités. La confusion entre événement et probabilité est également à déplorer.

1) On demande ici de reconnaître la loi suivie par X_k puis d'en déduire son espérance $E(X_k)$ et sa variance $V(X_k)$.

$\hookrightarrow$ Le fait que $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$ ne laisse aucune alternative quant à la loi suivie par X_k. J'espère que vous l'avez reconnue !
Le calcul de $P(X_k = 1)$ (grâce à des dénombrements simples) fournit son paramètre.

2) On demande le calcul de $E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$, c'est-à-dire ce que l'on appelle la covariance du couple (X_i, X_j). On remarque que pour $i = j$, on reconnaît $V(X_i)$.

$\hookrightarrow$ On peut remarquer que X_iX_j suit une loi de Bernoulli.
Pour avoir son paramètre, il suffit de calculer bien entendu $P(X_iX_j = 1)$.

3) On étudie ici N la variable aléatoire réelle qui à la permutation σ de $[\![1, n]\!]$ associe son nombre de points fixes, c'est-à-dire le nombre d'entiers k entre 1 et n tels que $\sigma(k) = k$.

a) Pour commencer, on calcule $P(N = j)$ pour $j = n$, puis $j = n-1$ et $j = n-2$.

$\hookrightarrow$ Il faut traduire l'événement $[N = j]$ à chaque fois.
Seul le cas $j = n - 2$ exige un vrai calcul de dénombrement.

b) On veut exprimer N en fonction des X_k, ce qui va permettre de calculer $E(N)$ (sans avoir à calculer toutes les probabilités $P(X_k = j)$ pour $j \in [\![1, n]\!]$.

$\hookrightarrow$ On remarquera que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k(\sigma)$ compte le nombre d'indices k pour lesquels $X_k(\sigma)$ prend la valeur 1.

4) On désire calculer ici $V(N)$. C'est là que l'on utilise le résultat de **2)**.

$\hookrightarrow$ On utilisera la formule du cours (pour les MPSI), que l'on peut admettre (pour les PCSI et PTSI) qui donne la variance d'une somme en fonction des variances et covariances des variables aléatoires qui composent la somme. Cette formule est d'ailleurs au programme officiel en PC et en PSI (et en MP forcément aussi) donc autant s'avancer.

On a l'égalité : $V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$,
où $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$.

Corrigé

1) On considère donc l'univers Ω de l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$, muni de la probabilité uniforme, c'est-à-dire que chaque permutation peut être choisie avec la même probabilité $\dfrac{1}{n!}$.
Si $\sigma \in \Omega$, on définit la *v.a.r* X_k par $X_k(\sigma) = 1$ si k est un point fixe de σ (c'est-à-dire si $\sigma(k) = k$) et 0 sinon.
Posons $k \in [\![1,n]\!]$. On voit déjà immédiatement : $X_k(\Omega) = \{0,1\}$.
Donc, X_k est une loi de Bernoulli de paramètre $P(X_k = 1)$.
L'événement $(X_k = 1)$ signifie que l'entier k est fixe. Les $n-1$ autres entiers de $[\![1,n]\!]$ peuvent l'être ou ne pas l'être, cela revient à permuter de manière quelconque ces $n-1$ autres valeurs. Il y a $(n-1)!$ permutations σ possibles qui laissent k invariant. Comme il y a $n!$ permutations possibles de $[\![1,n]\!]$,

$$P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Finalement :

$$\boxed{X_k \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{n}.}$$

D'après le cours, si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$. Donc :

$$\boxed{E(X_k) = \frac{1}{n} \text{ et } V(X_k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{n^2}.}$$

2) Calculons $E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$ pour tout couple $(i,j) \in ([\![1,n]\!])^2$.
On remarque en passant que X_iX_j ne prend que les valeurs 0 et 1 et suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $P(X_iX_j = 1)$. Nous allons maintenant différencier le cas où $i = j$ et le cas où $i \neq j$.

<u>Cas où $i = j$</u>

Ici $X_iX_j = X_i^2$. Or $X_i^2 = 1 \Leftrightarrow X_i = 1$. Donc : $P(X_i^2 = 1) = P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$ d'après plus haut. Ainsi, X_i^2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$ et :

$$\boxed{E(X_i^2) - E^2(X_i) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}.}$$

<u>Cas où $i \neq j$</u>

Ici $(X_iX_j = 1) = (X_i = 1) \cap (X_j = 1)$.
L'événement $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$ signifie que i et j sont fixes. Par contre les $n-2$ autres valeurs ont le droit de permuter comme bon leur semble.
Il y a $(n-2)!$ telles permutations. On a (ici $n \geqslant 2$ nécessairement) :

$$P\left((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\right) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Donc, X_iX_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n(n-1)}$. On a alors :

$$\boxed{\forall i \neq j,\ E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.}$$

3) a) Soit N la *v.a.r* qui à σ associe son nombre de points fixes.

<u>*Calcul de $P(N = n)$*</u>

L'événement $(N = n)$ signifie que tous les points sont fixes et donc que $\sigma = Id_{[\![1,n]\!]}$, il n'y a qu'une telle permutation. Ainsi, $P(N = n) = \dfrac{1}{n!}$.

<u>*Calcul de $P(N = n - 1)$*</u>

L'événement $(N = n - 1)$ est impossible, en effet une valeur de $[\![1, n]\!]$ qui n'est pas fixe prend nécessairement la position d'une autre valeur. Il y a donc au moins deux valeurs non fixes dès que σ n'est pas l'identité. Ainsi, $P(X = n - 1) = 0$.

<u>*Calcul de $P(N = n - 2)$*</u>

L'événement $X = n - 2$ signifie que σ laisse seulement deux valeurs de $[\![1, n]\!]$ non fixes. On les choisit, il y a $\dbinom{n}{2}$ possibilités de le faire. Les autres valeurs sont fixes et la restriction de σ à l'ensemble de ces $n - 2$ valeurs est l'identité.

Donc : $P(X = n - 2) = \dfrac{\dbinom{n}{2}}{n!} = \dfrac{n!}{n!2!(n-2)!} = \dfrac{1}{(n-2)!2}$.

On résume :

$$\boxed{P(N = n) = \frac{1}{n!},\ P(N = n - 1) = 0 \text{ et } P(N = n - 2) = \frac{1}{(n-2)!2}.}$$

b) On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k(\sigma)$ compte le nombre d'indices k pour lesquels $X_k(\sigma)$ prend la valeur 1 et est donc égale au nombre de points fixes de la permutation σ, c'est $N(\sigma)$. On a :

$$\boxed{N = \sum_{k=1}^{n} X_k.}$$

D'après le cours, on en déduit alors que :

$$\boxed{E(N) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.}$$

4) (***Seulement MPSI***.) On va appliquer la formule du cours qui donne la variance d'une somme en fonction des variances et covariances des variables aléatoires qui composent la somme. On a :

$$V(N) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \operatorname{Cov}(X_i, X_j).$$

Or, $\operatorname{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$. On a donc déjà :

$$V(N) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

C'est-à-dire :

$$V(N) = \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1,$$

soit encore :

$$V(N) = \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1.$$

La somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1$ est égale au nombre de couples (i, j) vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
Si $i = 1$, il y a $n-1$ valeurs de j possibles. Si $i = 2$, il y a $n-2$ valeurs de j possibles, etc. Si $i = k$, il y a $n-k$ valeurs de j possibles et enfin si $i = n-1$, il y a une seule valeur de j possible. Au total, il y a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)$ couples possibles :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

en utilisant la formule (connue) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$. Il reste :

$$V(N) = \frac{n-1}{n} + \frac{2}{n^2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n},$$

soit finalement :

$$\boxed{V(N) = 1.}$$

<u>*Remarque*</u>

(À lire en deuxième année, après avoir vu la loi de Poisson.)

On a obtenu $E(N) = V(N) = 1$. Il s'agit de l'espérance et de la variance d'une loi de Poisson de paramètre 1. Ce n'est pas un hasard. En effet, la variable N dépend de n. On peut la noter N_n. On peut démontrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(N_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ pour tout entier k et donc quand n est grand, N_n suit la loi de Poisson de paramètre 1.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on remarque que la variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli. On remarque déjà que $X(\Omega) = \{0, 1\}$ puis on peut conclure que X suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X = 1)$.

♡ Il faut se souvenir qu'il y a $n!$ permutations dans un ensemble de cardinal n.

♡ Il faut se souvenir que munir l'univers Ω fini de la probabilité uniforme signifie que pour tout $x_i \in \Omega$, $P(\{x_i\}) = \dfrac{1}{Card\,\Omega}$. De plus, pour calculer la probabilité d'un événement A, on peut calculer le nombre de cas favorables, c'est-à-dire le nombre de fois où A a lieu et $P(A)$ est le rapport entre ce nombre de cas favorables et $Card\,\Omega$.

Formulaire

• On rappelle que, pour n entier non nul, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$.

• *Espérance et variance d'une variable aléatoire réelle finie*

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, P), telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$.

Alors l'espérance de X est : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.

La variance de X est : $V(X) = E((X - E(X))^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.

On a la formule de Koenig : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - E(X)^2$.

• *Loi de Bernoulli*

Soit $p \in]0, 1[$. On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p si et seulement si $X(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ et

$$P(X = 0) = q = 1 - p \text{ et } P(X = 1) = p.$$

Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Et de plus : $E(X) = p$, $V(X) = pq$.

• *Espérance d'une somme de variables aléatoires*

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes finies définies sur le même univers Ω. Alors :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

• *(Seulement MPSI) Variance d'une somme de variables aléatoires*

Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires réelles discrètes finies définies sur le même univers Ω. Alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j),$$

où $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j)$.

Si de plus, les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont **indépendantes deux à deux**, et si $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}$, alors :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i).$$

Jour n^{o}9

Exercice 9.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

On définit $f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$, puis pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}x^n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x)$.
(On rappelle que $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f_n et, par convention, $f_0^{(0)} = f_0$.)

1) Déterminer L_0, L_1 et L_2.

2) Montrer, en utilisant la **formule de Leibniz**, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x).$$

3) En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(n+1)L_{n+1}(x) = x\, L_n'(x) + (n+1-x)L_n(x)$.

4) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{d^{n-k}}{d\, x^{n-k}}(x^n) = \dfrac{n! x^k}{k!}$.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!} + \frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!} + \frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!} = (n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}.$$

6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$, de deux manières :

a) en utilisant une méthode directe par récurrence et la question précédente.

b) en utilisant la formule de Leibniz.

Exercice 9.2 — PTSI-1TSI-1TPC

Dans l'espace, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les droites :

$$(D) \begin{cases} x - z = a \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{et } (D') \begin{cases} x + z = 2b \\ 3(x+y) + 2z = 7 \end{cases},$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les droites D et D' ne sont pas parallèles.

Énoncé

On définit $f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$, puis pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}x^n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x)$.

(On rappelle que $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f_n et, par convention, $f_0^{(0)} = f_0$.)

1) Déterminer L_0, L_1 et L_2.

2) Montrer, en utilisant la **formule de Leibniz**, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x).$$

3) En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(n+1)L_{n+1}(x) = x\, L_n'(x) + (n+1-x)L_n(x)$.

4) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{d^{n-k}}{d\, x^{n-k}}(x^n) = \dfrac{n!x^k}{k!}$.

5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!} + \frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!} + \frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!} = (n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}.$$

6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$, de deux manières :

a) en utilisant une méthode directe par récurrence et la question précédente.

b) en utilisant la formule de Leibniz.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'une partie d'un exercice posé au Capes externe en 2011. Le niveau et le programme au Capes sont comparables à ceux des filières de classes préparatoires. Pour en revenir à l'exercice, il tourne autour de la dérivation de fonctions et de l'utilisation de la formule de Leibniz (qui donne la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$). Plus précisément, on définit une suite de fonctions $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le but est d'expliciter L_n et de trouver des relations entre les éléments de cette suite. Un certain nombre de sujets des concours ressemblent à cet exercice, l'idée est d'étudier une suite de polynômes qui ont certaines propriétés.
Ici, L_n est appelé **polynôme de Laguerre d'ordre** n.
Citons aussi par exemple les polynômes de Legrendre, d'Hermite, de Tchebychev. L'étude de tous ces polynômes permet moultes thèmes possibles à l'écrit !

1) On commence par expliciter L_n pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.

$\hookrightarrow$ Les valeurs trouvées permettent de démarrer par exemple la récurrence de la question **6)a)** et de vérifier des formules trouvées pour des valeurs de n petites.

2) Il faut trouver une relation entre $f_{n+1}^{(n+1)}$, $f_n^{(n+1)}$ et $f_n^{(n)}$. On donne une piste : il faut utiliser la formule de Leibniz.

$\hookrightarrow$ La formule de Leibniz s'utilise sur un produit de fonctions. Comme la relation cherchée implique une dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$, on va appliquer la formule de Leibniz en dérivant $(n+1)$ fois le produit des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{-x}x^n$, ce qui donne bien $f_{n+1}^{(n+1)}(x)$.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Une bonne connaissance des théorèmes du cours est indispensable pour étayer ses raisonnements, pas seulement des noms de théorèmes mais des hypothèses précises utilisées et des conclusions effectives.

3) On cherche ici une relation entre L_{n+1} et L_n, utilisant la dérivée de L_n.
On incite à utiliser la relation trouvée à la question **2)**.

$\hookrightarrow$ On commence par faire le lien entre $(n+1)L_{n+1}(x)$ et $f_{n+1}^{(n+1)}(x)$.

4) On veut montrer une formule qui donne la dérivée $(n-k)^{\text{ème}}$ de $x \mapsto x^n$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Cette formule sert dans la suite.

$\hookrightarrow$ Il s'agit de faire une récurrence.
Par commodité pour l'effectuer, posons $p = n - k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Il reste alors à montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{d^p}{d\,x^p}(x^n) = \dfrac{n!x^{n-p}}{(n-p)!}$.
On effectue une récurrence sur p.

5) On demande ici d'établir une relation entre des coefficients binomiaux.
Voilà encore une relation qui sera utile plus loin.

$\hookrightarrow$ Il faut transformer les coefficients binomiaux en rapport de factorielles ; si l'on note A le premier membre de l'égalité à montrer, il faut mettre en facteur le maximum de factorielles puis reconnaître le second membre de l'égalité.
Bref, il faut organiser son calcul pour perdre le mimimun de temps.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> On peut noter de faibles performances sur les calculs, notamment sur la factorisation et l'utilisation d'identités remarquables.

6) Ici, on va trouver une expression explicite de $L_n(x)$. On utilise deux méthodes : récurrence et formule de Leibniz.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Toutes les récurrences ne sont pas immédiates. Il est souvent nécessaire de préciser rigoureusement l'hypothèse de récurrence. Ce type de raisonnement doit être plus soigné.

a) La première méthode est donc de faire une récurrence et d'utiliser **5)**. En fait ce n'est pas le seul résultat à utiliser.

$\hookrightarrow$ On initialise en utilisant les expressions de L_0 et L_1 trouvées à la question **1)**.
Puis on suppose la relation vraie au rang n, et on utilise la relation de **3)**.
On transforme alors $L_n'(x)$ et $L_n(x)$ sous forme de sommes grâce à l'hypothèse de récurrence au rang n.
Ainsi, $(n+1)L_{n+1}(x)$ s'exprime sous forme d'une somme que l'on simplifie en utilisant maintenant l'égalité de la question **5)**.

b) La deuxième méthode est d'appliquer la formule de Leibniz.

$\hookrightarrow$ Il s'agit de calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ du produit des fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^n$.
À cette occasion, on utilise la formule démontrée à la question **4)**.

Corrigé

1) On définit $f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$, puis pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}x^n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x)$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $L_0(x) = \dfrac{e^x}{0!} f_0^{(0)}(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1$. Puis :

$$L_1(x) = \frac{e^x}{1!} f_1'(x) = e^x \left[-e^{-x}x + e^{-x}\right] = -x + 1.$$

Puis encore :

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2!} f_2''(x) = \frac{e^x}{2} \left[-e^{-x}x^2 + 2xe^{-x}\right]' = \frac{e^x}{2} \left[e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x}\right],$$

ce qui donne en arrangeant :

$$\boxed{L_0(x) = 1,\ L_1(x) = -x + 1,\ L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.}$$

2) Rappelons pour commencer la formule de Gottfried Leibniz. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors fg est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et pour tout $x \in I$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Ici, on commence par écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-x}x^{n+1} = e^{-x}x^n x$. On applique alors la formule de Leibniz au rang $n+1$ avec $f(x) = x$, $g(x) = e^{-x}x^n$ et $I = \mathbb{R}$. . L'intérêt de prendre $f(x) = x$ est de remarquer qu'à partir de sa dérivée seconde, les dérivées successives de f sont nulles. On a :

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (xe^{-x}x^n)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} \left(e^{-x}x^n\right)^{(n+1-k)}.$$

Comme $x^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 2$, on a :

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0} x \left(e^{-x}x^n\right)^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} \left(e^{-x}x^n\right)^{(n)},$$

c'est-à-dire : $f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\left(e^{-x}x^n\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(e^{-x}x^n\right)^{(n)}$.
On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x).}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (n+1)\frac{e^x}{(n+1)!} \left(e^{-x}x^{n+1}\right)^{(n+1)} = \frac{e^x}{n!} \left(e^{-x}x^{n+1}\right)^{(n+1)}.$$

C'est-à-dire : $(n+1)L_{n+1}(x) = \dfrac{e^x}{n!} f_{n+1}^{(n+1)}(x)$.
Ce qui donne, en utilisant le résultat de la question **2)**,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = \frac{e^x}{n!} \left(x\left(e^{-x}x^n\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(e^{-x}x^n\right)^{(n)}\right).$$

Qui se met sous la forme :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x\frac{e^x}{n!}\frac{d}{dx}\left[n!e^{-x}L_n(x)\right] + (n+1)\frac{e^x}{n!}n!e^{-x}L_n(x).$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}&(n+1)L_{n+1}(x)\\ &= xe^x\left(-e^{-x}L_n(x) + e^{-x}L_n'(x)\right) + (n+1)L_n(x)\\ &= -xL_n(x) + xL_n'(x) + (n+1)L_n(x),\end{aligned}$$

Et alors, on a bien le résultat :

$$\boxed{(n+1)L_{n+1}(x) = x\,L_n'(x) + (n+1-x)L_n(x).}$$

4) On veut montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{d^{n-k}}{d\,x^{n-k}}(x^n) = \dfrac{n!x^k}{k!}$. Nous allons faire une récurrence. Par commodité pour l'effectuer, posons $p = n-k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. Il reste donc à démontrer que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{d^p}{d\,x^p}(x^n) = \dfrac{n!x^{n-p}}{(n-p)!}$.

On a : $\dfrac{d^0}{d\,x^0}(x^n) = x^n = \dfrac{n!x^{n-0}}{(n-0)!}$.

La proposition est donc vraie au rang $p=0$. Supposons qu'elle soit vraie à un rang $p=j$, où $j \leqslant n-1$. On a alors :

$$\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^n) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^j}{dx^j}(x^n)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n!x^{n-j}}{(n-j)!}\right) = \frac{n!(n-j)x^{n-j-1}}{(n-j)!} = \frac{n!x^{n-(j+1)}}{(n-(j+1))!}.$$

C'est bien la proposition au rang $p = j+1$. On peut conclure :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \frac{d^{n-k}}{d\,x^{n-k}}(x^n) = \frac{n!x^k}{k!}.}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a déjà :

$$\begin{aligned}&\frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!} + \frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!} + \frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{(k-1)!} + \frac{(n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!}}{k!} + \frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}{(k-1)!}.\end{aligned}$$

La quantité $\dfrac{\binom{n}{k}}{(k-1)!} + \dfrac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!} + \dfrac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!}$ vaut donc :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n+1)!}{k!k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(k-1)!(n+1-k)!}.$$

La quantité ci-dessus, notée A, doit donc valoir : $(n+1)\dfrac{\binom{n+1}{k}}{k!} = \dfrac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}$.

Écrivons alors :

$$A = \frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}\left[\frac{k(n-(k-1))}{(n+1)^2} + \frac{n-(k-1)}{n+1} + \frac{k^2}{(n+1)^2}\right]$$

car on a d'une part :

$$\frac{k!k!(n-(k-1))!}{(n+1)(n+1)!}.\frac{n!}{k!(n-k)!(k-1)!} = \frac{k(n-(k-1))}{(n+1)^2},$$

en utilisant $(n-(k-1))! = (n-(k-1))(n-k)!$, et d'autre part :

$$\frac{k!k!(n-(k-1))!}{(n+1)(n+1)!}.\frac{(n+1)!}{k!k!(n-k)!} = \frac{n-(k-1)}{n+1},$$

et enfin :

$$\frac{k!k!(n-(k-1))!}{(n+1)(n+1)!}.\frac{n!}{(k-1)!(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{k^2}{(n+1)^2}$$

Ainsi, A vaut alors :

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}\left[\frac{k(n-(k-1))+(n-(k-1))(n+1)+k^2}{(n+1)^2}\right]\\
&= \frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2}\right]\\
&= \frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}.
\end{aligned}$$

On a bien le résultat voulu.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!} + \frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!} + \frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!} = (n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}.}$$

6) a) <u>*Utilisation de questions précédentes*</u>

On va en fait utiliser plusieurs résultats précédents.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{H}_n$: « $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$ ».

On va montrer $\mathcal{H}_n$ par récurrence.

Initialisation. La proposition $\mathcal{H}_0$ est vraie car :

$$L_0(x) = 1 = \binom{0}{0}\frac{(-1)^0}{0!}x^0 = \sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

De même, la proposition $\mathcal{H}_1$ est vraie car :

$$L_1(x) = 1 - x = \binom{1}{0}\frac{(-1)^0}{0!}x^0 + \binom{1}{1}\frac{(-1)^1}{1!}x^1 = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

Hérédité. Supposons la proposition $\mathcal{H}_n$ vraie pour n un entier non nul.
Alors, partons du résultat de la question **3)**.

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x\,L_n'(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

En utilisant la proposition $\mathcal{H}_n$ au rang n :

$$xL_n'(x) = x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)' = x\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}kx^{k-1}.$$

Et on a aussi : $(n+1-x)L_n(x) = (n+1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$

Ce qui donne encore : (1) $xL_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k$. Et aussi :

$$(2)\ \ (n+1-x)L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+1}.$$

En ajoutant (1) et (2), la quantité $(n+1)L_{n+1}(x)$ devient donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k + \sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+1}.$$

On la transforme en :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k + \sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k.$$

Puis ensuite (en isolant les termes pour $k=0$ et $k=n+1$) :

$$n+1+\binom{n}{n}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!} + \binom{n}{k}(n+1)\frac{(-1)^k}{k!} + \binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\right]x^k.$$

Il reste à utiliser la question **5)**, que l'on rappelle :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!} + \frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!} + \frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!} = (n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}.$$

Alors $(n+1)L_{n+1}(x)$ devient :

$$n+1+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(n+1)\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

On remarque que :

$$n+1+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1} = \binom{n+1}{0}(n+1)\frac{(-1)^0}{0!}x^0 + \binom{n+1}{n+1}(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Et on a bien le résultat : $(n+1)L_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+1) \frac{(-1)^k}{k!} x^k$.

C'est bien la proposition $\mathcal{H}_{n+1}$. On a bien montré par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.}$$

b) *Utilisation de la formule de Leibniz*

On part de $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x) = \dfrac{e^x}{n!} \left[e^x x^n\right]^{(n)}$.

Comme les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto x^n$ sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer la formule de Leibniz :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{-x})^{(k)} (x^n)^{(n-k)} = \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k,$$

en utilisant la question **4)** et $(e^{-x})^{(k)} = (-1)^k e^{-x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

En simplifiant $e^x e^{-x} = 1$, on a le résultat. On a bien encore montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on utilise la formule de Leibniz. Il faut déjà remarquer que la fonction dont on veut la dérivée $n^{\text{ème}}$ s'écrit comme un produit de deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n$ et que l'une de ces deux fonctions, par exemple f, a ses dérivées successives $f^{(k)}$ simples à expliciter à partir d'un certain rang (en général la dérivée $f^{(k)}$ est nulle à partir d'un certain rang k).

Formulaire

• *Formule de Leibniz*

Soit n un entier, si f et g sont des fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, alors fg est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et :

$$\forall t \in I,\ (fg)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t).$$

• *Formule de Pascal*

Pour tout couple d'entiers (k, n) avec $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Énoncé

Dans l'espace, rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les droites :

$$(D) \left\{ \begin{array}{rcl} x-z & = & a \\ y+3z+1 & = & 0 \end{array} \right. \text{ et } (D') \left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 2b \\ 3(x+y)+2z & = & 7 \end{array} \right. ,$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les droites D et D' ne sont pas parallèles.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit d'un exercice de géométrie qui nécessite (pour se faire rapidement) la notion de produit vectoriel qui est au programme en PTSI, en TSI1 et en TPC1. Un élève de deuxième année issu de ces classes ou en PSI pourra bien entendu l'aborder. Il a été posé à l'oral du Concours Commun INP (ex CCP) en 2009 en filière PC. À l'époque, le produit vectoriel était au programme en PCSI. Cela n'empêche pas ce type d'exercice de rester très actuel pour les filières citées précédemment. Pour en revenir à l'exercice proprement dit, il suffit ici de trouver un vecteur directeur de chacune des deux droites et de les comparer.

↪ C'est l'occasion de réviser le produit vectoriel ! De plus, révisez bien la géométrie car c'est payant au concours. Voir le rapport ci-dessous.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2009
>
> Des progrès réels ont été faits en géométrie et les candidats qui maîtrisent les définitions de base dans ce domaine peuvent faire la différence.

Corrigé

On munit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique, la droite D est l'intersection des deux plans :

$$Q_1 : x - z = a \text{ et } Q_2 : y + 3z + 1 = 0.$$

Or, le plan Q_1 a pour direction orthogonale le vecteur $(1, 0, -1)$ et le plan Q_2 a pour direction orthogonale le vecteur $(0, 1, 3)$. On peut en déduire que D a pour vecteur directeur :

$$\vec{u} = (1, 0, -1) \wedge (0, 1, 3) = (1, -3, 1).$$

De même, la droite D' est l'intersection des plans :

$$Q_3 : x + z = 2b \text{ et } Q_4 : 3x + 3y + 2z = 7$$

et a donc pour vecteur directeur :

$$\vec{u}' = (1, 0, 1) \wedge (3, 3, 2) = (-3, 1, 3).$$

On peut constater que $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires.

$$\boxed{\text{On en déduit que les droites } D \text{ et } D' \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que dans l'espace, muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une droite peut être définie par un point et un vecteur directeur ou alors comme l'intersection de deux plans.

1) Si l'on connaît $A \in D$ et un vecteur directeur $\vec{u}$: $M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
2) Si l'on connaît A et B distincts de D : $M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
3) Si l'on définit D comme l'intersection de deux plans P et P' avec $\vec{n}$ orthogonal à P et $\vec{n}'$ orthogonal à P' alors D a pour vecteur directeur $\vec{n} \wedge \vec{n}'$. Il suffit de trouver un point A commun aux deux plans et on a notre droite.

♡ Il faut se souvenir que, dans le plan ou l'espace, deux droites sont parallèles si et seulement si deux quelconques de leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Formulaire

• *Produit vectoriel de deux vecteurs*

Dans l'espace, muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le produit vectoriel $\vec{w}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

(1) est nul dès que les deux vecteurs sont colinéaires ;

(2) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, sa *direction* est définie par le fait que $\vec{w}$ est à la fois orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Puis son *sens* est défini par le fait que la disposition des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est analogue à celle des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. (On dit que la famille est directe). Enfin, on définit sa *norme* qui est

$$\|u\|.\|v\||\sin\theta|,$$

où θ est une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

(3) si on a besoin de ses coordonnées, on part des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, respectivement (x, y, z) et (x', y', z') puis on écrit les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en colonnes, pour former un tableau à trois lignes et deux colonnes. Puis on recopie les deux premières lignes en dessous de la troisième. Puis on supprime la toute première ligne. Enfin, on effectue les trois calculs de déterminants 2×2 issus du premier coefficient restant puis celui issu du coefficient en dessous et enfin celui issu du coefficient encore en dessous. Cette formule est valable dans toute base orthonormée directe de l'espace.

Jour n^{o}10

Exercice 10.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\;\; y''(t) - 2y'(t) + (1-\alpha^2)y(t) = e^t.$$

Déterminer l'unique solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 10.2 — MPSI-PCSI-PTSI (option PSI seulement)

Ici $n \geqslant 2$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A^T désigne la transposée de A.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i(A)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $C_j(A)$ désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Enfin, $A_{i,j}$ désigne $L_i(A) \cap C_j(A)$.
On note : $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\, A_{i,j} \in \{-1,1\}\}$,
$\mathcal{G}_n = \{A \in \mathcal{B}_n,\, A \text{ est inversible }\}$, $\mathcal{H}_n = \left\{A \in \mathcal{B}_n,\, A^T A = nI_n\right\}$.

1) Donner deux matrices A_2 et A_2' de $\mathcal{B}_2$, telles que $A_2 \in \mathcal{H}_2$ et $A_2' \notin \mathcal{G}_2$.

2) On pose $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \dfrac{1}{2}A_4$.

Enfin, ϕ est l'endomorphisme canoniquement associé à S.

a) Calculer $\det(A_4)$. Montrer que $A_4 \in \mathcal{H}_4$ et retrouver $|\det(A_4)|$.

b) Déterminer une base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et une base de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$.
Montrer que Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

c) Écrire la matrice de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$, réunion de la base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et de celle de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ trouvées à la question **2) b)**. Que remarque-t-on ?

3) Vérifier : $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ et montrer que $\mathcal{B}_n$ est de cardinal fini à trouver.

4) Ici $n \geqslant 3$, $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en A' par les $n-1$ opérations élémentaires :
$\forall i \in [\![2,n]\!]$, $L_i(A) \leftarrow A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A)$.

a) Trouver une relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

b) Montrer que $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, où $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est inversible

et que pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, $B'_{i,j} \in \{-2,0,2\}$.

c) Montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.

d) Si $A \in \mathcal{H}_n$, montrer $|\det(A)| = n^{\frac{n}{2}}$. En déduire que n est un multiple de 4.

Énoncé

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(t) - 2y'(t) + (1 - \alpha^2)y(t) = e^t.$$

Déterminer l'unique solution de (E) qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun INP (ex CCP) en filière TSI en 2015. Maintenant, cet exercice et d'autres dont l'énoncé est très proche, sont posés régulièrement en particulier à l'oral dans à peu près toutes les filières et toutes les années. Il est clair que la discussion va porter sur les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans le programme officiel, il y a deux méthodes possibles, la première est l'utilisation de l'équation caractéristique de l'équation différentielle homogène associée (voir le rappel de cette méthode dans la partie Techniques), c'est la méthode vue en première année et la deuxième est la mise sous forme matricielle avec le calcul du polynôme caractéristique. C'est typiquement une méthode réservée à la deuxième année que nous laisserons ici.

$\hookrightarrow$ C'est l'occasion de réviser la méthode de résolution d'une telle équation. On rappelle que l'on résout d'abord l'équation homogène, ce qui donne une solution y_H de cette équation en fonction de deux constantes puis on cherche une solution particulière y_p qui « ressemble » au second membre de l'équation complète, on écrit alors que toute solution de l'équation complète est de la forme $y_H + y_p$ et on utilise enfin les conditions initiales pour déterminer les deux constantes que contient y_H. Tout ceci est réexpliqué en plus détaillé dans la partie Techniques.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> La pratique sur les équations différentielles linéaires du 1^{er} et du 2^{e} ordres est en général convenable, mais il n'est pas toujours possible d'avoir un énoncé clair et précis des théorèmes du programme sur ce paragraphe.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Dans les points non maîtrisés, on peut relever une méconnaissance fréquente de la structure des solutions d'une équation différentielle.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2015
>
> Il devient difficile de faire résoudre une équation différentielle à bon nombre de candidats.

Corrigé

Résolution de l'équation homogène associée

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons : $(E_H) \quad y''(t) - 2y'(t) + (1 - \alpha^2)y(t) = 0$.
Posons aussi son équation caractéristique (1) : $x^2 - 2x + 1 - \alpha^2 = 0$.
Le discriminant de (1) est $\Delta = 4 - 4(1 - \alpha^2) = 4\alpha^2$. On a deux cas.

• Si $\alpha = 0$, $\Delta = 0$ et (1) a pour racine double 1.
L'ensemble des solutions de (E_H) est :

$$S_{E_H} = \{t \mapsto \lambda e^t + \mu t e^t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• Si $\alpha \neq 0$, $\Delta > 0$ et (1) a deux racines distinctes $\dfrac{2 \pm 2|\alpha|}{2} = 1 \pm |\alpha|$, c'est-à-dire $1 - \alpha$ et $1 + \alpha$. L'ensemble des solutions de (E_H) est :

$$S_{E_H} = \left\{t \mapsto \lambda e^{(1-\alpha)t} + \mu e^{(1+\alpha)t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Détermination d'une solution particulière

• Si $\alpha = 0$, 1 est racine double de (1) et (voir le tableau dans la partie Techniques), nous allons chercher une solution de (E) de la forme $y_p(t) = at^2e^t$, où a est une constante réelle à déterminer. On écrit : $(at^2e^t)'' - 2(at^2e^t)' + at^2e^t = e^t$.
Cela donne en développant les dérivées :

$$a(2e^t + 4te^t + t^2e^t) - 2a(2te^t + t^2e^t) + at^2e^t = e^t.$$

C'est-à-dire : $2ae^t = e^t \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.
Il reste $y_p : t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2e^t$ pour solution particulière de (E).

• Si $\alpha \neq 0$, comme (1) possède deux racines simples différentes de 1, on cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p(t) = a\, e^t$.
On écrit : $(ae^t)'' - 2(ae^t)' + (1 - \alpha^2)ae^t = e^t$.
C'est-à-dire : $ae^t - 2ae^t + (1 - \alpha^2)ae^t = e^t \Rightarrow -a\alpha^2 = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{\alpha^2}$.
Finalement, $y_p : t \mapsto -\dfrac{1}{\alpha^2}e^t$ est une solution particulière de (E).

Détermination de la solution répondant aux conditions initiales

• Si $\alpha = 0$, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_E = \left\{t \mapsto \lambda e^t + \mu t e^t + \frac{1}{2}t^2e^t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il reste à rentrer les conditions initiales ce qui permet d'obtenir λ et μ.
Partons de $y(t) = \lambda e^t + \mu t e^t + \dfrac{1}{2}t^2e^t$, sa dérivée est :

$$y'(t) = \lambda e^t + \mu(te^t + e^t) + \frac{1}{2}(t^2e^t + 2te^t).$$

Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donnent : $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ \lambda + \mu & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda = 0$ et $\mu = 1$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 0\text{, l'unique solution est : } t \mapsto te^t + \frac{1}{2}t^2e^t.}$$

• Si $\alpha \neq 0$, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_{E_H} = \left\{t \mapsto \lambda e^{(1-\alpha)t} + \mu e^{(1+\alpha)t} - \frac{1}{\alpha^2}e^t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Posons donc $y(t) = \lambda e^{(1-\alpha)t} + \mu e^{(1+\alpha)t} - \dfrac{1}{\alpha^2}e^t$.

Commençons par dériver : $y'(t) = \lambda(1-\alpha)e^{(1-\alpha)t} + \mu(1+\alpha)e^{(1+\alpha)t} - \dfrac{1}{\alpha^2}e^t$.
Les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donnent :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda + \mu & = & \frac{1}{\alpha^2} \\ (1-\alpha)\lambda + (1+\alpha)\mu & = & 1 + \frac{1}{\alpha^2} \end{array}\right. .$$

Pour le résoudre, on va, par exemple, multiplier la première ligne par $-(1-\alpha)$ et l'ajouter ensuite à la deuxième.
On a : $\mu((1+\alpha) - (1-\alpha)) = 1 + \dfrac{1}{\alpha^2} - \dfrac{1-\alpha}{\alpha^2} \Rightarrow \mu = \dfrac{\alpha+1}{2\alpha^2}$.
Puis : $\lambda = \dfrac{1}{\alpha^2} - \mu = \dfrac{1-\alpha}{2\alpha^2}$. On peut conclure.

$$\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0, \text{ l'unique solution est } t \mapsto \frac{1-\alpha}{2\alpha^2}e^{(1-\alpha)t} + \frac{1+\alpha}{2\alpha^2}e^{(1+\alpha)t} - \frac{1}{\alpha^2}e^t.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on résout une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit l'équation différentielle (E) : $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$, d'équation homogène associée (E_H). L'équation (1) : $x^2 + ax + b = 0$ est **l'équation caractéristique** associée à (E_H). Commençons par résoudre (E_H) :
1. Si $a^2 - 4b < 0$, (1) admet deux racines $r = \alpha \pm i\beta$ distinctes et conjuguées et les solutions de (E_H) sont les fonctions :

$$y_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Si $a^2 - 4b = 0$, (1) admet une racine réelle double r et l'ensemble des solutions de (E_H) est constitué des fonctions :

$$y_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{rt},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si $a^2 - 4b > 0$, (1) admet deux racines réelles r_1 et r_2 distinctes et l'ensemble des solutions de (E_H) est constitué des fonctions :

$$y_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Puis, on résout l'équation complète (E) en ajoutant une solution quelconque y_H de (E_H) (avec ses deux constantes λ et μ indéterminées) à une solution particulière y_p de (E) qui « ressemble » à f.
Et enfin, s'il y a des conditions initiales, on peut alors déterminer λ et μ.

Formulaire

• *Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur I*

Problème de Cauchy. Soit $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Il existe une unique solution au système : $\left\{\begin{array}{ccc} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) & = & f(t) \\ y(t_0) & = & \alpha \\ y'(t_0) & = & \beta \end{array}\right.$.

Énoncé

Ici $n \geqslant 2$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A^T désigne la transposée de A.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i(A)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $C_j(A)$ désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Enfin, $A_{i,j}$ désigne $L_i(A) \cap C_j(A)$.
On note : $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} \in \{-1,1\}\}$,
$\mathcal{G}_n = \{A \in \mathcal{B}_n,\ A \text{ est inversible}\}$, $\mathcal{H}_n = \left\{A \in \mathcal{B}_n,\ A^T A = nI_n\right\}$.

1) Donner deux matrices A_2 et A_2' de $\mathcal{B}_2$, telles que $A_2 \in \mathcal{H}_2$ et $A_2' \notin \mathcal{G}_2$.

2) On pose $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \dfrac{1}{2}A_4$.

Enfin, ϕ est l'endomorphisme canoniquement associé à S.

a) Calculer $\det(A_4)$. Montrer que $A_4 \in \mathcal{H}_4$ et retrouver $|\det(A_4)|$.

b) Déterminer une base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et une base de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$.
Montrer que Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

c) Écrire la matrice de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$, réunion de la base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et de celle de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ trouvées à la question **2) b)**. Que remarque-t-on ?

3) Vérifier : $\forall n \geqslant 2$, $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ et montrer que $\mathcal{B}_n$ est de cardinal fini à trouver.

4) Ici $n \geqslant 3$, $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en A' par les $n-1$ opérations élémentaires : $\forall i \in [\![2,n]\!]$, $L_i(A) \leftarrow A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A)$.

a) Trouver une relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

b) Montrer que $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, où $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est inversible

et que pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, $B'_{i,j} \in \{-2,0,2\}$.

c) Montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.

d) Si $A \in \mathcal{H}_n$, montrer $|\det(A)| = n^{\frac{n}{2}}$. En déduire que n est un multiple de 4.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'une partie d'un sujet de concours d'écrit posé au Concours Commun INP (ex CCP) en filière PC en 2015.
C'est un exercice d'algèbre matricielle qui fait aussi travailler dans une question l'endomorphisme associé. On utilise la technique des opérations élémentaires, en particulier pour un calcul de déterminant. Plus précisément, on définit trois sous-ensembles des matrices carrées d'ordre n. Le premier, noté $\mathcal{B}_n$, est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont ± 1. Le second, noté $\mathcal{G}_n$, est l'ensemble des matrices de $\mathcal{B}_n$ inversibles et le troisième, noté $\mathcal{H}_n$, est l'ensemble des matrices A de $\mathcal{B}_n$ telles que $A^T A = nI_n$. On peut remarquer déjà (ce que l'on montre rapidement à la question **3)**) que $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$. Le thème de l'exercice est d'étudier des exemples de matrices appartenant à ces ensembles puis de trouver des propriétés de

ces trois ensembles. Un conseil pour finir : dans certaines questions, il ne faut pas se lancer dans des calculs trop compliqués, en particulier quand on demande de calculer des déterminants.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> On a relevé le manque fréquent de technicité pour calculer un déterminant. Par ailleurs, les calculs de petits déterminants, lorsqu'ils aboutissent, sont trop souvent laborieux. Les candidats développent beaucoup trop vite et n'effectuent que très rarement des opérations sur les lignes ou les colonnes.

1) On commence par donner des exemples pour $n = 2$.

$\hookrightarrow$ On cherche des matrices carrées d'ordre 2 n'ayant que des ± 1 comme coefficients. Il faut en trouver une qui ne soit pas inversible et l'autre telle que $A^T A = 2I_2$.

2) On étudie un exemple, noté A_4, avec $n = 4$. On considère de plus l'endomorphisme ϕ associé canoniquement à $\frac{1}{2}A_4$. Le but est de reconnaître ϕ. Pour cela, on va écrire la matrice de ϕ dans une nouvelle base, issue de la supplémentarité de deux sous-espaces vectoriels.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2016
>
> La notion de somme directe de sous-espaces vectoriels n'est pas bien maîtrisé.

a) On vérifie ici que $A_4 \in \mathcal{H}_4$ et on calcule $\det(A_4)$ de deux manières, la première en utilisant les techniques de calcul de déterminant que vous devez connaître et la deuxième est d'utiliser $A^T A = 4I_4$.

$\hookrightarrow$ Il y a un grand nombre de façons de calculer $\det(A_4)$.
À vous d'en trouver une optimale niveau calcul !

b) On étudie ici les sous-espaces vectoriels $\text{Ker}\,(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et $\text{Ker}\,(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ de $\mathbb{R}^4$. On cherche une base de chacun d'eux et on veut montrer qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. Le but est de préparer le terrain pour trouver la matrice de ϕ dans une nouvelle base à la question **2) c)**.

$\hookrightarrow$ Pour trouver les bases de $\text{Ker}\,(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et de $\text{Ker}\,(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$, on résout des systèmes linéaires. Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, plusieurs méthodes s'offrent à nous mais comme nous allons utiliser plus loin une base formée de la réunion d'une base de $\text{Ker}\,(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et d'une base de $\text{Ker}\,(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$, il serait intéressant de vérifier que cette réunion forme bien une base de $\mathbb{R}^4$.

c) On déduit de ce qui précède la matrice de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$, réunion de la base de $\text{Ker}\,(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et de celle de $\text{Ker}\,(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ trouvées à la question **2) b)**. Il est clair qu'il faut trouver une matrice plus simple que celle représentant ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. À partir de là, tentez de caractériser ϕ géométriquement si vous le pouvez.

$\hookrightarrow$ Inutile de sortir la grosse artillerie, c'est-à-dire une matrice de passage et l'inverse de cette matrice de passage. Il suffit de remarquer la caractérisation pour son image d'un vecteur de $\text{Ker}\,(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et celle pour un vecteur de $\text{Ker}\,(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$.

3) Dans cette question, on demande d'abord de justifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ puis on cherche le cardinal de $\mathcal{B}_n$, c'est-à-dire le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{B}_n$.

$\hookrightarrow$ Le calcul du cardinal peut se ramener à calculer les applications entre deux ensembles finis à déterminer.

4) Ici $n \geqslant 3$, $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en A' par les $n-1$ opérations élémentaires pour tout i entier entre 2 et n : $L_i(A) \leftarrow A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A)$. Le but est de calculer $|\det(A)|$ quand $A \in \mathcal{H}_4$. Or, on sait que certaines opérations élémentaires ne transforment pas un déterminant et d'autres par contre le transforment.
À vous de revoir maintenant tout cela.

a) On effectue les opérations élémentaires et on demande la relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$, en notant A' la matrice transformée par ces $n-1$ opérations.

$\hookrightarrow$ On rappelle qu'un déterminant est multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables.
De plus, s'il possède deux colonnes ou deux lignes identiques, il est nul.

b) Il s'agit d'écrire A' sous une forme dite triangulaire supérieure par blocs tel que sa première ligne soit la même que celle de A (ce qui est logique vu les opérations faites), et que les coefficients intérieurs soient 0 ou ± 2.

$\hookrightarrow$ Il faut être rigoureux ici. On commencera par vérifier que la première colonne de A' n'a que des coefficients nuls à part le premier puis on en déduira une relation entre $\det(A')$ et $\det(B')$. Il faut alors prouver que B' est inversible et enfin remarquer que ses coefficients sont à prendre parmi les valeurs -2, 0 et 2.

c) On veut montrer que $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.

$\hookrightarrow$ On se sert encore de la relation entre $\det(A')$ et $\det(B')$.
On pourra introduire la matrice B'' telle que $2B'' = B'$.

d) On suppose ici $A \in \mathcal{H}_n$, on veut d'abord calculer la valeur de $\det(A)|$ en fonction de n puis en déduire que nécessairement n est un multiple de 4. On peut alors conclure que si $n \geqslant 3$, $\mathcal{H}_n$ est vide si n n'est pas un multiple de 4.
(Attention, $\mathcal{H}_2$ n'est pas vide car dans ce cas, on n'a pas l'hypothèse $n \geqslant 3$.)

$\hookrightarrow$ Pour montrer que n est un multiple de 4, on commencera par éliminer le cas où n est impair puis on pourra poser $n = 2p$, avec p entier supérieur ou égal à 2.
Il s'agit de montrer que p est pair.

Corrigé

1) On note donc : $\mathcal{B}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\, A_{i,j} \in \{-1,1\}\}$,

$$\mathcal{G}_n = \{A \in \mathcal{B}_n,\, A \text{ est inversible }\},\ \mathcal{H}_n = \left\{A \in \mathcal{B}_n,\, A^TA = nI_n\right\}.$$

Dans cette première question, on est dans le cas $n = 2$.
On doit trouver deux matrices A_2 et A_2' de $\mathcal{B}_2$, telles que $A_2 \in \mathcal{H}_2$ et $A_2' \notin \mathcal{G}_2$.
La plus simple à trouver est la deuxième. Il s'agit de trouver une matrice carrée d'ordre n n'ayant que des ± 1 comme coefficients et non inversible.
Posons $A_2' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien dans $\mathcal{B}_2$ et on remarque que A_2' n'est pas inversible. En effet, ses deux colonnes sont opposées et donc le rang de A_2' est $1 < 2$. On peut aussi écrire que :

$$A_2'^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $\det(A_2') = 0$ et A_2' n'est pas inversible.
Pour le choix de la matrice A_2, on commence par remarquer que pour une telle matrice, $A_2^TA_2 = 2I_2 \Rightarrow \det\left(A_2^T\right)\det(A_2) = \det(A_2)^2 = \det(2I_2) = 4$.

Il nous faut donc choisir une matrice de rang 2, remplies uniquement de 1 et de -1, et dont le déterminant est égal à 2.

On pose $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a bien :

$$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

Donc $A_2 \in \mathcal{H}_2$. On résume :

$$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_2' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2) a) On pose maintenant : $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On commence par le calcul de $\det A_4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

en effectuant les opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$. Puis :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix},$$

en effectuant l'opération : $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$. Puis :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

en effectuant l'opération : $L_2 \leftrightarrow L_4$. Et enfin :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix},$$

en effectuant l'opération : $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$. Il reste un déterminant triangulaire supérieur dont la valeur est le produit des éléments de la diagonale principale. Ainsi :

$$\boxed{\det(A_4) = -1 \times 2 \times (-2) \times 4 = 16.}$$

On remarque que A_4 est symétrique, c'est-à-dire que $A_4^T = A_4$.

On a rapidement :

$$A_4^T A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I_4.$$

Enfin, $\det\left(A_4^T A_4\right) = \det(A_4)^2 = \det(4I_4) = 4^4 \Rightarrow \det(A_4) = 4^2 = 16$. On conclut.

$$\boxed{A_4 \in \mathcal{H}_4 \text{ et on retrouve : } |\det(A_4)| = 16.}$$

b) Déterminons une base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$.
Le vecteur $\vec{u}(x, y, z, t)$ (ses composantes sont prises dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) appartient à Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = \vec{u}$, et donc si et seulement si :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y - z - t & = & 2x \\ x + y + z + t & = & 2y \\ -x + y - z + t & = & 2z \\ -x + y + z - t & = & 2t \end{array}\right. .$$

Cela donne, de façon équivalente : (S) $\left\{\begin{array}{rcl} -x + y - z - t & = & 0 \\ x - y + z + t & = & 0 \\ -x + y - 3z + t & = & 0 \\ -x + y + z - 3t & = & 0 \end{array}\right. .$

On remarque que les deux premières lignes de (S) sont équivalentes et que si l'on enlève la troisième ligne à la quatrième, on obtient :

$$-4z + 4t = 0 \Rightarrow z = t.$$

En remplaçant dans la première égalité de (S), il reste :

$$x - y + 2t = 0 \Rightarrow x = y - 2t.$$

On en déduit alors : $(x, y, z, t) = (y - 2t, y, t, t) = y(1, 1, 0, 0) + t(-2, 0, 1, 1)$.
Réciproquement, on vérifie que de tels 4-uplet (x, y, z, t) vérifient bien (S).
Les deux vecteurs $\vec{u}_1(1, 1, 0, 0)$ et $\vec{u}_2(-2, 0, 1, 1)$ forment donc une famille génératrice de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et ne sont pas liés, on peut conclure :

$$\boxed{(\vec{u}_1(1, 1, 0, 0),\ \vec{u}_2(-2, 0, 1, 1)) \text{ est une base de Ker } (\phi - Id_{\mathbb{R}^4}).}$$

Déterminons une base de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$.
Le vecteur $\vec{u}(x, y, z, t)$ (ses composantes sont prises dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) appartient à Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = -\vec{u}$, et donc si et seulement si :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y - z - t & = & -2x \\ x + y + z + t & = & -2y \\ -x + y - z + t & = & -2z \\ -x + y + z - t & = & -2t \end{array}\right. .$$

Cela donne, de façon équivalente, le système : (S') $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + y - z - t & = & 0 \\ x + 3y + z + t & = & 0 \\ -x + y + z + t & = & 0 \\ -x + y + z + t & = & 0 \end{array}\right. .$

On remarque que les deux dernières lignes du dernier système (S') sont égales et que si l'on ajoute la première ligne à la deuxième, on obtient :

$$4x + 4y = 0 \Rightarrow x = -y.$$

En remplaçant dans la troisième égalité de (S'), il reste :

$$2y + z + t = 0 \Rightarrow z = -2y - t.$$

On en déduit $(x, y, z, t) = (-y, y, -2y - t, t) = y(-1, 1, -2, 0) + t(0, 0, -1, 1)$.
Réciproquement, de telles solutions vérifient bien (S').
Les deux vecteurs $\vec{u}_3(-1, 1, -2, 0)$ et $\vec{u}_4(0, 0, -1, 1)$ forment donc une famille génératrice de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ et ne sont pas liés, on peut conclure :

$$\boxed{(\vec{u}_3(-1, 1, -2, 0),\ \vec{u}_4(0, 0, -1, 1)) \text{ est une base de Ker } (\phi + Id_{\mathbb{R}^4})\,.}$$

On veut montrer maintenant que Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. Il y a plusieurs méthodes. Le plus simple est de remarquer que la famille $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. En effet, cette famille est composée de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4. Il suffit soit de prouver sa liberté (et donc de résoudre un système homogène), soit de vérifier que le déterminant de cette famille est non nul. C'est ce que nous allons faire.
Le déterminant Δ de la famille $\{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2,\ \vec{u}_3,\ \vec{u}_4\}$ vaut :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

en faisant les opérations : $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$. Il reste :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

$$\boxed{\text{Ker } (\phi - Id_{\mathbb{R}^4}) \text{ et Ker } (\phi + Id_{\mathbb{R}^4}) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^4.}$$

c) Posons $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1(1, 1, 0, 0),\ \vec{u}_2(-2, 0, 1, 1),\ \vec{u}_3(-1, 1, -2, 0),\ \vec{u}_4(0, 0, -1, 1)\}$.
Comme $(\vec{u}_1(1, 1, 0, 0),\ \vec{u}_2(-2, 0, 1, 1))$ est une base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$,

$$\phi(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \text{ et } \phi(\vec{u}_2) = \vec{u}_2.$$

Comme $(\vec{u}_3(-1, 1, -2, 0),\ \vec{u}_4(0, 0, -1, 1))$ est une base de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$,

$$\phi(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3 \text{ et } \phi(\vec{u}_4) = -\vec{u}_4.$$

La matrice $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$, réunion de la base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et de celle de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ est :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Cette matrice est diagonale et rapidement $(M_{\mathcal{B}'}(\phi))^2 = I_4$. On a donc $\phi^2 = Id_{\mathbb{R}^4}$ et ϕ est une symétrie vectorielle. C'est la symétrie par rapport à Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$, dans la direction de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$.

Remarque

On remarque que la matrice trouvée est diagonale. On parle de diagonalisation de ϕ. On dit aussi que $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ est sa matrice dans une base de diagonalisation. Vous avez peut-être déjà vu la méthode si vous êtes en fin de parcours d'une MPSI. En tout cas, la diagonalisation fait partie des valeurs sûres du programme de deuxième année dans toutes les filières. Pour diagonaliser, on ne sera alors plus guidé comme dans cet exercice mais on utilisera la notion de polynôme caractéristique. Pour finir cette remarque, si vous êtes en deuxième année ou un bon MPSI, reprenez **2)** en commençant par calculer le polynôme caractéristique de S.

3) Pour tout $n \geqslant 2$, il est clair que par définition, $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$.
Il reste à montrer que $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$. Si $A \in \mathcal{H}_n$,

$$\det\left(A^T A\right) = (\det(A))^2 = \det(nI_n) = n^n \Rightarrow \det(A) \neq 0.$$

Donc A est inversible. On a bien : $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n$. En conclusion,

$$\boxed{\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n.}$$

Soit $A \in \mathcal{B}_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $A_{i,j} \in \{-1, 1\}$, donc chaque coefficient de A a deux valeurs possibles. Et A possède n^2 coefficients. Compter le nombre de matrices A dans $\mathcal{B}_n$, c'est compter le nombre d'applications d'un ensemble E_1 de cardinal n^2 vers un ensemble E_2 de cardinal 2. Les n^2 éléments de E_1 sont les coefficients $A_{i,j}$ et les deux éléments de E_2 sont les entiers 1 et -1.
Il y a 2^{n^2} telles applications.

$$\boxed{\text{Le nombre d'éléments de } \mathcal{B}_n \text{ est } 2^{n^2}.}$$

4) a) Soit $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en A' par les $n-1$ opérations élémentaires :

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ L_i(A) \leftarrow A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A).$$

Écrivons : $\det(A') = \det\left(L_1\left(A'\right), L_2\left(A'\right), ..., L_n\left(A'\right)\right)$. (Un déterminant est une application multilinéaire de variables les lignes du déterminant aussi bien que les colonnes du déterminant car la transposition conserve la valeur du déterminant.)
Dans $\det(A')$, on remplace pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $L_i\left(A'\right)$ par $A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A)$.
Alors $\det(A')$ s'écrit, en explicitant ligne par ligne, sous la forme :

$$\det\left(L_1(A), A_{1,1}L_2(A) - A_{2,1}L_1(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ...,\right.$$

$$\left. A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A),\ ...,\ A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right).$$

On utilise la linéarité de ce déterminant selon la deuxième variable.
Donc $\det(A')$ se décompose en somme de

$$A_{1,1}\det\left(L_1(A), L_2(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right)$$

et de

$$-A_{2,1}\det\left(L_1(A), L_1(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right).$$

On remarque que le second déterminant est nul car la première et la seconde variables ont $L_1(A)$ pour valeur commune. Et ainsi, $\det(A')$ vaut :

$$A_{1,1} \det\left(L_1(A), L_2(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right).$$

Puis ensuite, on utilise la linéarité selon la troisième variable de ce dernier déterminant

$$A_{1,1} \det\left(L_1(A), L_2(A), A_{1,1}L_3(A) - A_{3,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right).$$

Il peut s'écrire comme somme de

$$A_{1,1}^2 \det\left(L_1(A), L_2(A), L_3(A), A_{1,1}L_4(A) - A_{4,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right)$$

et de

$$-A_{1,1}A_{3,1} \det\left(L_1(A), L_2(A), L_1(A), A_{1,1}L_4(A) - A_{4,1}L_1(A),\right.$$

$$\left. ...,\ A_{1,1}L_{n-1}(A) - A_{n-1,1}L_1(A),\ A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right.$$

Encore une fois, on remarque que le second déterminant est nul car sa première et sa troisième variables sont égales à $L_1(A)$. Ainsi $\det(A')$ vaut :

$$A_{1,1}^2 \det\left(L_1(A), L_2(A), L_3(A), A_{1,1}L_4(A) - A_{4,1}L_1(A), ..., A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right).$$

On continue ainsi de suite. De façon générale, en supposant $n \geqslant 4$, pour tout entier k entre 2 et $n-2$, $\det(A')$ vaut

$$A_{1,1}^k \det\left(L_1(A), L_2(A), ...,\ L_k(A),\ L_{k+1}(A),\right.$$

$$\left. A_{1,1}L_{k+2}(A) - A_{k+2,1}L_1(A),\ ...,\ A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right).$$

Il reste pour $k = n-2$:

$$\det(A') = A_{1,1}^{n-2} \det\left(L_1(A), L_2(A), ..., L_{n-1}(A), A_{1,1}L_n(A) - A_{n,1}L_1(A)\right).$$

En utilisant enfin la linéarité selon la dernière variable,

$$\det(A') = A_{1,1}^{n-1} \det\left(L_1(A), L_2(A), ..., L_{n-1}(A), L_n(A)\right).$$

On peut conclure :

$$\boxed{\det(A') = A_{1,1}^{n-1} \det(A).}$$

b) Les opérations élémentaires sur les lignes qui sont proposées transforment pour tout i entier de 2 à n, la ligne $L_i(A)$ en une ligne $L_i(A')$ de premier coefficient :

$$A'_{i,1} = A_{1,1}A_{i,1} - A_{i,1}A_{1,1} = 0.$$

Puis de second coefficient :

$$A'_{i,2} = A_{1,1}A_{i,2} - A_{i,1}A_{1,2},$$

et de façon générale pour tout j entier entre 2 et n, le $j^{\text{ème}}$ nouveau coefficient est :

$$A'_{i,j} = A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}.$$

Donc :

$$\boxed{A' \text{ est bien de la forme } \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ où } B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}).}$$

La matrice $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est inversible car en développant $\det(A')$ selon sa première colonne, on a :

$$\det(A') = A_{1,1}\det(B') = \pm\det(B').$$

Comme $A \in \mathcal{G}_n$, A est inversible et $\det(A) \neq 0$.
Donc $\det(A') \neq 0$ (avec **4) a)**) et par conséquent, $\det(B') \neq 0$.

$$\boxed{B' \text{ est inversible.}}$$

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![2, n]\!]$, le coefficient $A'_{i,j}$ est égal à $B'_{i-1,j-1}$. Donc $B'_{i-1,j-1}$ vaut $A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}$. On sait que les quatre coefficients $A_{1,1}$, $A_{i,j}$, $A_{i,1}$ et $A_{1,j}$ valent ± 1. Donc l'expression $A_{1,1}A_{i,j} - A_{i,1}A_{1,j}$ vaut $-1-(-1)$ ou $-1-1$ ou $1-(-1)$ ou enfin $1-1$, c'est-à-dire 0, -2 ou 2. On peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2,\ B'_{i,j} \in \{-2, 0, 2\}.}$$

c) On sait que $\det(A') = \pm\det(B')$. Comme pour tout $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, $B'_{i,j}$ appartient à $\{-2, 0, 2\}$, alors pour tout $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, $\dfrac{1}{2}B'_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$, notons $B'' = \dfrac{1}{2}B'$. Alors :

$$B' = 2B'' \Rightarrow \det(B') = 2^{n-1}\det(B'')$$

car B' et B'' sont des matrices carrées d'ordre $n-1$. Enfin, $\det(B'')$ est un entier relatif car ses coefficients sont des entiers relatifs (0, -1 ou 1 plus précisément).
Donc $\det(B')$ est un multiple de 2^{n-1} et il en est de même de $\det(A')$ et de $\det(A)$.

$$\boxed{\det(A) \text{ est un multiple de } 2^{n-1}.}$$

d) On suppose ici $A \in \mathcal{H}_n$ et $n \geqslant 3$. On sait, d'après plus haut, que :

$$(\det(A))^2 = n^n \Rightarrow |\det(A)| = n^{\frac{n}{2}}.$$

Ainsi, $\det(A)$ est un multiple de 2^{n-1} et vaut $\pm n^{\frac{n}{2}}$ (et est pair).
Supposons que n soit impair, alors $n^{\frac{n}{2}}$ est impair (s'il est entier). En effet, si par l'absurde, $n^{\frac{n}{2}}$ est un entier pair, n^n aussi (c'est même un multiple de 4) et comme n est impair, n^n est un produit d'entiers impairs et est donc impair, ce qui est absurde. On peut en déduire déjà que n est nécessairement pair.
Écrivons alors $n = 2p$, où p est un entier supérieur ou égal à 2. La quantité $\det(A)$ vaut $\pm(2p)^p$ et est un multiple de 2^{2p-1}. C'est-à-dire que 2^{2p-1} divise $2^p p^p$. Donc 2^{p-1} divise p^p et comme $p \geqslant 2$, en particulier 2 divise p^p. L'entier p est nécessairement pair et n est un multiple de 4.

$$\boxed{|\det(A)| = n^{\frac{n}{2}} \text{ et } n \text{ est un multiple de 4.}}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on compte le nombre d'applications d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, c'est n^p.

♡ Il faut se souvenir des opérations élémentaires qui ne changent pas la valeur d'un déterminant, ce sont les opérations du type $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + aC_j$, où $a \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, espace vectoriel de dimension finie. On peut par exemple montrer que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et que $\dim F + \dim G = \dim E$, ou alors que $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ et que $F + G = E$, ou alors directement que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ou encore en explicitant une base de F et une base de G et en montrant que la réunion de ces deux bases est une base de E.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on utilise la définition d'un déterminant en tant que forme multilinéaire alternée. Ainsi, si $C_1, ..., C_n$ sont ses colonnes, le déterminant $\det(C_1 + aC'_1, C_2, ..., C_n)$ est égal à la somme de $\det(C_1, C_2, ..., C_n)$ et de $a \det(C'_1, C_2, ..., C_n)$. De plus, $\det(C_1, ..., C_i, ..., C_i, ..., C_n)$ (donc deux colonnes sont identiques) est nul. On a le même type de propriétés si l'on remplace les opérations sur les lignes par des opérations sur les colonnes.

Formulaire

• On rappelle différentes formules concernant les déterminants de matrices carrées ($n \in \mathbb{N}^\star$, $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$) :

$$\det A^T = \det A,\ \det(AB) = \det A.\det B,\ \det(\alpha I_n) = \alpha^n.$$

• *Caractérisation d'une base avec les déterminants*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n, rapporté à une base $\mathcal{B}$. Et soit $\mathcal{F} = (\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n)$ une famille de n vecteurs.
On appelle déterminant de la famille $\mathcal{F}$ selon la base $\mathcal{B}$, le déterminant de la matrice représentative de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$. Ce déterminant est noté $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

• *Développement d'un déterminant selon une rangée*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **mineur d'indice** (i_0, j_0) le nombre : $\Delta_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0} \det(A_{i_0,j_0})$, où A_{i_0,j_0} est la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de la matrice A, en supprimant sa $i_0$ème ligne et sa $j_0$ème colonne.

Alors, pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j}$.

On dit que l'on a développé selon la $i_0$ème ligne.

Et, pour tout $j_0 \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0}$.

On dit que l'on a développé selon la $j_0$ème colonne.

Jour n^{o}11

Exercice 11.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

On considère ici le polynôme : $S = 4X^3 - 3X - 1$.

1) Vérifier que $\lambda = 1$ est une racine simple et $\mu = -\frac{1}{2}$ est une racine double de S.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et d'un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(1) \;\; X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.$$

(On ne cherchera pas à expliciter le triplet $(\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n)$.)

3) En remplaçant X par successivement λ et μ dans l'égalité (1), en déduire deux équations vérifiées par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

4) En dérivant l'égalité (1) puis en remplaçant X par μ dans la nouvelle égalité, en déduire une troisième équation vérifiée par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

5) Expliciter $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ et déterminer les limites de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11.2 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Soit X une $v.a.r$, définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, on admet que l'on définit Y une $v.a.r$ sur le même espace de probabilité par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\, dt.$$

1) Ici X suit la loi binomiale $B(n,p)$ avec $p \in]0,1[$.

a) Donner $X(\Omega)$, $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, puis $E(X)$ et $V(X)$.

b) Déterminer $Y(\Omega)$ et sa loi.

2) Ici $X(\Omega) = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ et $P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$.
Donner la loi de Y ainsi que $E(Y)$.

Énoncé

On considère ici le polynôme : $S = 4X^3 - 3X - 1$.

1) Vérifier que $\lambda = 1$ est une racine simple et $\mu = -\frac{1}{2}$ est une racine double de S.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ et d'un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(1)\ \ X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.$$

(On ne cherchera pas à expliciter le triplet $(\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n)$.)

3) En remplaçant X par successivement λ et μ dans l'égalité (1), en déduire deux équations vérifiées par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

4) En dérivant l'égalité (1) puis en remplaçant X par μ dans la nouvelle égalité, en déduire une troisième équation vérifiée par le triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

5) Expliciter $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ et déterminer les limites de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'écrit de l'épreuve de Mathématiques du Concours Commun INP (ex CCP), filière TSI.
Cet exercice tourne autour de la division euclidienne de X^n par un polynôme S de degré 3 fourni dans l'énoncé. On étudie alors les trois suites indexées par n formées des coefficients du reste (donc un polynôme de degré au plus 2) de cette division euclidienne. Attention, cette partie du programme, classique de la première année, est peu ou mal revue en deuxième année et les candidats sont parfois un peu léger au concours. Citons des extraits de rapport de jury qui mettent en avant le manque de préparation sur cette partie du programme.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> La division euclidienne des polynômes est souvent mal utilisée, en particulier les hypothèses vérifiées par le reste sont parfois passées sous silence.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2016
>
> On a relevé un point inquiétant : la maîtrise des polynômes, où nombreux sont les candidats qui ne connaissent pas le lien entre racines et factorisation.

1) On demande de montrer que les racines de S sont 1 et $-1/2$.

$\hookrightarrow$ Deux méthodes s'offrent à nous : développer $(X-1)(X+\frac{1}{2})^2$ ou alors calculer la valeur de S et de S' aux valeurs souhaitées.
C'est cette dernière façon que l'on développe dans le corrigé.

2) On justifie ici l'existence des trois suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on explicitera plus loin.

$\hookrightarrow$ C'est ici qu'il faut se rappeller ce qu'est une division euclidienne entre deux polynômes.

3) On veut expliciter dans la suite α_n, β_n, γ_n. On va trouver trois équations vérifiées par ces trois inconnues. Ici, on propose de trouver les deux premières équations.

$\hookrightarrow$ On exploite le fait que λ et μ sont les racines de S.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Le maniement des polynômes reste très inégal chez les candidats. On attend en particulier qu'ils sachent exploiter les racines d'un polynôme, factoriser ou faire le lien avec les coefficients.

4) On cherche ici la troisième équation qui nous manque pour pouvoir ensuite déterminer α_n, β_n, γ_n.

$\hookrightarrow$ Ici, on exploite le fait que μ est racine de S'.

5) On détermine α_n, β_n, γ_n en résolvant le système de trois équations (issu des questions **3)** et **4)**) dont les trois inconnues sont α_n, β_n, γ_n.
Il reste ensuite à faire tendre n vers $+\infty$.

$\hookrightarrow$ C'est la question de loin la plus longue et la plus calculatoire.
Tout l'art est de ne pas se perdre dans les calculs.

Corrigé

1) Soit le polynôme : $S = 4X^3 - 3X - 1$. Ses deux premiers polynômes dérivés sont :

$$S'(X) = 12X^2 - 3 \text{ et } S''(X) = 24X.$$

On a : $S(1) = 0$ et $S'(1) = 9 \neq 0$ donc 1 est une racine simple de S.
On a : $S\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $S'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ et $S''\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$ donc $-\frac{1}{2}$ est une racine double de S.

$$\boxed{\lambda = 1 \text{ est une racine simple et } \mu = -\tfrac{1}{2} \text{ est une racine double de } S.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut effectuer la division euclidienne de X^n par $S(X)$, où S est un polynôme de degré 3. Il existe alors un unique polynôme R de degré au plus 2 de $\mathbb{R}[X]$ et un unique polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(1)\ \ X^n = S(X)Q(X) + R(X).$$

Comme R est de degré au plus 2 et réel,

$$\boxed{\exists!\,(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3,\ \exists\, Q \in \mathbb{R}[X],\ X^n = S(X)Q(X) + \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n.}$$

3) Remplaçons (car c'est demandé) X par successivement λ et μ dans l'égalité (1), comme $S(\lambda) = 0$ et $S(\mu) = 0$, on a le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_n \lambda^2 + \beta_n \lambda + \gamma_n & = & \lambda^n \\ \alpha_n \mu^2 + \beta_n \mu + \gamma_n & = & \mu^n \end{array} \right. .$$

On remplace λ et μ par leurs valeurs, ce qui donne :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n & = & 1 \\ \frac{1}{4}\alpha_n - \frac{1}{2}\beta_n + \gamma_n & = & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{array} \right. .}$$

4) Comme demandé, dérivons l'égalité (1), ce qui donne l'égalité (2) :

$$(2)\ \ nX^{n-1} = S'(X)Q(X) + S(X)Q'(X) + 2\alpha_n X + \beta_n.$$

Puis remplaçons X par μ dans la nouvelle égalité (2).
Comme $S'(\mu) = S(\mu) = 0$, on a l'égalité $n\mu^{n-1} = 2\alpha_n\mu + \beta_n$.
Cela donne, en remplaçant μ par sa valeur,

$$\boxed{n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\alpha_n + \beta_n.}$$

5) Explicitons maintenant $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$. On regroupe les trois égalités trouvées à la question **3)** et à la question **4)**. Cela donne :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha_n + \beta_n + \gamma_n & = & 1 \\ \frac{1}{4}\alpha_n - \frac{1}{2}\beta_n + \gamma_n & = & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\alpha_n + \beta_n & = & n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{array}\right. .$$

Notons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes de ce système. $L_1 - L_2$ donne une nouvelle relation entre α_n et β_n. On la combine avec L_3 et on a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{3}{4}\alpha_n + \frac{3}{2}\beta_n & = & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\alpha_n + \beta_n & = & n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{array}\right. .$$

Notons L_1' et L_2' les deux lignes de ce nouveau système. L'opération $L_1' - \frac{3}{2}L_2'$ donne :

$$\left[\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right]\alpha_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Donc :

$$\alpha_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\alpha_n = \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

La ligne L_2' donne :

$$\beta_n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \alpha_n.$$

Ce qui donne, en remplaçant α_n par sa valeur :

$$\boxed{\beta_n = \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

Il reste à utiliser L_1 et donc : $\gamma_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$.

Cela donne :

$$\gamma_n = 1 - \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3}n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) - \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\gamma_n = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.}$$

Déterminons les limites de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour n tendant vers $+\infty$, en utilisant les croissances comparées, les quantités $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et $n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ tendent vers 0. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{4}{9},\ \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{4}{9} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \frac{1}{9}.}$$

Remarque

On retrouve le fait que la somme $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ valant 1, il en est de même des limites de ces trois suites.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre que a est racine d'ordre $k \in \mathbb{N}^\star$ de $P \in \mathbb{K}[X]$. On peut calculer $P^{(p)}(a)$ pour tout entier p de 0 à $k-1$ et remarquer que cette quantité est nulle et que $P^{(k)}(a) \neq 0$.

♡ Il faut se souvenir des croissances comparées quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, $n^a q^n$ tend vers 0 quand $a \in \mathbb{R}$ et $|q| < 1$.

Formulaire

• *Division euclidienne dans* $\mathbb{K}[X]$

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ alors :

$$\text{Il existe un couple unique } (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ tel que } \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}.$$

Énoncé

Soit X une $v.a.r$, définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilité, on admet que l'on définit Y une $v.a.r$ sur le même espace de probabilité par :

$$\forall \omega \in \Omega,\, Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\, dt.$$

1) Ici X suit la loi binomiale $B(n,p)$ avec $p \in]0,1[$.

a) Donner $X(\Omega)$, $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, puis $E(X)$ et $V(X)$.

b) Déterminer $Y(\Omega)$ et sa loi.

2) Ici $X(\Omega) = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ et $P(X = -1) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 2) = \frac{1}{3}$.
Donner la loi de Y ainsi que $E(Y)$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'écrit du concours Arts et Métiers ParisTech-ESTP-POLYTECH (ancienne banque E3A), filière PSI en 2016.
C'est un exercice qui permet d'étudier une variable aléatoire réelle construite à partir d'une autre variable aléatoire réelle. La principale qualité requise pour cet exercice est la rigueur. En effet, en probabilité, il faut toujours avoir en tête quel est l'objet qu'on manipule : un événement, une variable aléatoire, une probabilité, est-on dans l'univers Ω ou plutôt dans $X(\Omega)$ etc.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Des candidats confondent événements et probabilités, événements et variables aléatoires. Ces confusions sont lourdement sanctionnées.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2016
>
> En probabilité, le plus gros problème rencontré cette année est l'absence de formalisme rigoureux qui est souvent remplacé par une démonstration « avec les mains ». C'est dans ce domaine que nous observons les plus grandes confusions sur la nature des objets manipulés. Il n'est pas rare de voir des candidats intersecter des probabilités.

1) Ici, on suppose que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
Le but est d'en déduire pour ce choix de X la loi de Y.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2016
>
> Dans l'ensemble les lois usuelles sont connues mais leurs espérances et variances font trop souvent l'objet d'une redémonstration qui occasionne une perte de temps.

a) Ici, c'est juste pour placer une question de cours !

$\hookrightarrow$ Il s'agit de préparer la question **1) b)** mais ne bâclons pas quand il s'agit de réviser.

b) On demande de préciser $Y(\Omega)$, ce qui est indispensable avant de déterminer la loi de Y puis justement cette loi, c'est-à-dire la donnée des $P(Y = x_k)$, pour tout

$x_k \in Y(\Omega)$.

$\hookrightarrow$ On pourra différencier le cas $X(\omega) = 0$ du cas $X(\omega) = k$, pour k fixé dans $[\![1, n]\!]$.

2) Ici, on choisit une loi de probabilité pour X qui n'est pas une loi usuelle. Le but est d'expliciter la loi de Y puis, cerise sur la gâteau, on demande $E(Y)$.

$\hookrightarrow$ Ne pas oublier de préciser $Y(\Omega)$ ici aussi.

Corrigé

1) a) Ici, $X \hookrightarrow B(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$. D'après le cours, on a :

$$\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!],\ \forall x \in X(\Omega),\ P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},}$$

$$\boxed{E(X) = np \text{ et } V(X) = np(1 - p).}$$

b) Déterminons $Y(\Omega)$ et sa loi.

Ici, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Si $X(\omega) = 0$ alors $\max(X(\omega), t) = t$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Et donc : $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.

Si $X(\omega) = k$, où k est fixé dans $[\![1, n]\!]$ alors comme $\max(X(\omega), t) = k$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a alors l'égalité : $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 k\,dt = k$. Finalement,

$$\boxed{Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [\![1, n]\!].}$$

Dans ce cas, $P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) = P(X = 0) = q^n$ et :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(Y = k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On regroupe :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{r} \forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(Y = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \\ P\left(Y = \dfrac{1}{2}\right) = q^n \end{array}\right. .}$$

2) La somme des probabilités doit faire 1 : $P\left(X = \dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{12}$.

- Si $X(\omega) = -1$ ou si $X(\omega) = 0$ alors : $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.
- Si $X(\omega) = \dfrac{1}{2}$, $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 t\,dt = \frac{5}{8}$.

• Si $X(\omega) = 2$, $Y(\omega) = \displaystyle\int_0^1 2\,dt = 2$.

Réciproquement, on écrit : $P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P((X = -1) \cup (X = 0) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Et : $P\left(Y = \frac{5}{8}\right) = P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}$ et $P(Y = 2) = P(X = 2) = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, 2\right\} \text{ et } \begin{cases} P\left(Y = \frac{1}{2}\right) & = & \frac{1}{4} \\ P\left(Y = \frac{5}{8}\right) & = & \frac{5}{12} \\ P(Y = 2) & = & \frac{1}{3} \end{cases}.}$$

Il reste à calculer l'espérance de Y. On applique la formule du cours :

$$E(Y) = \frac{1}{2}P\left(Y = \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{8}P\left(Y = \frac{5}{8}\right) + 2P(Y = 2).$$

c'est-à-dire, en utilisant les résultats sur la loi de Y,

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} + \frac{25}{96} + \frac{2}{3} = \frac{101}{96}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X. On commence par déterminer $X(\Omega)$ puis on calcule $P(X = x_i)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$. On peut vérifier que $\displaystyle\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$.

Formulaire

• *Espérance d'une variable aléatoire réelle finie*

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur (Ω, P), telle que $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$.
Alors l'espérance de X est : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$.

• *Loi binomiale*

On suppose $n \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$.
On dit que X suit la **loi binomiale de paramètres** n et p si et seulement si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, où $q = 1 - p$.
Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Jour n^{o}12

Exercice 12.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Ici $n \geqslant 1$ et U_n est l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ complexes de 1. On pose :

$$f : U_n \to U_n,\ z \mapsto z^2.$$

1) Pour quelles valeurs de n, f est-elle bijective ?

2) Pour quelles valeurs de n, $f\,o\,f = Id_{U_n}$?

Exercice 12.2 — MPSI-PCSI-PTSI

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $B_{n,k} = \dbinom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $x \in [0,1]$, $P_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$. Montrer : $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1$.

2) Calculer les trois sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.

3) Dans la suite, on prend un réel $\epsilon > 0$. ***3) b) est admise pour PCSI-PTSI.***

a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$.

b) Montrer : $\exists\, \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1],\ |y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

4) On fixe une des valeurs $\alpha > 0$ déterminée à la question **3) b)**.
Soit, pour tout x fixé dans $[0,1]$, les ensembles :

$$A_x = \left\{k \in [\![0, n]\!],\ \left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha\right\} \text{ et } B_x = \left\{k \in [\![0, n]\!],\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha\right\}.$$

Montrer : $\displaystyle\sum_{k \in A_x} \left|f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. On pose aussi : $M = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Montrer : $\displaystyle\sum_{k \in B_x} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{2M}{n\alpha^2} x(1-x) \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$.

5) En déduire : $\forall x \in [0,1],\ |P_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\alpha^2}$.

6) Montrer alors que l'on peut choisir n tel que : $\displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |f(t) - P_n(f)(t)| \leqslant \epsilon$.

Énoncé

Ici $n \geqslant 1$ et U_n est l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ complexes de 1. On pose :

$$f : U_n \to U_n,\ z \mapsto z^2.$$

1) Pour quelles valeurs de n, f est-elle bijective ?

2) Pour quelles valeurs de n, $f\,o\,f = Id_{U_n}$?

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un exercice d'oral du concours Mines-Telecom posé en 2017 pour la filière MP mais accessible à toutes les filières. Il s'agit d'étudier une fonction de U_n (ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1, donc un prétexte pour réviser cette partie du cours) dans U_n. En dehors de connaissances sur les nombres complexes, il faut aussi se rappeler la notion de bijectivité (sur un ensemble fini) et celle de composition d'applications. Attention, tout démarre dans l'écriture correcte en extension de l'ensemble U_n. Donnons quelques extraits de rapport de jury qui montrent que les nombres complexes sont souvent délaissés dans les ultimes révisions avant le concours.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Les calculs dans le corps des complexes sont souvent mal menés.

> Rapport du jury Mines-Telecom 2016
>
> Le cours de première année est souvent très mal connu, par exemple celui sur les nombres complexes.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2016
>
> Un point est très inquiétant : la maîtrise des nombres complexes, où très peu de candidats sont capable de déterminer des racines $n^{\text{èmes}}$, pourtant explicitement au programme.

1) Ici on étudie la bijectivité de f. Bien entendu, il n'est pas question de dériver ! De toute façon, on ne sait pas dériver une fonction à variable complexe. L'idée est de commencer par faire les cas $n \in [\![1, 5]\!]$. Cela donne une idée de la condition sur n.

$\hookrightarrow$ U_n étant un ensemble fini, f est bijective si et seulement si $f(U_n) = U_n$. Posons pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$. On sait que $U_n = \{z_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$. Il faut donc que l'ensemble constitué des complexes $f(z_k)$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, parcourt tout U_n, si l'on veut que f soit bijective. Si cela ne vous suffit pas pour voir où on va, poser $n = 2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$ et élevé au carré les éléments de U_{2p+1}. Retrouve-t-on toutes les valeurs ? Puis faite de même en posant $n = 2p$.

2) Ici, on veut déterminer toutes les valeurs n telles que $f\,o\,f = Id_{U_n}$. On remarque déjà que si f vérifie cette relation alors f est bijective. Donc si n existe, il est inclus dans l'ensemble des n pour lesquels f est bijective. On peut encore une fois regarder ce qui se passe pour les premières valeurs de n pertinentes mais ici on s'apercevra après coup que cela risque de ne pas être suffisant pour conclure.

$\hookrightarrow$ L'égalité $f\,o\,f = Id_{U_{2p+1}}$ est équivalente (en reprenant la notation $z_k = e^{\frac{i2k\pi}{2p+1}}$) à : $f\,o\,f(z_k) = z_k$ pour tout $k \in [\![0, 2p]\!]$.

Corrigé

1) Ici $n \geqslant 1$ et U_n est l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ complexes de 1. Soit :

$$f : U_n \to U_n,\ z \mapsto z^2.$$

Posons pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$. On sait que $U_n = \{z_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.
Comme pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(z_k^2)^n = z_k^{2n} = (z_k^n)^2 = 1^2 = 1$, $f(U_n)$ est inclus dans U_n et la fonction f est bien définie. Donc l'énoncé est cohérent, c'est un bon départ.

U_n étant un ensemble fini de n éléments distincts, f est bijective si et seulement si $f(U_n) = U_n$. Il faut donc que l'ensemble constitué des complexes $f(z_k)$, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, parcourt tout U_n, si l'on veut que f soit bijective.

Commençons par les premières valeurs de n pour voir où l'on va.
- Si $n = 1$, $U_n = \{1\}$ et $f(U_n) = \{1\}$. Donc f est bijective.
- Si $n = 2$, $U_n = \{1, -1\}$ et $f(U_n) = \{1\}$. Donc f n'est pas bijective.
- Si $n = 3$, $U_n = \{1, j, j^2\}$, en posant $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $f(U_n) = \{1, j^2, j\}$ car $j^4 = j$ et f est bien bijective.
- Si $n = 4$, $U_n = \{1, i, -1, -i\}$ et $f(U_n) = \{1, -1\}$. Donc f n'est pas bijective.
- Si $n = 5$, $U_n = \left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{5}},\ e^{i\frac{4\pi}{5}},\ e^{i\frac{6\pi}{5}},\ e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\} \Rightarrow f(U_n) = \left\{1,\ e^{i\frac{4\pi}{5}},\ e^{i\frac{8\pi}{5}},\ e^{i\frac{2\pi}{5}},\ e^{i\frac{6\pi}{5}}\right\}$.

En effet, $e^{i\frac{12\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{16\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}}$. On a $f(U_n) = U_n$ et f est bijective.

On peut conjecturer : f est bijective si et seulement si n est impair.
Nous allons passer au cas général.

- **Supposons que** $n = 2p+1$, **où** p **est un entier supérieur ou égal à** 2.

(Donc ici l'on suppose que n est impair.) On écrit alors :

$$U_{2p+1} = \left\{1,\ e^{i\frac{2\pi}{2p+1}},\ e^{i\frac{4\pi}{2p+1}},\ ...,\ e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}},\ ...,\ e^{i\frac{2\times 2p\pi}{2p+1}}\right\}.$$

Si l'on pose $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}$, U_{2p+1} est donc constitué de l'ensemble des complexes z_k, quand k parcourt $[\![0, 2p]\!]$.
On remarque que $z_k^2 = z_{2k}$. On va découper l'ensemble U_{2p+1} en trois parties.
Si $k = 0$, $z_0^2 = 1 = z_0$.
Si $k \in [\![1, p]\!]$, z_k^2 prend les valeurs $z_2,\ z_4,\ ...,\ z_{2p}$, c'est-à-dire les complexes z_k de U_{2p+1} avec k pair.
Si $k \in [\![p+1, 2p]\!]$, z_k^2 prend les valeurs $z_{2p+2},\ z_{2p+4},\ ...,\ z_{2p+2p}$.
Or, si $l \in [\![1, p]\!]$,

$$z_{2p+2l} = e^{i\frac{2(2p+2l)\pi}{2p+1}} = e^{i\frac{2(2p+1+2l-1)\pi}{2p+1}} = e^{i2\pi} e^{i\frac{2(2l-1)\pi}{2p+1}} = z_{2l-1}.$$

L'ensemble $\{z_{2l-1},\ l \in [\![1, p]\!]\}$ correspond aux valeurs $z_1,\ z_3,\ ...,\ z_{2p-1}$, c'est-à-dire les complexes z_k de U_{2p+1}, où k est impair.
Finalement, $f(U_{2p+1})$ est bien l'ensemble $\{z_k,\ k \in [\![0, 2p]\!]\}$, c'est U_{2p+1}.
On peut conclure : si n est impair, f est bijective.

- **Supposons que** $n = 2p$, **où** p **est un entier supérieur ou égal à** 2.

(Donc ici on suppose que n est pair.) On écrit alors :

$$U_{2p} = \left\{1,\ e^{i\frac{\pi}{p}},\ ...,\ e^{i\frac{k\pi}{p}},\ ...,\ e^{i\frac{(p-1)\pi}{p}},\ -1,\ e^{i\frac{(p+1)\pi}{p}},\ ...,\ e^{i\frac{(2p-1)\pi}{p}}\right\}.$$

Si l'on pose $t_k = e^{i\frac{k\pi}{p}}$, U_{2p} est constitué de l'ensemble des complexes t_k, quand k parcourt $[\![0, 2p-1]\!]$.

On peut remarquer directement que $f(1) = f(-1)$ et que $1 \neq -1$. Ce qui suffit pour affirmer que f n'est pas injective. Donc f n'est pas surjective.

Remarque

On peut préciser un peu plus l'ensemble des valeurs atteintes pr f.
On va découper l'ensemble U_{2p} en trois parties.
Si $k = 0$, $t_0^2 = 1 = t_0$.
Si $k \in [\![1, p-1]\!]$, t_k^2 prend les valeurs t_2, t_4, ..., t_{2p-2}, c'est-à-dire les complexes t_k de U_{2p} avec k pair.
Si $k \in [\![p, 2p-1]\!]$, posons $t_k = t_{l+p}$, où $l \in [\![0, p-1]\!]$. Alors :

$$t_k^2 = e^{i\frac{2(p+l)\pi}{p}} = e^{i2\pi}e^{i\frac{2l\pi}{p}} = t_{2l}.$$

On retrouve les valeurs t_0, t_2, t_4, ..., t_{2p-2}.
Ainsi, les valeurs t_k, où k est impair, ne sont jamais atteintes par f.
Et on retrouve le fait que f n'est pas bijective.

On peut alors maintenant conclure.

$$\boxed{f \text{ est bijective si et seulement si } n \text{ est impair.}}$$

2) On veut maintenant déterminer les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels $f \, o \, f = Id_{U_n}$. On remarque que si f n'est pas bijective, cette égalité est impossible car elle implique que f est égale à sa fonction réciproque (donc que cette dernière existe).
Encore une fois, on peut prendre des premières valeurs de n pour voir ce qui se passe.

• Si $n = 1$, $U_n = \{1\}$ et $f = Id_{U_n}$ donc on a bien $f \, o \, f = Id_{U_n}$.
• Si $n = 3$, $U_3 = \{1, j, j^2\}$, alors $f^2(1) = 1$, $f^2(j) = f(j^2) = j^4 = j$ et enfin $f^2(j^2) = f(j^4) = f(j) = j^2$. Donc, on a bien $f \, o \, f = Id_{U_n}$.
• Si $n = 5$, $U_n = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$.
On a alors : $f(U_n) = \left\{1, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}\right\}$ dans cet ordre.
Puis $f^2(U_n) = \left\{1, e^{i\frac{8\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{2\pi}{5}}\right\}$ dans cet ordre. Donc ici, $f \, o \, f \neq Id_{U_n}$.

À priori, la conjecture est moins simple. Plutôt que de continuer avec quelques valeurs de n impaires supplémentaires, reprenons le cas général avec $n = 2p+1$, où p est un entier naturel. On écrit alors, comme à la question **1)**,

$$U_{2p+1} = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{2p+1}}, e^{i\frac{4\pi}{2p+1}}, ..., e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}, ..., e^{i\frac{2\times 2p\pi}{2p+1}}\right\}.$$

Si l'on pose encore $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}}$, U_{2p+1} est, rappelons-le, l'ensemble des complexes z_k, quand k parcourt $[\![0, 2p]\!]$.
L'égalité $f \, o \, f = Id_{U_{2p+1}}$ est équivalente à :

$$f \, o \, f(z_k) = z_k \text{ pour tout } k \in [\![0, 2p]\!].$$

Ce qui signifie :

$$e^{i\frac{4\times 2k\pi}{2p+1}} = e^{i\frac{2k\pi}{2p+1}} \text{ pour tout } k \in [\![0, 2p]\!].$$

Ce qui signifie encore :

$$e^{i\frac{6k\pi}{2p+1}} = 1 \text{ pour tout } k \in [\![0, 2p]\!].$$

Donc le rapport $\dfrac{6k\pi}{2p+1}$ doit être de la forme $2l\pi$, où l est un entier, pour tout $k \in [\![0, 2p]\!]$.
Donc le rapport $\dfrac{3k}{2p+1}$ doit être un entier, pour tout $k \in [\![0, 2p]\!]$.
On remarque que si $\dfrac{3}{2p+1}$ est un entier, tous les rapports $\dfrac{3k}{2p+1}$ le sont aussi. Et si $\dfrac{3}{2p+1}$ n'est pas un entier, il existe au moins un rapport $\dfrac{3k}{2p+1}$ qui ne l'est pas, c'est celui pour $k = 1$. Donc la condition cherchée est que 3 soit un multiple de $2p+1$. Il ne reste que $p = 0$ et $p = 1$. On retrouve $n = 1$ et $n = 3$. Finalement, si l'on avait continué $n = 5$, $n = 7$, $n = 9$, etc., on aurait peut-être conjecturé que $f\,o\,f = Id_{U_n}$ que pour $n = 1$ et $n = 3$, mais c'est dommage de perdre tant de temps.

$$\boxed{f\,o\,f = Id_{U_n} \text{ si et seulement si } n = 1 \text{ ou } n = 3.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est une bijection. Une première piste est de montrer que f est à la fois injective et surjective. Dans le cas particulier où E et F sont finis de même cardinal, l'injectivité (ou la surjectivité) seule suffit. C'est ce que l'on a dans cet exercice avec $E = F$. Une deuxième piste si E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, est de vérifier que f est strictement monotone et continue (en particulier, on peut utiliser la dérivabilité de f si c'est le cas). Une troisième piste est d'expliciter une fonction réciproque, ce qui revient à démontrer directement la bijectivité.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un complexe ω non nul. En général (c'est quasiment obligatoire si $n \geqslant 3$), on écrit ω sous forme trigonométrique $\omega = re^{i\phi}$, où $r > 0$. Puis on pose $z = \rho e^{i\theta}$ tel que $z^n = \omega$, on a donc :

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{i\phi} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \rho & = & r^{\frac{1}{n}} \\ \theta & = & \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{où} \quad k \in [\![0, n-1]\!] \end{array} \right. .$$

Formulaire

• *Racines $n^{\text{èmes}}$ de 1*

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$. Notons pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $z_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$. Alors l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 est :

$$\mathcal{U}_n = \{z_k,\ k \in \mathbb{Z}\} = \{z_0,\ z_1,\ ...,\ z_{n-1}\}.$$

Énoncé

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in [\![0,n]\!]$, $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $x \in [0,1]$, $P_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$.

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$. Montrer : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1$.

2) Calculer les trois sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.

3) Dans la suite, on prend un réel $\epsilon > 0$. ***3) b) est admise pour PCSI-PTSI***.

a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$.

b) Montrer : $\exists\, \alpha > 0$, $\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$, $|y-x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$.

4) On fixe une des valeurs $\alpha > 0$ déterminée à la question **3) b)**.
Soit, pour tout x fixé dans $[0,1]$, les ensembles :

$$A_x = \left\{ k \in [\![0,n]\!],\ \left| x - \frac{k}{n} \right| \leqslant \alpha \right\} \text{ et } B_x = \left\{ k \in [\![0,n]\!],\ \left| x - \frac{k}{n} \right| > \alpha \right\}.$$

Montrer : $\displaystyle\sum_{k \in A_x} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. On pose aussi : $M = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Montrer : $\displaystyle\sum_{k \in B_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{2M}{n\alpha^2} x(1-x) \leqslant \frac{M}{2n\alpha^2}$.

5) En déduire : $\forall x \in [0,1]$, $|P_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\alpha^2}$.

6) Montrer alors que l'on peut choisir n tel que : $\displaystyle\sup_{t \in [0,1]} |f(t) - P_n(f)(t)| \leqslant \epsilon$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'écrit du Concours National Commun Marocain pour la filière MP à la session 2016. On appelle ***polynômes de Bernstein***, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. On pose aussi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $P_n(f) : \forall x \in [0,1]$, $P_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$.
Le but du problème est d'étudier la suite $(P_n(f))_{n \geqslant 1}$ et de démontrer que cette suite converge uniformément vers f sur $[0,1]$. On peut plus généralement démontrer que si g est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de polynômes $(Q_n(g))_n$ qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$. C'est le théorème dit de Stone-Weierstrass. La convergence uniforme d'une suite de fonctions est une notion qui est vue en deuxième année dans les filières MP, PSI et PC. Ici, on utilise seulement

des outils de première année pour s'en sortir. Seule la question **3) b)** est un peu particulière car pour sa démonstration, on utilise une notion qui est seulement au programme de MPSI. Cet exercice fait bien le pont entre ce qu'est capable de produire un cours de première année et une notion importante de deuxième année : la convergence uniforme. Bref, il est tout à fait à sa place dans ce livre.
Pour en revenir au déroulé des questions, il est vrai que certaines questions sont un peu calculatoires (en particulier la question **2)**) mais il faut réfléchir et s'organiser dans son calcul tel que le souligne le rapport de jury suivant.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2016
>
> En ce qui concerne les compétences techniques et théoriques, on peut constater que les difficultés en calculs ont tendance à s'accentuer. La perte d'autonomie dans les capacités de simplification entraîne de nombreuses maladresses et l'impossibilité de terminer sans aide un calcul de difficulté raisonnable.

1) On établit ici deux propriétés intéressantes des polynômes $B_{n,k}$. On va montrer que la somme de tous ces polynômes a une valeur simple, qu'on vous laisse découvrir et aussi que $[0,1]$ est stable par toutes les fonctions $B_{n,k}$.

$\hookrightarrow$ Pour la seconde partie de **1)**, un petit raisonnement par l'absurde fera l'affaire.

2) On veut ici calculer trois sommes dans l'ordre :
$S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$, $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$ puis $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.
Il faut les calculer bien dans l'ordre car les sommes S_1 et S_2 servent pour calculer la somme S_3. Le calcul ressemble fortement à celui de l'espérance ou de la variance d'une loi binomiale (sans utiliser une somme de lois de Bernoulli indépendantes).
Les sommes S_1 et S_3 sont utiles plus loin (dans la question **3) a)**).

$\hookrightarrow$ Donnons quelques indications si vous avez du mal à démarrer. Pour S_1, on pourra utiliser $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1}$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et on se ramène à la formule du binôme de Newton. Pour S_2, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, on pourra utiliser la formule (que l'on vérifiera bien entendu, faut-il le signaler ?) : $k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$.

3) Dans cette question, on va établir deux résultats, utiles pour la suite. Le premier est calculatoire et le second est plus fin niveau raisonnement. Il utilise la logique des propositions.

> Rapport du jury Mines-Telecom 2016
>
> Les performances en logique sont souvent décevantes, on pourrait donner une longue liste des réponses farfelues données pour la négation d'une implication.

a) Pour tout $x \in [0,1]$, on veut calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$.

$\hookrightarrow$ C'est là que l'on utilise les sommes trouvées à la question **2)**.

b) On pose $\epsilon > 0$ et on veut montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$, si $|y-x| \leqslant \alpha$ alors $|f(y)-f(x)| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$.

$\hookrightarrow$ On fera un raisonnement par l'absurde et on commencera par écrire la négation de la proposition qu'il faut montrer. Le but est d'arriver à une impossibilité. On pourra introduire alors la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ puis deux autres suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ à valeurs dans $[0,1]$, donc bornées, et vérifiant deux inégalités à écrire. On utilisera ensuite le théorème de Bolzano-Weierstrass (admis) qui énonce que toute suite bornée contient au moins une suite extraite convergente. Enfin, on utilisera aussi la continuité de f autour de la limite de la suite extraite introduite.

4) Pour tout $x \in [0,1]$, on partitionne $[\![0,n]\!]$ en deux sous-ensembles A_x et B_x :

$$A_x = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ \left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha\right\} \text{ et } B_x = \left\{k \in [\![0,n]\!],\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha\right\}.$$

L'idée est ici de majorer $\displaystyle\sum_{k\in I}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x)$, où $I = A_x$ puis $I = B_x$.

On majore ces deux quantités, l'une en fonction de ϵ et l'autre en fonction de n, de x et de $M = \displaystyle\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$. Le but est d'en déduire une majoration de $|P_n(f)(x) - f(x)|$ à la prochaine question. Ci-dessous, on vous donne quelques indications mais si vous n'y arrivez pas, admettez la réponse et continuez.

$\hookrightarrow$ Pour la majoration de $\displaystyle\sum_{k\in A_x}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x)$, on utilise **3) b)** et $y = \frac{k}{n}$.

Pour celle de $\displaystyle\sum_{k\in B_x}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x)$, c'est plus compliqué. On commence par remarquer que $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \alpha$ entraîne $\dfrac{(k-nx)^2}{n^2\alpha^2} > 1$. Puis on majore $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|$ par $\dfrac{2M(k-nx)^2}{n^2\alpha^2}$. Puis, il reste à utiliser maintenant **3) a)**. Mais ce n'est pas fini, car il faut utiliser encore la majoration pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

5) On majore maintenant $|f(x) - P_n(f)(x)|$. On utilise ce qui précède.

$\hookrightarrow$ On remarque que $f(x) - P_n(f)(x)$ est égal à l'addition des deux sommes qui ont été majorées en valeur absolue à la question **4)**.

6) On majore $\displaystyle\sup_{t\in[0,1]}|f(t) - P_n(f)(t)|$ par ϵ, c'est-à-dire indépendamment de n.

On aboutit à ce que l'on appelle la convergence uniforme de $(P_n(f))_{n\geqslant 1}$ sur $[0,1]$.

$\hookrightarrow$ Il suffit de prendre n assez grand, essayez de préciser.

Corrigé

1) On écrit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1^n = 1$. Et :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1.}$$

Pour la suite, il suffit de remarquer que la quantité $B_{n,k}(x)$ est toujours positive ou nulle pour tout $x \in [0,1]$. En effet, $\binom{n}{k}$ est toujours positif pour tout k et tout n possibles, x^k et $(1-x)^{n-k}$ sont aussi toujours positifs (ou nuls) et le produit de ces trois quantités est une quantité positive ou nulle. Enfin, s'il existe $x_0 \in [0,1]$ et $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $B_{n,k}(x_0) > 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x_0) > 1$, ce qui est absurde. Donc :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1],\ 0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1.}$$

2) • Calculons $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}$. On écrit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k},$$

en utilisant le résultat : $\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

(On remarque que pour $k=0$, le terme $k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ est nul.)

Prouvons rapidement cette égalité. Si $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Reprenons le calcul de la somme $\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x)$. Elle vaut alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}x^{j+1}(1-x)^{n-j-1}\\
&= x\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{n-1-j},
\end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k-1$ puis la mise en facteur de x.
On obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = x\sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{n-1-j} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx.$$

• Calculons $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}$.
On va appliquer une méthode proche de ce qui précède en un peu plus poussée.
On écrit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

On utilise maintenant la même égalité que précédemment appliquée à n puis à $n-1$, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$.

$$k(k-1)\binom{n}{k} = (k-1)k\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

On transforme cette dernière somme, d'abord avec le changement d'indice $j = k-2$, puis en mettant $n(n-1)x^2$ en facteur, elle devient :

$$n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^{j+2}(1-x)^{n-2-j} = n(n-1)x^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{n-2-j}.$$

On reconnaît encore la formule du binôme de Newton. On a donc :

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2} = n(n-1)x^2.$$

• Calculons enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.

On utilise les deux résultats précédents. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx.$$

Il reste à réécrire les résultats des trois sommes sous forme de polynômes.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX, \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} = n(n-1)X^2, \sum_{k=0}^{n} k^2B_{n,k} = nX(1+(n-1)X).}$$

3) a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculons : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$.

On développe S :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left(x^2 + \frac{k^2}{n^2} - \frac{2k}{n}x\right)B_{n,k}(x) \\
&= x^2\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2B_{n,k}(x) - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x).
\end{aligned}$$

On applique la question **2)**. On a :

$$S = x^2 \times 1 + \frac{1}{n^2} \times \left[n(n-1)x^2 + nx\right] - \frac{2x}{n} \times nx.$$

Ce qui donne :

$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{n}x(1-x).}$$

b) Pour la suite de ce problème, on se donne un réel $\epsilon > 0$.
On veut montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$,

$$|y - x| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Nous allons suivre le synopsis suivant : on fera un raisonnement par l'absurde et on commencera par écrire la proposition négation de celle qu'il faut montrer. Le but est d'arriver à une impossibilité. On pourra introduire alors la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ puis deux autres suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ à valeurs dans $[0,1]$, donc bornées, et vérifiant deux inégalités à écrire. On utilisera ensuite le théorème de Bolzano-Weierstraβ (admis) qui énonce que toute suite bornée contient au moins une suite extraite convergente. Enfin, on utilisera aussi la continuité de f autour de la limite de la suite extraite introduite.

Commençons donc par écrire la négation de la proposition à montrer :

$$(\mathcal{Q})\ \ \forall \alpha > 0,\ \exists\, x \in [0,1],\ \exists\, y \in [0,1],\ \left(|x - y| \leqslant \alpha \text{ et } |f(x) - f(y)| > \tfrac{\epsilon}{2}\right).$$

On prend pour valeurs α les termes d'une suite qui tend vers 0, par exemple posons $\alpha_n = \frac{1}{n}$ pour tout n entier non nul.
Donc, d'après $(\mathcal{Q})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $u_n \in [0,1]$ et $v_n \in [0,1]$ tel que :

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - f(v_n)| > \frac{\epsilon}{2}.$$

Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont à valeurs dans $[0,1]$, et donc bornées. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit qu'une suite bornée a toujours une suite extraite convergente. Donc appliquons ce théorème à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$. Il existe une application p strictement croissante de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}$, telle que la suite $(u_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un réel $l \in [0,1]$. La suite $(v_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ a également pour limite l car :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \left|u_{p(n)} - v_{p(n)}\right| \leqslant \frac{1}{p(n)} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Puis, comme f est continue en l (car continue sur $[0,1]$),

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(u_{p(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} f\left(v_{p(n)}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_{p(n)}\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} v_{p(n)}\right) = f(l),$$

et ceci est en contradiction avec : $\forall n \geqslant 1,\ \left|f\left(u_{p(n)}\right) - f\left(v_{p(n)}\right)\right| > \frac{\epsilon}{2}$.
En conclusion, $(\mathcal{Q})$ est impossible et on a prouvé la proposition de l'énoncé.

Remarque

C'est le théorème de Heinrich Heine que l'on vient de montrer dans le cas d'une fonction continue sur $[0,1]$. Le théorème dit de façon plus générale que si f est continue sur un intervalle fermé et borné alors f est uniformément continue sur cet intervalle. La démonstration reste identique. Ce théorème de Heine ainsi que sa preuve est au programme en MPSI. D'où l'intérêt de l'avoir fait.

4) Soit x fixé dans $[0,1]$, posons $S_{A_x} = \sum_{k\in A_x} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] B_{n,k}(x)$.

Comme $k \in A_x$, on a l'inégalité : $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha$.

La fonction f vérifie le résultat de la question **3) b)** et donc :

$$\forall k \in A_x, \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}.$$

$B_{n,k}(x)$ étant positif, $|S_{A_x}| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \sum_{k\in A_x} B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) = \frac{\epsilon}{2}$.

On a donc prouvé :

$$\boxed{\sum_{k\in A_x} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{\epsilon}{2}.}$$

Posons, pour tout x fixé de $[0,1]$, $S_{B-x} = \sum_{k\in B_x} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}(x)$.

Pour $k \in B_x$, nous avons :

$$\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha \Rightarrow (k - nx)^2 > n^2\alpha^2 \Rightarrow \frac{(k-nx)^2}{n^2\alpha^2} > 1.$$

D'autre part, d'après la définition de $M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$, la quantité $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ est inférieure ou égale à $2M$. Nous pouvons écrire :

$$\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{2M(k-nx)^2}{n^2\alpha^2}.$$

Il en résulte, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
&|S_{B_x}| \\
&\leqslant \sum_{k\in B_x} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \\
&\leqslant \sum_{k\in B_x} \frac{2M(k-nx)^2}{n^2\alpha^2} B_{n,k}(x) \\
&= \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k\in B_x} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x).
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le résultat de la question **3) a)**. Et :

$$S_{B_x} \leqslant \frac{2M}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{2M}{\alpha^2} \times \frac{1}{n} x(1-x) = \frac{2M}{n\alpha^2} x(1-x).$$

Puis, on remarque par ailleurs que pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

En effet, si l'on pose $\phi(x) = x(1-x) - \frac{1}{4} = -x^2 + x - \frac{1}{4}$, $\phi'(x) = -2x + 1$.

Donc $\phi'(x) > 0$ (donc ϕ est croissante) pour tout $x \in [0, 1/2]$ et $\phi'(x) < 0$ (donc ϕ est décroissante) pour tout $x \in [1/2, 1]$. Comme $\phi(1/2) = 0$, on en déduit que $\phi(x) \leqslant 0$, pour tout $x \in [0, 1]$.
On a alors la seconde inégalité. On peut conclure :

$$\boxed{\sum_{k\in B_x} \left| f\left(x\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k}(x) \leqslant \frac{2M}{n\alpha^2} x(1-x) \leqslant \frac{M}{n2\alpha^2},\text{ où } M = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.}$$

5) On fixe $x \in [0, 1]$, et donc, en utilisant ce qui précède et les notations :

$$S_{A_x} = \sum_{k\in A_x} \left[f\left(x\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] B_{n,k}(x),\ S_{B_x} = \sum_{k\in A_x} \left[f\left(x\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] B_{n,k}(x),$$

on a :

$$\begin{aligned} &S_{A_x} + S_{B_x} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[f\left(x\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] B_{n,k}(x) \\ &= f(x)\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \\ &= f(x) - P_n(f)(x). \end{aligned}$$

Ainsi : $|f(x) - P_n(f)(x)| \leqslant |S_{A_x}| + |S_{B_x}| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{M}{2n\alpha^2}$. On a bien :

$$\boxed{|P_n(f)(x) - f(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}.}$$

6) Posons un réel $\epsilon > 0$, le réel $\alpha > 0$ est alors déterminé.
En choisissant un entier n tel que $n > \dfrac{M}{\epsilon\alpha^2}$, on a alors $\epsilon > \dfrac{M}{\alpha^2 n}$ et :

$$\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - P_n(f)(t)| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

On peut donc choisir n pour que :

$$\boxed{\sup_{t\in[0,1]} |f(t) - P_n(f)(t)| \leqslant \epsilon.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de l'existence de formules du type $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ou $k(k-1)\dbinom{n}{k} = n(n-1)\dbinom{n-2}{k-2}$, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et savoir les retrouver car elles sont pratiques pour calculer des sommes en se ramenant à la formule du binôme de Newton, soit directement, soit par changement d'indice.

Formulaire

• *Formule du binôme de Newton*

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (a,\, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$

• *Formule de Bolzano-Weierstrass (MPSI seulement)*

De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Plus précisément si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite bornée** de nombres réels, il existe $l \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, une application strictement croissante, telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = l$.

• *Continuité en un point (pour tous) et continuité uniforme (MPSI seulement)*

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction.
On dit que f est **continue en** $x_0 \in I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall x \in I,\ [|x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon]\,.$$

On dit que f est **uniformément continue sur** I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ [|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon]\,.$$

Une fonction uniformément continue sur I est continue en tout point de I. On n'a pas la réciproque sauf dans un cas particulier. Voir ci-dessous.

• *Théorème de Heinrich Eduard Heine (MPSI seulement)*

Toute fonction continue en tout point d'un segment est uniformément continue sur ce segment.

Jour n^{o}13

Exercice 13.1 **MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC**

1) Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Soient α_1, α_2, ..., α_p des nombres complexes de modules $\leqslant 1$.

Soient $\theta_1, ..., \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i$.

a) Démontrer que α_1, ..., α_p sont des complexes de modules exactement 1.

b) ***On suppose dans cette question seulement*** $p = 2$ ***et*** $\alpha_1 = 1$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_2 = e^{it}$. En développant $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.

c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, ..., a_n$ ses coefficients.
On a : $P = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ et on suppose $a_0 = a_1 > a_2 > ... > a_{n-1} > a_n > 0$.

a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.

b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X-1)P$.

c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1.

3) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, ..., a_n$ ses coefficients.
On a : $Q = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ et on suppose $0 < a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} = a_n$.
Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.

4) On pose $S_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $T_n(X) = S_n(nX)$, avec toujours $n \geqslant 2$.
Vérifier que S_n vérifie la condition de **2)** et T_n celle de **3)**.
En déduire un encadrement du module des racines complexes de S_n.

Exercice 13.2 **MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC**

On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f ?

3) Déterminer les variations de f.

4) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, quand x tend vers $+\infty$, En déduire que la courbe de f possède une asymptote oblique dont on précisera l'équation ainsi que sa position par rapport à la courbe.

5) Refaire une étude analogue quand x tend vers $-\infty$.

6) Dessiner l'allure de f en y faisant figurer les asymptotes.

Énoncé

1) Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Soient α_1, $\alpha_2, ...,$ α_p des nombres complexes de modules $\leqslant 1$.

Soient $\theta_1, ..., \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose : $\left| \sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i \right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.

a) Démontrer que α_1, ..., α_p sont des complexes de modules exactement 1.

b) ***On suppose dans cette question seulement*** $p = 2$ ***et*** $\alpha_1 = 1$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_2 = e^{it}$. En développant $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.

c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, ..., a_n$ ses coefficients.
On a : $P = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ et on suppose $a_0 = a_1 > a_2 > ... > a_{n-1} > a_n > 0$.

a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.

b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X - 1)P$.

c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1.

3) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, ..., a_n$ ses coefficients.
On a : $Q = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ et on suppose $0 < a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} = a_n$.
Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.

4) On pose $S_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ et $T_n(X) = S_n(nX)$, avec toujours $n \geqslant 2$.
Vérifier que S_n vérifie la condition de **2)** et T_n celle de **3)**.
En déduire un encadrement du module des racines complexes de S_n.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'écrit du concours commun Arts et Métiers ParisTech-ESTP-Polytech, filière MP en 2017 (banque E3A). Ici, le but est d'étudier le module des racines complexes de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les coefficients sont dans un ordre donné (croissant ou décroissant). C'est un exercice de réflexion avec quelques questions plutôt délicates mais que l'on peut admettre pour faire la suite.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Les questions portant sur les complexes ont révélé une absence de connaissance sur cette partie du programme et ont été tout simplement clivantes par rapport à l'appréciation des prestations.

1) Ici, on établit un résultat qui servira dans la question **2)**. On part d'une égalité entre le module d'une somme de complexes et la somme de réels positifs.

a) On veut montrer que les complexes $\alpha_1, ..., \alpha_p$ (qui sont déjà par hypothèse de modules inférieurs ou égaux à 1) sont de modules exactement égaux à 1.

$\hookrightarrow$ On peut se lancer dans un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $|\alpha_k| < 1$. Et on joue de l'inégalité triangulaire.

b) On est ici dans un cas particulier $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. L'idée est de préparer (en l'initialisant) la récurrence qui se fait à la question suivante.

$\hookrightarrow$ On fait un peu de calcul algébrique dans $\mathbb{C}$ et on peut utiliser une des deux formules d'Euler.

c) Ici, on montre le résultat qui servira dans la question **2)**. Commencer par le cas $p = 1$ et $p = 2$, ce qui va permettre de voir un peu où on va.

$\hookrightarrow$ On se doute qu'on va faire une récurrence. On pose bien l'hypothèse $\mathcal{H}_n$. Comme p est fixé dans l'exercice, on fait une récurrence indexée par n et à la fin, on pose $n = p$ pour conclure. On commence par le cas $n = 1$ et $n = 2$ en utilisant **1) b)**. Pour l'hérédité, qui est peut-être la question la plus délicate de l'exercice, on suppose $\mathcal{H}_n$ vraie et on pose $\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$ et $\alpha = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \theta_i \alpha_i$. Il faut montrer alors $|\alpha| \leqslant 1$ et donc $|\alpha| = 1$. Cela permet d'aboutir à $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie.

2) Ici on considère un polynôme $P = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ réel dont la particularité est que ses coefficients vérifient l'ordre $a_0 = a_1 > a_2 ... > a_n > 0$. Le but du jeu est de montrer que les racines (complexes) de P (donc il y en a n, certaines confondues ou non) ont un module strictement supérieur à 1.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> On attend en particulier des candidats qu'ils sachent exploiter ou rechercher les racines d'un polynôme, factoriser ou faire le lien avec les coefficients.

a) On élimine 0 et 1 des racines de P, ce qui est utile plus loin.

$\hookrightarrow$ C'est une conséquence bien entendu des contraintes sur les coefficients.

b) On écrit ici $(X-1)P$ sous forme développée. Pourquoi introduire $(X-1)P$? D'une part parce que si z_0 est une racine de P, comme $z_0 \neq 1$, z_0 est aussi une racine de $(X-1)P$ (et toutes les racines de $(X-1)P$ différentes de 1 sont les racines de P). Et d'autre part, car les propriétés des coefficients de la forme développée de $(X-1)P$ permettent d'appliquer le résultat de la question **1)**.

$\hookrightarrow$ Dans cet exercice, beaucoup de questions sont directement liées entre elles et cette question **2) b)** ne déroge pas à la règle.

c) Cette question aboutit au résultat pour lequel toute la question **2)** est bâtie.

$\hookrightarrow$ On pose z_0, racine de P (donc de $(X-1)P$) et on suppose (encore un raisonnement par l'absurde) que $|z_0| \leqslant 1$. On applique ensuite le résultat de **1)**, où les valeurs θ_i sont les coefficients du polynôme $(X-1)P$ et les α_i sont des puissances de z_0.

3) On prend ici un polynôme Q réel de degré n, dont les coefficients ont une contrainte symétrique de la question **2)**, c'est-à-dire $0 < a_0 < ... < a_{n-1} = a_n$. On veut logiquement le résultat symétrique, c'est-à-dire que les modules des racines complexes de Q sont strictement inférieurs à 1.

$\hookrightarrow$ Inutile de refaire le même cheminement que pour la question **2)**. Il suffit de s'y ramener. On remarque si z est une racine de Q alors $1/z$ est une racine de P.

4) Il est question ici de deux exemples de polynômes, le premier S_n vérifiant les conditions sur les coefficients des hypothèses de la question **2)** et le deuxième T_n vérifiant les hypothèses sur les coefficients de la question **3)**. On commence par montrer que c'est bien le cas. La fin de la question est alors d'en déduire des inégalités avec les modules des racines de ces polynômes.

$\hookrightarrow$ Pour l'encadrement des modules des racines de S_n, on utilisera le lien (à trouver) entre les racines de S_n et celles de T_n.

Corrigé

1) a) Raisonnons par l'absurde. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ et α_1, $\alpha_2, ...,$ α_p des nombres complexes tous de modules inférieurs ou égaux à 1 tels qu'il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $|\alpha_k| < 1$.

Soient $\theta_1, ..., \theta_p$ des nombres réels > 0 avec : $\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.

On a : $\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \theta_i |\alpha_i|$, en utilisant l'inégalité triangulaire. Ce qui donne :

$$\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| \leqslant \sum_{i=1, i\neq k}^{p} \theta_i |\alpha_i| + \theta_k |\alpha_k| \leqslant \sum_{i=1, i\neq k}^{p} \theta_i + \theta_k |\alpha_k|.$$

Et cette dernière quantité est donc strictement inférieure à $\sum_{i=1}^{p} \theta_i$.

On a : $\sum_{i=1}^{p} \theta_i = \left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| < \sum_{i=1}^{p} \theta_i$. C'est absurde. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, p]\!],\ |\alpha_k| = 1.}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_2 = e^{it}$. Développons $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$.

$$|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = (\theta_1 + \theta_2 e^{it})(\theta_1 + \theta_2 e^{-it}),$$

c'est-à-dire : $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 e^{-it} + \theta_1\theta_2 e^{it} + \theta_2^2$.
Et en utilisant la formule d'Euler : $e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$, l'on a :

$$(\theta_1 + \theta_2)^2 = |\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = \theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2 \cos t + \theta_2^2.$$

Cela entraîne : $2\theta_1\theta_2 = 2\theta_1\theta_2 \cos t \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi :

$$\boxed{\alpha_2 = e^{i2k\pi} = 1.}$$

c) Nous allons faire une récurrence.
Appelons $\mathcal{H}_n$, où $n \geqslant 1$, la proposition suivante :
« Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ n complexes de modules tous égaux à 1 et $\theta_1, ..., \theta_n$ n réels strictement positifs, alors si $\left|\sum_{i=1}^{n} \theta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$, nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$. »

• $\mathcal{H}_1$ est vraie car si $\left|\sum_{i=1}^{1} \theta_i \alpha_i\right| = \theta_1 |\alpha_1| = \sum_{i=1}^{1} \theta_i = \theta_1$, alors $|\alpha_1| = 1$ et il reste l'égalité $\theta_1 = \theta_1$ qui est toujours vraie.

• $\mathcal{H}_2$ est vraie elle aussi. En effet, supposons $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$ et $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$, alors on peut écrire, en mettant $\alpha_1 \neq 0$ en facteur :

$$|\theta_1\alpha_1 + \theta_2\alpha_2| = \theta_1 + \theta_2 \Rightarrow |\alpha_1| \left|\theta_1 + \theta_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| = \left|\theta_1 + \theta_2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right| = \theta_1 + \theta_2.$$

Comme $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ est un complexe de module 1, il peut s'écrire sous la forme e^{it} et on est ramené aux hypothèses de la question **1) b)** : $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

• Passons à l'hérédité. Supposons que $\mathcal{H}_n$ soit vraie au rang n, un entier $\geqslant 2$. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$, complexes de modules égaux à 1 et $\theta_1, ..., \theta_{n+1}$, réels strictement positifs, et supposons : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i \alpha_i\right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i$.

On commence par écrire cette égalité sous la forme :

$$(1) \quad \left|\sum_{i=1}^{n} \theta_i \alpha_i + \theta_{n+1}\alpha_{n+1}\right| = \sum_{i=1}^{n} \theta_i + \theta_{n+1}.$$

Posons $\theta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i$, on remarque que $\theta > 0$ et posons alors : $\alpha = \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i \alpha_i$.

(1) devient :

$$(2) \quad |\theta\alpha + \theta_{n+1}\alpha_{n+1}| = \theta + \theta_{n+1}.$$

Puis, on remarque : $|\alpha| \leqslant \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i |\alpha_i|$, en utilisant l'inégalité triangulaire.

Comme $|\alpha_i| = 1$ pour tout entier i, $|\alpha| \leqslant \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$.

Donc : $|\alpha| \leqslant 1$. Et d'après la question **1) a)**, (2) entraîne que $|\alpha| = 1$.

Cela implique : $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i \alpha_i\right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i$.

Il reste à appliquer $\mathcal{H}_n$ qui est vraie, donc : $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$.

Ainsi : $\alpha = \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i \alpha_i = \dfrac{1}{\theta}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i\right)\alpha_1 = \alpha_1$.

On applique maintenant $\mathcal{H}_2$ à (2). On a : $\alpha = \alpha_{n+1}$.

Finalement : $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = \alpha_{n+1}$. Et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geqslant 1,\ \mathcal{H}_p \text{ est vraie.}}$$

2) a) Comme $a_0 > 0$, 0 n'est pas racine de P. 1 est racine de P si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$. Or tous les coefficients a_k sont strictement positifs et cette dernière égalité est donc impossible. Et 1 ne peut pas être racine de P.

$$\boxed{\text{Ni 0, ni 1, ne sont des racines de } P.}$$

b) Déterminons les coefficients du polynôme $(X-1)P$.

On écrit : $(X-1)P = (X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

En changeant d'indice dans la première somme, on a :

$$(X-1)P = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Ce qui donne (en remarquant que $a_0 - a_1 = 0$) :

$$\boxed{(X-1)P = a_n X^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k) X^k - a_0.}$$

c) On veut démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1.
Supposons par l'absurde qu'il existe une racine z_0 de P telle que $|z_0| \leqslant 1$.
On sait que $z_0 \neq 1$ et donc que z_0 est aussi une racine de $(X-1)P$.
On peut écrire, en utilisant **2) b)** :

$$(1) \quad a_n z_0^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k)\, z_0^k = a_0.$$

Comme $a_0 > 0$, cette dernière égalité (1) est équivalente à :

$$(2) \quad \left| a_n z_0^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k)\, z_0^k \right| = a_0.$$

Or $a_n + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k) = a_1 = a_0$, ce qui permet d'écrire (2) sous la forme :

$$(3) \quad \left| a_n z_0^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k)\, z_0^k \right| = a_n + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k)\,.$$

Puis, on remarque que $a_n > 0$ et que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, la quantité $a_{k-1} - a_k$ est strictement positive, d'après l'énoncé.
On remarque aussi que $|z_0| \leqslant 1 \Rightarrow \left|z_0^k\right| \leqslant 1$ pour tout entier k.
On peut donc appliquer $\mathcal{H}_n$ (voir la question **1) c)**) en posant :

$$\theta_1 = a_n,\ \alpha_1 = z_0^{n+1} \text{ et } \forall k \in [\![2, n]\!],\ \theta_k = a_{k-1} - a_k,\ \alpha_k = z_0^k.$$

Il reste : $z_0^2 = z_0^3 = ... = z_0^{n+1}$. On divise par z_0 (qui est non nul car c'est une racine de P) et on obtient : $z_0 = z_0^2 = ... = z_0^n$.
Cela implique que $z_0 = 1$ ou $z_0 = 0$, ce qui est absurde. On peut conclure.

$$\boxed{\text{Les racines complexes de } P \text{ ont toutes un module} > 1.}$$

3) On commence par remarquer que Q n'a pas 0 et 1 pour racines.
Soit une racine z de Q. On écrit :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right) = 0.$$

Posons $P = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + ... + a_{n-1} X + a_n$.
On a : $z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow P\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ car $z^n \neq 0$.
Or P vérifie les conditions de la question **2)**. Comme $1/z$ est une racine de P, d'après **2)c)**, le module de $1/z$ est strictement supérieur à 1. On en déduit que $|z| < 1$. Comme z est une racine quelconque de Q, on peut conclure.

$$\boxed{\text{Les racines complexes de } Q \text{ ont un module} < 1.}$$

4) • <u>*Montrons que S_n vérifie la condition de* **2)**</u>

On écrit : $S_n(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + ... + \dfrac{X^n}{n!}$.
Si l'on pose $a_k = \dfrac{1}{k!}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $a_0 = a_1 > a_2 > ... > a_n > 0$.

$$\boxed{S_n \text{ vérifie la condition de la question } \mathbf{2)}.}$$

• *Montrons que T_n vérifie la condition de* **3)**

On écrit : $T_n(X) = S_n(nX) = 1 + nX + \dfrac{n^2X^2}{2!} + ... + \dfrac{n^nX^n}{n!}$.

Si l'on pose $a_k = \dfrac{n^k}{k!}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a déjà :

$$a_{n-1} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n \times n^{n-1}}{n \times (n-1)!} = \frac{n^n}{n!} = a_n.$$

Puis montrons que $a_k < a_{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$.
On a les équivalences pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$:

$$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow \frac{n^k}{k!} < \frac{n^{k+1}}{(k+1)!} \Leftrightarrow 1 < \frac{n}{k+1} \Leftrightarrow k < n-1.$$

Comme $k \in [\![0, n-2]\!]$, on peut conclure : $0 < a_0 < a_1 < ... < a_{n-1} = a_n$.

$\boxed{T_n \text{ vérifie la condition de la question } \mathbf{3)}.}$

• *Encadrement du module des racines complexes de S_n*

Soit z une racine de S_n alors $|z| > 1$ car S_n vérifie les hypothèses de la question **2)**.
Posons $z' = \dfrac{1}{n}z$. On a l'équivalence : $S_n(z) = S_n(nz') = 0 \Leftrightarrow T_n(z') = 0$.
Ainsi z' est une racine de T_n. Donc, d'après la question **3)**, $|z'| < 1$.
On a l'implication : $|z'| < 1 \Rightarrow |nz'| < n \Rightarrow |z| < n$.
On peut en déduire un encadrement de $|z|$.

$\boxed{\text{Si } z \text{ est une racine complexe de } S_n,\ |z| \in]1, n[.}$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que pour montrer une propriété vraie pour n valeurs, on peut faire un raisonnement par l'absurde.

♡ Il faut se souvenir que tout complexe de module 1 s'écrit e^{it}, où $t \in \mathbb{R}$.

Formulaire

• *Formules dans $\mathbb{C}$*

On a l'inégalité : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\bar{z}$, $\forall (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

• *Formules d'Euler*

Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$, on a les égalités : $2\cos t = e^{it} + e^{-it}$, $2i \sin t = e^{it} - e^{-it}$.

Énoncé

On note f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f ?

3) Déterminer les variations de f.

4) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, quand x tend vers $+\infty$, En déduire que la courbe de f possède une asymptote oblique dont on précisera l'équation ainsi que sa position par rapport à la courbe.

5) Refaire une étude analogue quand x tend vers $-\infty$.

6) Dessiner l'allure de f en y faisant figurer les asymptotes.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé au Concours d'admission dans les grandes écoles d'ingénieurs du Concours national du DEUG en 2009. Le programme de Mathématiques correspond à peu près au programme PCSI-PC.
Dans cet énoncé, seul le bagage de licence 1 et donc de première année de classes préparatoires suffit. On étudie dans cet exercice une fonction de façon assez complète. La difficulté principale de l'exercice est de savoir gérer les équivalents en 0 et les développements limités généralisés. Il faut aussi faire attention à ne pas écrire des expressions du genre $\sqrt{x}$ avec x négatif (par contre $\sqrt{-x}$ est correct si $x < 0$).

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Des difficultés perdurent sur les développements limités. Une méconnaissance des développements limités usuels pénalise l'avancée du candidat de manière générale et donne une impression négative de la prestation à l'examinateur.

1) On commence de façon classique par le domaine de définition D_f de f.

$\hookrightarrow$ On peut écrire des équivalences mais attention à ne rien oublier.

2) Ici, on étudie la dérivabilité de f sur D_f. On commence par étudier la dérivabilité en 0^-. On se doute alors que 0 est un bord de D_f. Pour la suite de l'exercice, avoir une expression la plus concise possible de f' sera utile.

$\hookrightarrow$ L'énoncé nous demande d'étudier la dérivabilité en 0 avant d'étudier si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f. On aurait pu commencer par étudier si f est de classe $\mathcal{C}^1$ directement.

3) On passe aux variations de f, sur le domaine de dérivabilité de f, c'est-à-dire D_f.

$\hookrightarrow$ Si vous avez bien préparé le terrain en **2)**, le signe de $f'(x)$ est rapide à trouver.

4) On étudie le comportement de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On remplace $f(x)$ par un développement limité généralisé du premier ordre qui nous donne non seulement l'existence d'une asymptote oblique mais son équation et la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote oblique.

$\hookrightarrow$ Rappelons la technique. On commence par poser $X = 1/x$ puis $f(x) = g(X)$. On fait un développement limité de g quand X tend vers 0^+. Pour cela, il faut utiliser un ou plusieurs développements limités usuels en 0.

5) On étudie le comportement de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, en refaisant un processus très semblable à celui de la question **4)**.

$\hookrightarrow$ Il faut faire attention à ne pas écrire des racines carrées avec des valeurs négatives dedans. Sinon, si vous avez fait **4)**, il n'y a aucune raison que vous n'y arriviez pas.

6) On trace la courbe. À ce niveau, toute la partie préparatoire au tracé a été faite.

$\hookrightarrow$ On n'oubliera pas de bien visualiser la position de la courbe par rapport à ses asymptotes obliques.

Corrigé

1) La quantité $\dfrac{x^3}{x-1}$ n'existe que si $x \neq 1$. Par ailleurs, elle doit être positive ou nulle pour définir sa racine carrée. On a (pour $x \neq 1$) :

$$\frac{x^3}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[x^3 \geqslant 0 \text{ et } x-1>0\right] \text{ ou } [x^3 \leqslant 0 \text{ et } x-1<0].$$

C'est-à-dire : $\dfrac{x^3}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow [x \geqslant 0 \text{ et } x>1]$ ou $[x \leqslant 0 \text{ et } x<1]$.
Le cas $[x \geqslant 0 \text{ et } x>1]$ donne $x>1$ et le cas $[x \leqslant 0 \text{ et } x<1]$ donne $x \leqslant 0$. Et :

$$\boxed{D_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[.}$$

2) • Étudions la dérivabilité de f à gauche en 0.
f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe.
Pour tout $x<0$, on écrit :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{x}{x-1}},$$

car $\sqrt{x^2} = |x|$. Comme $|x| = -x$ car $x<0$, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\sqrt{\frac{x}{x-1}},$$

quantité qui tend vers 0 quand x tend vers 0^-. En conclusion,

$$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en } 0 \text{ et } f'_g(0) = 0.}$$

• f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_f ?
On remarque que $f(x) = \sqrt{u(x)}$, où $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et sa dérivée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De même, la fonction $\sqrt{\ }$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, car $u(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
Il reste à traiter le cas $x = 0$. Pour cela, on va expliciter f' sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

On utilise la formule : $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.
On peut écrire alors, pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$:

$$u'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

Ce qui donne : $\forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}$.

Comme la dérivée à gauche en 0 est 0, pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0, à gauche, il faut que $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$. Nous allons transformer $\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ pour commencer. Comme $x < 0$,

$$\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\frac{-x^3}{1-x}} = |x|\sqrt{\frac{-x}{1-x}} = -x\sqrt{\frac{-x}{1-x}}.$$

Donc, pour $x < 0$, on écrit :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}} = \frac{1}{2}\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}\frac{1}{-x}\sqrt{\frac{1-x}{-x}} = \frac{\sqrt{-x}(2x-3)\sqrt{1-x}}{2(x-1)^2},$$

en remarquant que $x^2 = (-x)^2$. La quantité $f'(x)$ tend donc vers 0 quand x tend vers 0, par valeurs inférieures car $\sqrt{-x}$ tend vers 0. On peut conclure :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } D_f =]-\infty, 0]\cup]1, +\infty[.}$$

Remarque

Le calcul de $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ en amont s'avère inutile (à condition d'avoir précisé que f est continue sur D_f) puisque le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ nous dit que cette limite existe et vaut alors 0. Le problème, c'est que l'on demande ce calcul en premier, avant d'étudier si f est de classe $\mathcal{C}^1$.

3) Déterminons les variations de f.
Comme f est dérivable sur D_f, on étudie ses variations par le signe de sa dérivée.
On remarque, vue la dérivée, que son signe est celui de la quantité $2x - 3$.
Si $x \in]-\infty, 0]$, $2x-3 < 0$ et $f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
Puis si $x \in]1, 3/2]$, $2x - 3 < 0$ et $f'(x) < 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1, 3/2]$.
Enfin, si $x \in]3/2, +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]3/2, +\infty[$.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lll} f & \text{est strictement décroissante sur} &]-\infty, 0] \text{ et sur }]1, 3/2[\\ f & \text{est strictement croissante sur} &]3/2, +\infty[\end{array}\right. .}$$

4) Quand $x \to +\infty$, posons $X = \dfrac{1}{x}$, on écrit, pour $x > 1$, (soit $X \in]0, 1[$),

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = g(X) = \sqrt{\frac{1}{X^3\left(\frac{1}{X} - 1\right)}}.$$

C'est-à-dire : $g(X)=\sqrt{\dfrac{1}{X^2-X^3}}=\sqrt{\dfrac{1}{X^2}}\sqrt{\dfrac{1}{1-X}}=\dfrac{1}{|X|}(1-X)^{\frac{-1}{2}}$.
Comme $|X|=X$ car $X>0$, il reste : $g(X)=\dfrac{1}{X}(1-X)^{\frac{-1}{2}}$.
On applique maintenant un développement limité à g en $X=0$ à l'ordre 2 (car cela suffira comme nous allons le voir). On rappelle le développement limité au voisinage de $t=0$, à l'ordre 2, où α est un réel :

$$(1+t)^\alpha=1+\alpha t+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)t^2+o(t^2).$$

Ici nous l'appliquons à $\alpha=-1/2$ et $t=-X$, ce qui donne :

$$(1-X)^{\frac{-1}{2}}=1+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}.\left(\frac{-1}{2}-1\right)X^2+o(X^2),$$

c'est-à-dire : $(1-X)^{\frac{-1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}X+\dfrac{3}{8}X^2+o(X^2)$.
Cela donne : $g(X)=\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}X+o(X)$. On remplace X par $1/x$:

$$\boxed{f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).}$$

On peut en déduire que la courbe de f possède une asymptote oblique d'équation $y=x+\dfrac{1}{2}$. Comme la quantité $\dfrac{3}{8x}$ tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\boxed{\text{la courbe est donc au-dessus de son asymptote quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

5) Refaisons une étude analogue quand x tend vers $-\infty$.
Si $x\to-\infty$, posons $X=\dfrac{1}{x}$, on écrit, pour $x<0$, (soit $X<0$), comme dans **4)**,

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=g(X)=\sqrt{\frac{1}{X^3\left(\frac{1}{X}-1\right)}}=\frac{1}{|X|}(1-X)^{\frac{-1}{2}}.$$

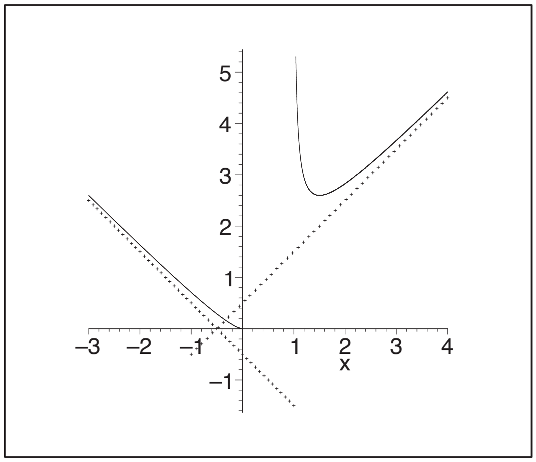
Comme $|X|=-X$ car $X<0$, il reste : $g(X)=-\dfrac{1}{X}(1-X)^{\frac{-1}{2}}$.
On applique maintenant le même développement limité à g en $X=0$ à l'ordre 2 que dans la question **4)**, $(1-X)^{\frac{-1}{2}}=1+\dfrac{1}{2}X+\dfrac{3}{8}X^2+o(X^2)$.
Cela donne : $g(X)=-\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{8}X+o(X)$. On remplace X par $\dfrac{1}{x}$:

$$\boxed{f(x)=-x-\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).}$$

On peut en déduire que la courbe de f possède une asymptote oblique d'équation $y=-x-\dfrac{1}{2}$. Comme la quantité $-\dfrac{3}{8x}$ tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\boxed{\text{la courbe est donc au-dessus de son asymptote quand } x \text{ tend vers } -\infty.}$$

6) Dessinons l'allure de f en y faisant figurer les asymptotes.



Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on étudie le comportement d'une fonction f quand x tend vers $\pm\infty$. On pose $X = \dfrac{1}{x}$ et comme X tend vers 0, on pose $g(X) = f(x)$ et on étudie le comportement de g au voisinage de 0.

♡ Il faut se souvenir des formules de dérivation de fonctions composées, après avoir indiqué que les fonctions en jeu sont toutes dérivables sur leur domaine de définition.

Formulaire

• *Définition du nombre dérivé en a*

On dit que f, fonction de I contenant a dans $\mathbb{R}$, est dérivable en a lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ défini pour $x \neq a$, admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, cette limite s'appelle **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$.

On dit que f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ défini pour $x \neq a$, admet une limite finie quand x tend vers a à droite (repectivement à gauche). Dans ce cas, cette limite s'appelle **nombre dérivé à droite** (respectivement **nombre dérivé à gauche**) de f en a et est notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).

• *Théorème de prolongement de fonction de classe $\mathcal{C}^1$*

Soit $a \in I$ et f définie et continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{t \to a} f'(t) = l$.

Alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans I (notée encore f) et telle que l'on ait l'égalité : $f'(a) = l$.

• *Développement limité de $(1+t)^\alpha$ au voisinage de 0*

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}t^n + o(t^n), \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Jour n^{o}14

Exercice 14.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Pour tout couple $(p,k) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on note $S(p,k)$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S(p,0) = 0$.

1) Quelques cas particuliers. On suppose $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Que vaut $S(p,n)$ pour $p < n$? Déterminer $S(n,n)$.

b) Déterminer $S(n+1,n)$.

2) Quelques formules utiles. On suppose $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

b) Montrer que si $q \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,q]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{q}\binom{q}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{q-k}$.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{q}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \in [\![0,n[\![\\ (-1)^n & \text{si} \quad k = n \end{cases}$.

3) Recherche d'une expression générale. On suppose $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.

a) Combien y a-t-il d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

b) Pour $p \geqslant n$, établir : $\displaystyle n^p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)$, où $S(p,0) = 0$ par convention.

c) En déduire que pour $p \geqslant n$, $\displaystyle S(p,n) = (-1)^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p$.

Exercice 14.2 — MPSI-PCSI-PTSI

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. On note p et q ses deux racines carrées.
On se place dans le plan euclidien. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M.

Énoncé

Pour tout couple $(p,k) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, on note $S(p,k)$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on pose $S(p,0) = 0$.

1) Quelques cas particuliers. On suppose $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Que vaut $S(p,n)$ pour $p < n$? Déterminer $S(n,n)$.

b) Déterminer $S(n+1,n)$.

2) Quelques formules utiles. On suppose $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.

b) Montrer que si $q \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,q]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{q}\binom{q}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{q-k}$.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{q}{k} = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & k \in [\![0,n[\![\\ (-1)^n & \text{si} & k = n \end{array}\right.$.

3) Recherche d'une expression générale. On suppose $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.

a) Combien y a-t-il d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

b) Pour $p \geqslant n$, établir : $\displaystyle n^p = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)$, où $S(p,0) = 0$ par convention.

c) En déduire que pour $p \geqslant n$, $\displaystyle S(p,n) = (-1)^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p$.

Analyse stratégique de l'énoncé

L'exercice reprend un morceau du sujet de l'écrit du Concours Centrale Supélec Mathématiques II dans la filière PC en 2016. La seule modification par rapport à l'énoncé original concerne l'ajout de **2)** pour pouvoir faire **3) c)**. En effet pour faire cette dernière question, on utilise les résultats d'une partie du sujet que l'on n'a pas repris. Maintenant, faire **2)** qui a été ajoutée reste un bon entraînement pour les concours, rassurez vous. Cet exercice traite de dénombrement comme vous avez dû vous en rendre compte. Cette partie du programme est souvent sous-jacente à l'étude d'une loi de probabilité. Ici, il n'en est rien. C'est du pur dénombrement. Ce type d'exercice ne se rencontre pas fréquemment dans les concours mais quand il tombe, il peut faire mal car c'est typiquement une partie du cours faite en première année et oubliée en fin de deuxième année car il y a des priorités. On comble cette lacune avec la présence de cet exercice dans cet ouvrage. Plus précisément, il s'agit d'étudier le nombre de surjections d'un ensemble fini dans un autre. S'il s'agit du nombre d'applications, de bijections, voire d'injections, c'est facile car c'est dans le cours (si l'on s'en souvient !). Pour le nombre de surjections, c'est bien plus compliqué mais cela reste un exercice classique traité souvent en devoir à la maison en première année. Signalons pour finir que cet exercice a une version Python qu'on n'a pas la place de développer ici mais vous pouvez gratuitement vous y pencher.

Rapport du jury Concours Commun INP (ancien CCP) 2015

Parmi les fautes les plus pénalisantes : résultats basiques de cours non maîtrisés (y compris les résultats acquis en première année).

1) On note donc $S(p,k)$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$. Dans cette question, on étudie quelques cas particuliers de p et de k pour faire un peu le tour de la bête.

a) On commence par $S(p,n)$ pour $p \leqslant n$.

$\hookrightarrow$ C'est facile mais on doit déjà faire appel au cours.

b) On attaque le cas $S(p,n)$ avec $p = n+1$. On rentre dans le vif du sujet avec du raisonnement par dénombrement.

$\hookrightarrow$ Soit f une telle surjection. Les éléments de $[\![1,n]\!]$ sont tous atteints une fois sauf l'un d'entre eux qui est atteint deux fois. Il y a n choix possibles pour cette image. Cet élément de $[\![1,n]\!]$ étant fixé, il a deux antécédents dans $[\![1,n+1]\!]$. Maintenant, il faut lancer un premier vrai dénombrement.

2) Ici, on montre comme l'indique l'énoncé, quelques formules utiles pour la suite. Ceci dit, ces formules peuvent se retrouver dans d'innombrables autres sujets d'écrits ou d'oral. Il y a trois façons classiques de les montrer : soit avec des formules directes, genre formule du binôme de Newton, soit par un dénombrement, soit enfin par une récurrence. Attention, pour certaines, une des pistes est quasiment obligatoire. Ici, c'est plutôt des applications de formules qui permettent de s'en sortir.

a) Ici, on veut montrer la nullité d'une somme.

$\hookrightarrow$ Vous avez reconnu quelle formule utiliser, j'espère ?

b) Ici, on demande une égalité entre des coefficients binomiaux.

$\hookrightarrow$ Il faut utiliser les écritures avec les factorielles, bien entendu !

c) On veut maintenant montrer qu'une certaine somme est nulle sauf dans un cas particulier.

$\hookrightarrow$ Pour montrer cette égalité, il faut utiliser celles montrées en **2) a)** et en **2) b)**.

3) Maintenant, on passe vraiment au problème : trouver une expression de $S(p,n)$, nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On suppose rapidement $p \geqslant n$.

a) On demande pour commencer le nombre d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Ce résultat est utile pour comprendre ce que l'on va faire à la question suivante.

$\hookrightarrow$ Allez, encore une question de cours !

b) Ici on établit un lien entre le nombre d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$, pour k variant de 1 à n.
(On a la convention $S(p,0) = 0$ pour étendre à $k = 0$.)

$\hookrightarrow$ On peut procéder en deux étapes. On peut montrer d'abord que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, le nombre d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ayant un ensemble image à k éléments est égal à $\displaystyle\binom{n}{k} S(p,k)$. Puis ensuite, on peut regrouper toutes les applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ suivant le cardinal k de leur ensemble image, l'entier k pouvant varier de 1 à n.

c) Enfin, on démontre une égalité permettant le calcul de $S(p,n)$ pour $p \geqslant n$.
On peut d'ailleurs retrouver $S(n,n)$ et $S(n+1,n)$, à votre libre choix.

$\hookrightarrow$ On utilise **3)b)** en remplaçant j^p par une certaine somme.

On aboutit à une somme double à inverser : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}$.

Corrigé

1) a) $S(p,n)$ représente le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. Or, tout élément de l'ensemble de départ a une image et une seule et si $n > p$, certains éléments de l'ensemble d'arrivée ne seront pas atteints. Il n'existe aucune surjection de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour } p < n,\ S(p,n) = 0.}$$

$S(n,n)$ est le nombre de surjections d'un ensemble E de cardinal n dans un ensemble F de même cardinal. On sait d'après le cours qu'alors f est une surjection de E sur F si et seulement si f est une injection de E sur F et si et seulement si f est une bijection de E sur F. En conclusion, $S(n,n)$ est aussi le nombre de bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire aussi le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ et :

$$\boxed{S(n,n) = n!}$$

b) On veut déterminer $S(n+1,n)$, c'est-à-dire le nombre de surjections de $[\![1,n+1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Soit f une telle surjection. Les éléments de $[\![1,n]\!]$ sont tous atteints une fois sauf l'un d'entre eux qui est atteint deux fois. Il y a n choix possibles pour cette image. Cet élément de $[\![1,n]\!]$ étant fixé, il a deux antécédents dans $[\![1,n+1]\!]$ et il y a $\binom{n+1}{2}$ façons de choisir ces deux antécédents. Enfin, les $n+1-2 = n-1$ antécédents restants de $[\![1,n+1]\!]$ sont en bijection avec les $n-1$ éléments de $[\![1,n]\!]$ qui n'ont qu'un antécédent. Il y a $(n-1)!$ telles bijections. Au total,

$$\boxed{S(n+1,n) = n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}.}$$

2) a) Partons de la formule du binôme de Newton, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}.$$

On pose $x = -1$. On obtient (car n est non nul) :

$$\boxed{(1+(-1))^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0^n = 0.}$$

b) On suppose $q \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![0,q]\!]$, on développe alors :

$$\binom{n}{q}\binom{q}{k} = \frac{n!}{q!(n-q)!} \times \frac{q!}{k!(q-k)!} = \frac{n!q!}{q!(n-q)!k!(q-k)!} = \frac{n!}{(n-q)!k!(q-k)!}.$$

Il reste à passer à l'autre membre de l'égalité.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{q-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(q-k)!(n-k-(q-k))!}\\ &= \frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(q-k)!(n-q)!} = \frac{n!}{k!(q-k)!(n-q)!}\end{aligned}.$$

Les deux quantités sont bien égales.

$$\boxed{\text{Pour } q\in[\![0,n]\!] \text{ et } k\in[\![0,q]\!],\ \binom{n}{q}\binom{q}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{q-k}.}$$

c) On suppose $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{q}{k}=\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{k}\binom{n-k}{q-k},$$

en utilisant **2) b)**. Ce qui donne :

$$\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{q}{k}=\binom{n}{k}\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n-k}{q-k},$$

en mettant $\binom{n}{k}$ en facteur. Puis :

$$\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{q}{k}=\binom{n}{k}\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^{r+k}\binom{n-k}{r}=(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r\binom{n-k}{r},$$

en effectuant dans la somme le changement d'indice $r=q-k$.

On applique le résultat de **2) a)** : $\displaystyle\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r\binom{n-k}{r}=0$ si $n-k>0$.

Si par contre $k=n$,

$$\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{q}{k}=(-1)^n\binom{n}{n}\sum_{r=0}^{0}(-1)^r\binom{0}{r}=(-1)^n(-1)^0\binom{0}{0}=(-1)^n.$$

$$\boxed{\text{Ainsi : }\sum_{q=k}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{q}{k}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad k\in[\![0,n[\![\\ (-1)^n & \text{si} \quad k=n\end{cases}.}$$

3) a) D'après le cours, comme $[\![1,p]\!]$ est de cardinal p et $[\![1,n]\!]$ est de cardinal n,

$$\boxed{\text{il y a } n^p \text{ applications de } [\![1,p]\!] \text{ dans } [\![1,n]\!].}$$

b) Pour $p\geqslant n$, nous devons établir : $n^p=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(p,k)$, où $S(p,0)=0$.

<u>*Première étape*</u>

Montrons que pour tout entier $k\in[\![1,n]\!]$, le nombre d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ayant un ensemble image à k éléments est égal à $\binom{n}{k}S(p,k)$.

En effet, pour une telle application f, l'ensemble image $\operatorname{Im} f$ est une partie de $[\![1,n]\!]$

à k éléments, il y a donc $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces images.
Ce choix étant fait, une telle application de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est une surjection de $[\![1,p]\!]$ sur $\operatorname{Im} f$. Il y a $S(p,k)$ telles surjections.
Finalement, il y a bien $\binom{n}{k}S(p,k)$ applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ayant un ensemble image à k éléments.

Deuxième étape

Montrons la formule demandée dans l'énoncé.
Il y a n^p applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. On peut regrouper ces applications suivant le cardinal k de leur ensemble image, l'entier k peut varier de 1 à n. Pour chaque valeur k, on sait qu'il y a $\binom{n}{k}S(p,k)$ applications possibles.
En sommant k de 1 à n, on en déduit (en posant $S(p,0)=0$) :

$$\boxed{n^p = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S(p,k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S(p,k).}$$

c) On va en déduire, pour $p \geqslant n$, $S(p,n) = (-1)^n \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p$.
Partons du second membre de l'égalité à montrer et arrangeons là pour aboutir à la quantité voulue, c'est-à-dire $S(p,n)$. On a :

$$(-1)^n \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p = (-1)^n \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\left[\sum_{k=1}^{j}(-1)^j\binom{j}{k}S(p,k)\right],$$

en utilisant **3) b)** avec j à la place de n. Ce qui donne :

$$(-1)^n \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p = (-1)^n \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{j}{k}S(p,k).$$

La double somme porte sur tous les couples (j,k) tels que $j \in [\![1,n]\!]$ et $k \in [\![1,j]\!]$. L'ensemble des points de coordonnées (j,k) définit une zone triangulaire qui est parcourue colonne par colonne si Oj représente l'axe des abscisses et Ok celui des ordonnées : pour la colonne $j=1$, k va de 1 à 1, pour la colonne $j=2$, k va de 1 à 2 etc. et pour la colonne $j=n$, k va de 1 à n. Si l'on fait le parcours ligne par ligne, pour la ligne $k=1$, j va de 1 à n, pour la ligne $k=2$, j va de 2 à n, etc. et pour la ligne $k=n$, j va de n à n. Ainsi k varie alors de 1 à n et j de k à n.
Cela signifie que l'interversion des sommes : $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}$ est licite.
Nous le faisons donc. Notre somme de départ devient :

$$\begin{aligned}(-1)^n \sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{j}{k}S(p,k) \\ &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=k}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{j}{k}\right]S(p,k)\end{aligned}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{j}{k}$ vaut 0 si $k<n$ et $(-1)^n$ si $k=n$, d'après **2) c)**.

Il reste : $(-1)^n\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p=(-1)^n(-1)^nS(p,n)$. On peut conclure :

$$\boxed{\text{pour } p\geqslant n,\ S(p,n)=(-1)^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}j^p.}$$

Remarque (pour ceux qui en veulent toujours plus)

Pour compléter vos connaissances, sachez que l'on a deux pistes possibles pour déterminer le nombre de surjections, la première est de trouver une forme explicite de $S(p,n)$ comme ici et la seconde est de déterminer une relation de récurrence. On vous propose en exercice ouvert cette seconde approche.

Montrer que si $p\in]\!]0,n-1]\!]$, *alors* $S(p,n)=n\left(S(p-1,n)+S(p-1,n-1)\right)$.

Indication : étant donné une surjection g de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, considérer sa restriction g_1 à $[\![1,p-1]\!]$. On distinguera alors deux cas suivant que g_1 est elle-même surjective ou non.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\displaystyle\binom{n}{p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

♡ Il faut se souvenir que le nombre d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est n^p et que le nombre de bijections entre deux ensembles de cardinal n est $n!$

♡ Il faut se souvenir que si $\operatorname{Card}E=\operatorname{Card}F$ et si f est une application de E dans F alors f est une injection si et seulement si f est une surjection et si et seulement si f est une bijection.

♡ Il faut se souvenir que les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^p$ sont directement issues de la formule du binôme de Newton, la première est $(1+1)^n=2^n$ et la seconde, plus générale, est $(1+x)^n$.

♡ Il faut se souvenir de l'interversion des sommes : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}$, qui peut être utile. On peut s'entraîner à la justifier en passant par la somme « double » : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}$.

Formulaire

• *Formule du binôme de Newton*

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^pb^{n-p}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p=(a+b)^p$.

Énoncé

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$. On note p et q ses deux racines carrées.
On se place dans le plan euclidien. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que les points M, P et Q d'affixes respectives z, p et q forment un triangle rectangle en M.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral de Centrale-Supélec pour la filière PSI en 2009. Ce type d'exercice s'est un peu marginalé mais malheureusement peut tomber aux concours. Et il faut s'y préparer. En effet, le pont entre les nombres complexes (appelés des affixes) et les points du plan doit être connu. Et par voie de conséquence, l'utilisation des nombres complexes pour résoudre certains problèmes de géométrie (alignement et orthogonalité notamment) est au programme de la première période de la première année des classes préparatoires. Et cela est vrai pour toutes les filières (nous avons exclu les 1TSI et les 1TPC ici car la correspondance entre les transformations classiques du plan et certaines transformations complexes ne sont pas au programme). Maintenant, l'accent est plus marqué sur la Géométrie, il est vrai, en PTSI et en PT. Si vous arrivez de cette filière, on vous conseille donc grandement ce type d'exercice et donc pour commencer celui-là. Attention, pour les élèves provenant de MPSI ou de PCSI, n'allez pas croire par contre que cet exercice est interdit ! Comme on l'a déjà dit, il faut se préparer à tout.
Revenons maintenant à notre exercice qui est l'occasion pour vous de revoir l'utilisation des complexes dans les problèmes de géométrie plane. La partie technique va être l'occasion de développer ces rappels bien qu'ils n'aient pas un rapport étroit avec la planche elle-même. On révise aussi, à l'occasion, les racines d'un complexe donné.
Plus précisément, on se donne un point M d'affixe z et les deux racines carrées p et q de z. Il faut trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ce triangle soit rectangle en M. On écarte de suite $z = 1$ car alors $z = p = q$.

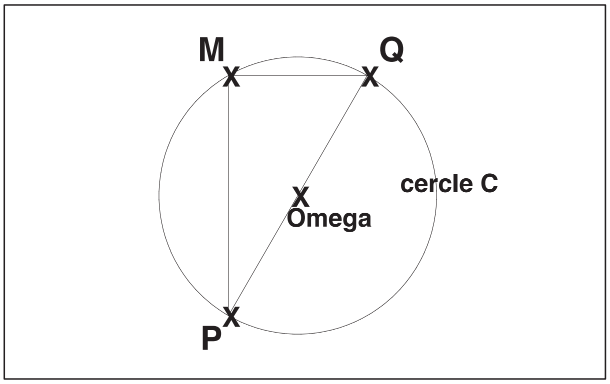
$\hookrightarrow$ Cet exercice est rapide à condition de bien démarrer. On rappelle un résultat géométrique. Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypothénuse. Par ailleurs ce centre a ici une affixe très simple à trouver.

> Rapport du jury Centrale-Supélec 2011
>
> Les candidats ont par ailleurs « mis le paquet » sur les points qui tombent souvent à l'oral (par exemple la réduction des endomorphismes), pour lesquels on obtient souvent des énoncés corrects ; en revanche sur les autres parties du programme, la restitution du cours est parfois très approximative.

Corrigé

Hypothèse : le triangle est rectangle en M

Appelons Ω le centre du cercle C circonscrit au triangle (MPQ). Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypothénuse. Ici l'hypothénuse est le segment $[PQ]$. Illustrons par un dessin.



Les complexes p et q sont solutions de : $X^2 - z = 0$.
En utilisant une des relations coefficients-racines, on a :

$$p + q = 0 \Rightarrow \frac{p+q}{2} = 0.$$

Donc l'affixe de Ω est nul. Comme M, P et Q sont sur le cercle de centre Ω, on a :

$$\Omega P = \Omega Q = \Omega M.$$

Cela se traduit dans $\mathbb{C}$ par : $|p| = |q| = |z|$.
Or, $z = p^2 = q^2$, on a donc : $|p| = |p^2|$, en particulier.
Comme p est non nul (car z est non nul), on a :

$$|p| = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Donc nécessairement, z est de module 1 (et différent de 1 car alors les trois points sont confondus).

Hypothèse : $|z| = 1$ et $z \neq 1$.

On peut déjà remarquer que z est sur le cercle de centre O et de rayon 1 ainsi que ses racines carrées. Si $z = e^{i\theta}$, ses racines carrées sont : $\pm e^{i\theta/2}$.
Le triangle (MPQ) est rectangle en M si et seulement si le rapport $\dfrac{z-p}{z-q}$ (qui existe car $z \neq q$) est imaginaire pur. On pose par exemple : $p = e^{i\theta/2}$ et $q = -p$.
On a : $\dfrac{z-p}{z-q} = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i\theta/2}}{e^{i\theta} + e^{i\theta/2}}$.
En utilisant les formules d'Euler, on obtient :

$$\frac{z-p}{z-q} = \frac{e^{i3\frac{\theta}{4}} \times 2i \sin\left(\dfrac{\theta}{4}\right)}{e^{i3\frac{\theta}{4}} \times 2\cos\left(\dfrac{\theta}{4}\right)} = i\tan\left(\frac{\theta}{4}\right).$$

Cette expression existe si $\theta \neq 2\pi + 4k\pi$. On écarte le cas où $z = 1$. Cela correspondrait au cas où M serait confondu avec P ou Q et on aurait un triangle aplati que l'on écarte. Finalement, on obtient bien un triangle rectangle en M en écartant $z = 1$.

$$\boxed{\text{Une condition nécessaire et suffisante est } |z| = 1 \text{ avec } z \neq 1.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on utilise les nombres complexes pour résoudre un problème plan.

1) Si $A(a)$ et $B(b)$ alors $|b-a|$ correspond à la distance AB.

2) Le triangle (ABC) est rectangle en A si et seulement si $a-c=\pm\alpha i(a-b)$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.

3) Le triangle (ABC) est rectangle isocèle en A si et seulement si $a-c=\pm i(a-b)$.

4) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine les racines carrées d'un nombre complexe.
Pour résoudre l'équation $z^2=\omega$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$, on a deux méthodes.

1) On écrit le complexe ω sous forme trigonométrique, (en restreignant au cas qui reste général où ω n'est pas nul), on a alors $\omega=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho\in\mathbb{R}_+^\star$ et $\theta\in[0,\,2\pi[$. Les solutions de l'équation sont ainsi : $\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.

2) On écrit le complexe ω sous forme algébrique c'est-à-dire $\omega=a+ib$, où $(a,\,b)$ est un couple de $\mathbb{R}^2$. On cherche z sous la forme $z=x+iy$ avec $(x,\,y)\in\mathbb{R}^2$. Partons des implications :

$$(x+iy)^2=a+ib\Rightarrow|x+iy|^2=|a+ib|\Rightarrow x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$$

puis de l'implication :

$$(x+iy)^2=a+ib\Rightarrow x^2-y^2+i2xy=a+ib.$$

Il reste à récupérer la partie réelle et la partie imaginaire de la dernière égalité obtenue et on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{c} x^2-y^2=a\\ 2xy=b\\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x^2=a/2+\sqrt{a^2+b^2}/2\\ xy \text{ et } b \text{ ont même signe}\\ y^2=-a/2+\sqrt{a^2+b^2}/2\end{array}\right..$$

On en déduit les deux solutions :

$$z_1=\sqrt{\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}+i\epsilon\sqrt{-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}}\text{ et }-z_1$$

en posant $\epsilon=1$ si $b\geqslant 0$ et $\epsilon=-1$ si $b<0$.

On utilisera la méthode adaptée selon que ω s'écrive simplement ou non sous forme trigonométrique. Parfois, les deux fonctionnent bien !

Formulaire

• Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$ et $\sin\theta=\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$.

• Les solutions de $z^2=\rho e^{i\theta}$,où $\rho>0$ et θ est un réel compris entre 0 et 2π, sont $\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$ et $-\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.

Jour n^{o}15

Exercice 15.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

P_1, P_2 et P_3 désignent trois polynômes distincts de $E = \mathbb{R}[X]$ et a_1, a_2, a_3 désignent trois réels distincts. On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3.$$

1) On pose ici et dans la suite : $\forall i \in [\![1,3]\!],\ L_i = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{3} (a_i - a_j)} \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{3} (X - a_j).$

a) Déterminer $L_i(a_j)$ pour $i \in [\![1,3]\!]$ et $j \in [\![1,3]\!]$.

b) Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3) L'application f est-elle surjective ?

4) On étudie si l'application f est injective.

a) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Montrer que $P \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si les trois réels a_1, a_2 et a_3 sont des racines de P.

b) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est liée. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \operatorname{Ker} f$, non nul et non divisible par $Q = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$.

c) Conclure.

Exercice 15.2 — MPSI-PCSI-PTSI

On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) Calculer $f(0)$ et donner $f(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.

2) On suppose maintenant que f est continue en 0. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Même question en supposant seulement f bornée sur un voisinage de 0.

Énoncé

P_1, P_2 et P_3 désignent trois polynômes distincts de $E = \mathbb{R}[X]$ et a_1, a_2, a_3 désignent trois réels distincts. On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3.$$

1) On pose ici et dans la suite : $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $L_i = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{3} (a_i - a_j)} \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{3} (X - a_j)$.

a) Déterminer $L_i(a_j)$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$ et $j \in [\![1, 3]\!]$.

b) Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).

2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

3) L'application f est-elle surjective ?

4) On étudie si l'application f est injective.

a) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est libre. Montrer que $P \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si les trois réels a_1, a_2 et a_3 sont des racines de P.

b) On suppose que la famille (P_1, P_2, P_3) est liée. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \operatorname{Ker} f$, non nul et non divisible par $Q = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$.

c) Conclure.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice issu de l'écrit du Concours Commun INP (ex CCP), en filière TPC, posé en 2017.
On commence par définir les polynômes de Lagrange, notés L_1, L_2 et L_3, qui sont construits à partir de trois réels distincts donnés (ici ce sont des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$) et on exprime un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ en utilisant ces polynômes. Sachez que ces polynômes de Lagrange sont un grand classique et donc un incontournable dans cet ouvrage. Il ont pu être abordés en cours dans certaines classes. L'intérêt premier de ces polynômes est leur utilité pour exprimer un polynôme connaissant ses valeurs en plusieurs points (on le comprend quand on a fait la question **1) c)**.
Dans la suite de l'exercice, on étudie une application f définie sur $\mathbb{R}[X]$. On vérifie d'abord qu'il s'agit d'un endomorphisme puis on examine d'abord sa surjectivité puis son injectivité. On caractérise notamment $\operatorname{Ker} f$. Encore une fois, nous sommes à l'intersection de deux parties du programme d'algèbre qui sont l'algèbre linéaire et l'algèbre polynomiale.

1) On définit ici trois polynômes dit de Lagrange de $\mathbb{R}_2[X]$, à partir de trois réels distincts a_1, a_2 et a_3. Le but est de montrer que tout polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ s'exprime de façon simple et unique en fonction de ces polynômes.

a) On demande le calcul de $L_i(a_j)$, pour tout couple (i, j) possible.
Ce calcul est utile à la fois à **1) b)** et à **1) c)**.

$\hookrightarrow$ On distinguera le cas $i = j$ du cas $i \neq j$.

b) On montre que la famille des polynômes L_1, L_2, L_3 forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Encore une fois, cela est fondamental pour la suite.

$\hookrightarrow$ Comme la famille est constituée de trois vecteurs et que nous sommes en dimension 3, seule la liberté de la famille permet de conclure.

c) Ici l'on exprime un vecteur quelconque P de $\mathbb{R}_2[X]$ en fonction de L_1, L_2 et L_3. La question **1) b)** nous dit que c'est toujours possible mais ce qui est intéressant ici, ce sont les coordonnées de P dans cette base (L_1, L_2, L_3).

$\hookrightarrow$ On utilise encore le résultat de la question **1) a)**.

2) On doit montrer que f est une application linéaire. Le fait qu'alors, il s'agit d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$ est immédiat.

$\hookrightarrow$ C'est facile mais ne le bâclez pas pour autant !

3) On étudie la surjectivité de f.

$\hookrightarrow$ On pourra considérer certains degrés.

4) On étudie maintenant l'injectivité de f. Comme f est linéaire, on sait que f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est réduit au polynôme nul. Il suffit de lire les questions **4) a)** et **4) b)** pour se douter si f est injective ou non.

a) On suppose ici que (P_1, P_2, P_3) est libre. On veut caractériser $\operatorname{Ker} f$ avec les racines d'un polynôme de ce noyau.

$\hookrightarrow$ On pourra faire un sens direct puis un sens réciproque.

b) On suppose ici que (P_1, P_2, P_3) est liée. On veut montrer l'existence d'un polynôme P non nul et appartenant à $\operatorname{Ker} f$.

$\hookrightarrow$ On peut chercher P sous la forme $\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3$, où α, β, γ sont les coefficients d'une combinaison linéaire nulle de P_1, P_2 et P_3.

c) On peut maintenant conclure quant à l'injectivité de f, en faisant une synthèse des deux questions précédentes.

$\hookrightarrow$ On peut s'intéresser au cas où l'on considère la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.
Voir la remarque, en fin du corrigé.

Corrigé

1) a) Fixons $i \in [\![1, 3]\!]$. Alors l'expression $\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{3} (X - a_j)$ est nulle quand on remplace X par a_j si $j \neq i$ car l'expression $a_j - a_j$ apparaît alors dans ce produit.

Si l'on remplace X par a_i, on a : $L_i(a_i) = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{3} (a_i - a_j)}{\displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^{3} (a_i - a_j)} = 1.$

On peut conclure.

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, 3]\!]^2,\ L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.}$$

b) On veut montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Pour cela, comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, il suffit de vérifier que cette famille est libre.
Soient α_1, α_2 et α_3 trois réels tels que (1) $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 = 0$.
Il faut prouver que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.
On applique (1) pour $X = a_1$, cela donne $\alpha_1 L_1(a_1) = 0 = \alpha_1$ en utilisant le résultat de la question **1) a)**. De même, si l'on applique (1) pour $X = a_2$, on obtient $\alpha_2 = 0$ et enfin si l'on applique (1) à $X = a_3$, $\alpha_3 = 0$.
On a prouvé la liberté de (L_1, L_2, L_3) et on peut conclure.

$$\boxed{\text{La famille } (L_1, L_2, L_3) \text{ constitue une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminons les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
On sait que de telles coordonnées existent car (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Supposons $P = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3$.
Alors $P(a_1) = \alpha_1 L_1(a_1) + \alpha_2 L_2(a_2) + \alpha_3 L_3(a_3) = \alpha_1$, toujours d'après **1) a)**.
De même, en appliquant pour $X = a_2$, $P(a_2) = \alpha_2$ et en appliquant pour $X = a_3$, $P(a_3) = \alpha_3$. On peut conclure.

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ dans } (L_1, L_2, L_3) \text{ sont } (P(a_1), P(a_2), P(a_3)).}$$

2) Il est clair que $f(P) \in E$ et il suffit donc de montrer la linéarité de f pour pouvoir conclure que f est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$.
Soient $(P, Q) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on écrit :

$$f(P + \alpha Q) = (P + \alpha Q)(a_1) \times P_1 + (P + \alpha Q)(a_2) \times P_2 + (P + \alpha Q)(a_3) \times P_3.$$

On développe l'expression du second membre en :

$$P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3 + \alpha\left(Q(a_1) \times P_1 + Q(a_2) \times P_2 + Q(a_3) \times P_3\right).$$

C'est bien $f(P) + \alpha f(Q)$.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

3) Si P est un polynôme quelconque de E, $P(a_1)$, $P(a_2)$ et $P(a_3)$ sont des réels donc l'expression $f(P)$ est une combinaison linéaire de trois polynômes de degrés déterminés qui sont P_1, P_2 et P_3. Ainsi, si Q est un polynôme dont le degré est strictement supérieur à $\max(\deg(P_1), \deg(P_2), \deg(P_3))$, Q n'est pas atteint par f et pourtant $Q \in E$. On peut conclure.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ n'est pas surjective sur } E.}$$

4) a) *Sens direct*
Si $P \in \operatorname{Ker} f$, on a (car la famille (P_1, P_2, P_3) est libre) :

$$P(a_1) \times P_1 + P(a_2) \times P_2 + P(a_3) \times P_3 = 0 \Rightarrow P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0.$$

Donc les trois réels a_1, a_2 et a_3 sont des racines de P.
Sens réciproque
Si les trois réels a_1, a_2 et a_3 sont des racines de P, alors $P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0$ et on a bien $f(P) = 0$ donc $P \in \operatorname{Ker} f$. On peut conclure.

$$\boxed{P \in \operatorname{Ker} f \text{ si et seulement si } a_1, a_2, a_3 \text{ sont racines de } P.}$$

b) Comme (P_1, P_2, P_3) est liée, il existe α, β, γ trois réels non tous nuls tels que

$$\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0.$$

Soit $P = \alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3$. D'aprés **1) c)**, $\alpha = P(a_1)$, $\beta = P(a_2)$, $\gamma = P(a_3)$.
On peut en déduire que $P \in \operatorname{Ker} f$ car $f(P) = P(a_1)\times P_1 + P(a_2)\times P_2 + P(a_3)\times P_3 = 0$.
De plus, P est obligatoirement non nul car au moins l'une des quantités $P(a_1)$, $P(a_2)$ et $P(a_3)$ est non nulle. Cela est équivalent à dire que P est non divisible par $Q = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$. On peut conclure.

$$\boxed{\exists\, P \in \operatorname{Ker} f, \text{ non nul et non divisible par } Q = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3).}$$

c) On peut conclure. Dans tous les cas, (P_1, P_2, P_3) famille liée ou non, on peut trouver un polynôme non nul appartenant au noyau. Ainsi, si (P_1, P_2, P_3) est libre, le polynôme $(X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$. Et si (P_1, P_2, P_3) est liée, le polynôme $P = \alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, où α, β, γ sont les coefficients de dépendance linéaire de P_1, P_2 et P_3 et ne sont pas tous nuls.
Comme $\operatorname{Ker} f$ n'est jamais réduit au seul polynôme nul,

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}}$$

Remarque

Si (P_1, P_2, P_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ alors la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et si $P \in \operatorname{Ker} f \cap \mathbb{R}_2[X]$, P admet a_1, a_2 et a_3 pour racines distinctes d'après la question **4) a)**. Cela implique que $P = 0$ et la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$ est injective et comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie, la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que les équivalences f bijectif $\Leftrightarrow$ f injectif $\Leftrightarrow$ f surjectif ne sont valables que si f est un endomorphisme dans un espace vectoriel **de dimension finie**.

♡ Il faut se souvenir qu'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel E de dimension finie n est une base de E si et seulement si cette famille est soit libre soit génératrice de E.

Formulaire

• *Familles libres*

La famille $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E, espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est libre si et seulement si l'on a : $\alpha_1\vec{u}_1 + ... + \alpha_k\vec{u}_k + ... + \alpha_p\vec{u}_p = \vec{0}_E \Rightarrow \alpha_1 = ... = \alpha_k = ... = \alpha_p = 0$.

• *Racines d'un polynôme*

On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P(a) = 0$. De plus, le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ étant $P(a)$ pour tout a, a est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P.

Exercice 15.2 Concours Commun Centrale-Supélec 2010 - ♣ ♣ ♣

Énoncé

On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) Calculer $f(0)$ et donner $f(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$.

2) On suppose maintenant que f est continue en 0. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Même question en supposant seulement f bornée sur un voisinage de 0.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun Centrale-Supélec pour la filière PSI en 2010. C'est un exercice d'Analyse sur la résolution d'une équation fonctionnelle. Cette équation est très classique (c'est pourquoi on vous la propose en révision) mais sa résolution peut être en partie spécifique selon les hypothèses sur f qui sont plus ou moins fortes. Les hypothèses classiques sur f sont la continuité, la dérivabilité ou parfois même la simple monotonie. Ici f est quelconque puis continue en 0 puis simplement bornée dans un voisinage de 0. On lui ajoute aussi souvent d'autres relations, par exemple $f(xy) = f(x)f(y)$, ce qui donne des possibilités supplémentaires dans la résolution. En tout cas, on attend de vous des pistes intéressantes à défaut d'une résolution complète.

1) On calcule $f(0)$ puis pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$, une relation entre $f(\lambda x)$, $f(x)$ et λ.

$\hookrightarrow$ On commencera par montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$ puis on passera aux rationnels positifs en utilisant $qx/q = x$ avec q entier positif et enfin on vérifiera que f est impaire pour étendre aux rationnels négatifs.

2) On suppose ici que f est continue en 0. On montrera d'abord que cela équivaut à la continuité de f en tout x_0. Puis on détermine explicitement f en partant d'une propriété vraie pour les rationnels et en l'étendant aux réels en utilisant la continuité de f.

$\hookrightarrow$ On utilise le fait que tout réel est une limite de nombres rationnels. En effet, prenons un réel x_0, il existe une suite de rationnels, que l'on note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = x_0$. Puis, on termine par la caractérisation séquentielle des limites.

3) On suppose qu'ici f est bornée au voisinage de 0. Pas besoin ici de se lancer dans une résolution différente. On montre en fait que si f est bornée dans un voisinage de 0 alors f est continue en 0. Ce qui permet de se ramener à la question précédente. Il faut utiliser, bien entendu, l'équation fonctionnelle de départ. On doit donc prouver :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]-\eta, \eta[,\ |f(x) - f(0)| < \epsilon.$$

$\hookrightarrow$ On part d'un intervalle centré en 0 pour lequel $|f(x)| < M$. Puis on fixe $\epsilon > 0$ et on raisonne selon que ϵ est plus grand ou plus petit que M. Dans le cas où $\epsilon < M$, on introduira un entier n tel que $M/n < \epsilon$.

Rapport du jury Centrale-Supélec 2011

Il est à noter que certains candidats dont la réflexion sur certaines questions n'a pas abouti, au lieu de baisser les bras et de passer à autre chose, donnent des pistes intéressantes, lesquelles rapportent des points : proposition d'un raisonnement dans un cas particulier proche de la question posée, expolaration d'un exemple etc.

Corrigé

On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1) *Calcul de $f(0)$*

Comme pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, appliquons cette égalité pour $y = 0$ ce qui donne :

$$f(x+0) = f(x) = f(x) + f(0)$$

On en déduit que $f(0) = 0$.

Calcul de $f(\lambda x)$ pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$

Nous allons commencer par le cas où $\lambda = n$ est un entier positif. Il est clair que :

$$f(1 \times x) = 1 \times f(x) \text{ et } f(2 \times x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

L'idée est donc de prouver par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx) = nf(x).$$

La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour n donné. Alors :

$$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

On a la propriété au rang $n + 1$.

Passons aux rationnels positifs. Soit q un entier strictement positif et x un réel :

$$f\left(q \times \frac{x}{q}\right) = q\, f\left(\frac{x}{q}\right) = f(x),$$

en utilisant la propriété démontrée juste avant. Cela donne :

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q} f(x).$$

Puis, en réappliquant la même propriété en introduisant un nouvel entier p positif, on a :

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q} f(x).$$

Il reste à passer aux rationnels négatifs. Pour cela, on va tout simplement montrer que f est impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(-x).$$

Puis, on considère $x \in \mathbb{R}$, p entier négatif et q entier naturel non nul.

$$f\left(\frac{p}{q}x\right)=f\left(-\frac{-p}{q}x\right)=-f\left(\frac{-p}{q}x\right).$$

On applique maintenant ce que l'on vient de faire pour les rationnels positifs :

$$f\left(\frac{p}{q}x\right)=-\left[\frac{-p}{q}f(x)\right]=\frac{p}{q}f(x).$$

Finalement, on peut conclure.

$$\boxed{f(0)=0 \text{ et } \forall(\lambda,x)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{R},\ f(\lambda x)=\lambda f(x).}$$

2) On suppose maintenant que f est continue en 0.

Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$

Il s'agit de prouver que f est continue en toute valeur réelle x_0 fixée. Pour cela, utilisons la propriété fondamentale sur f donnée dans l'énoncé appliquée à $x-x_0$ et x_0, où x est un réel quelconque :

$$f(x)=f(x-x_0+x_0)=f(x-x_0)+f(x_0).$$

Cette égalité est vraie pour tout x réel. La fonction $x\mapsto x-x_0$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en x_0, la fonction $x\mapsto f(x)$ est continue en 0 et donc par composition, $x\mapsto f(x-x_0)$ est continue en x_0. Enfin, $x\mapsto f(x_0)$ est continue en x_0 car c'est une fonction constante et il reste à dire que la somme de deux fonctions continues en x_0 est continue en x_0 pour conclure.

Calcul de $f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Partons de la propriété démontrée à la question précédente :

$$\forall(\lambda,x)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{R},\ f(\lambda x)=\lambda f(x).$$

On l'applique pour $x=1$. Il reste :

$$\forall\lambda\in\mathbb{Q},\ f(\lambda)=\lambda f(1).$$

Pour finir, on utilise le fait que tout réel est une limite de nombres rationnels et aussi la caractérisation séquentielle des limites. Prenons un réel x_0. Il existe une suite de rationnels (on peut même dire que x_0 est limite de deux suites rationnelles adjacentes mais cela n'est pas utile ici), que l'on note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n=x_0.$$

On écrit par ailleurs :

$$f(\lambda_n)=\lambda_n f(1),$$

car λ_n est rationnel. Puis on fait tendre n vers $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}f(\lambda_n)=f\left(\lim_{n\to+\infty}\lambda_n\right),$$

en utilisant le fait que f est continue en x_0. On obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}f(\lambda_n)=f(x_0)=\lim_{n\to+\infty}\lambda_n f(1)=x_0 f(1).$$

Enfin, rien ne nous permet de préciser $f(1)$.

Réciproquement, on vérifie que les fonctions du type $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$, vérifient bien toutes les conditions de l'énoncé.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions du type } x \mapsto ax, \text{ où } a \in \mathbb{R}.}$$

3) On suppose seulement que f est bornée sur un voisinage de 0. L'idée est de montrer que f est continue en 0 ce qui permettra de se ramener à la question précédente. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \ |f(x)| < M.$$

On sait que les résultats de la première question restent valables ici. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Faisons deux cas.

1) Premier cas : $\epsilon \geq M$

En prenant $\eta = \alpha$, pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, on a :

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| < \epsilon.$$

2) Deuxième cas : $\epsilon < M$

Il existe un entier n non nul tel que : $\dfrac{1}{n}M < \epsilon$.

On peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{1}{n}t\right) = \frac{1}{n}f(t).$$

Par ailleurs, on a l'équivalence, en posant $t' = \dfrac{1}{n}t$:

$$t \in]-\alpha, \alpha[\Leftrightarrow t' \in \left]-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}\right[.$$

Donc, on a la majoration :

$$|f(t')| = \frac{1}{n}|f(t)| < \frac{1}{n}M < \epsilon.$$

Ainsi, si l'on pose $\eta = \dfrac{1}{n}\alpha$, pour tout $x \in]-\eta, \eta[$ alors $nx \in]-\alpha, \alpha[$ et :

$$|f(nx)| < M \ \Rightarrow \ |f(x)| < \frac{1}{n}M < \epsilon.$$

Puis, il reste à introduire $f(0) = 0$. On a :

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| < \epsilon.$$

3) Bilan

On a donc prouvé : $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in]-\eta, \eta[$, $|f(x) - f(0)| < \epsilon$.

Et en conclusion, f est continue en 0.

$$\boxed{\text{Les solutions sont encore les fonctions du type } x \mapsto ax, \text{ où } a \in \mathbb{R}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre qu'une fonction est continue partout sachant qu'elle est continue en au moins un point et qu'elle est additive (c'est-à-dire telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout (x, y)). Parmi de telles fonctions, on a certains morphismes et les applications linéaires.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on passe des entiers aux rationnels dans le type d'exercice proposé ici. On utilise pour tout p entier non nul, $p/p = 1$ puis $p/q = p \times 1/q$.

♡ Il faut se souvenir que l'égalité $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\lambda_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n\right)$ n'est pas automatique. Il faut utiliser le fait que f est continue en $x_0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda_n$.

Formulaire

• *Caractérisation séquentielle de la limite*

Soient $a \in \mathbb{R}$, I une partie contenant a et g une fonction numérique définie sur I privé éventuellement de a. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ est que :

$$\forall (u_n) \in (I \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}, \left[\lim_{n \to +\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} g(u_n) = m\right].$$

• *Image d'une suite convergente*

Soient a et m deux réels donnés, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers a et à valeurs dans I et g une fonction définie dans I, éventuellement privé de a.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = m$.

• *Approximations décimales d'un réel*

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique décimal $x_n = \dfrac{q_n}{10^n}$ tel que l'on ait :

$$q_n \in \mathbb{Z} \text{ et } x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Le nombre x_n (respectivement $y_n = x_n + 10^{-n}$) est la valeur décimale approchée à 10^{-n} près par défaut (respectivement par excès) de x. L'entier q_n est la partie entière de $10^n x$. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. L'existence et l'unicité de x_n est équivalente à celle de q_n et on pose $q_n = E(10^n x)$, où E désigne la partie entière. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes et de limite commune x. On peut en déduire que tout réel x est limite d'une suite de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (et même de $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$), on a montré plus précisement que tout réel est limite de deux suites adjacentes dans $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Jour n^{o}16

Exercice 16.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

1) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}$.

2) Soit $x \in]0, \pi]$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

3) Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx = 0$.

4) Soit g définie sur $[0, \pi]$ par : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)\,dx$.

6) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 16.2 — MPSI-PCSI-PTSI

Ici $n \geqslant 2$, a, b et c sont trois réels et on définit $A(a, b, c) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
- les coefficients de la diagonale principale sont égaux à a ;
- les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont égaux à b ;
- les coefficients en dessous de la diagonale principale sont égaux à c.

Enfin, on introduit la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'ayant que des 1 pour coefficients et :

$$P(x) = \det(A(a, b, c) + xJ).$$

1) Montrer que P est un polynôme de degré au plus 1.

2) On suppose $b \neq c$. Déterminer $\det A(a, b, c)$ en fonction de a, b, c et n.

3) Calculer $\det A(a, b, c)$ dans le cas où $b = c$.

Exercice 16.1 Concours National Commun Marocain 2017 - ♣ ♣

Énoncé

1) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}$.

2) Soit $x \in]0, \pi]$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

3) Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx = 0$.

4) Soit g définie sur $[0, \pi]$ par : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi} - x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \in]0, \pi] \\ \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

5) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)}{2}x\right)\,dx$.

6) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un des exercices posés à l'écrit du Concours National Commun Marocain en 2017 pour la filière PSI. Le but de l'exercice est le calcul de la somme de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. Si vous arrivez tout droit de TSI1 ou de TPC1, vous ne connaissez pas encore le terme de série de Riemann, mais ce n'est pas grave, vous allez vite le rencontrer en deuxième année. Maintenant, aucun outil de deuxième année n'est bien entendu nécessaire pour faire cet exercice. Pour en revenir au calcul de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ qui est la finalité de l'exercice, sachez qu'il y a d'autres méthodes pour arriver à calculer cette limite, notamment utiliser les intégrales de Wallis. Vous pouvez faire des recherches si cela vous intéresse. Nous nous en tiendrons à cet exercice. Les outils nécessaires ici sont issus de l'analyse et du maniement des nombres complexes. Entre autre, il faut maîtriser l'intégration par parties, savoir montrer qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ par raccordement, connaître la somme partielle d'une suite géométrique et les formules d'Euler (et comment les faire apparaître).

1) On veut montrer une égalité. Le membre de droite est constitué d'une intégrale d'un produit de deux fonctions dont l'une est un polynôme de degré 2.

$\hookrightarrow$ L'idée classique est de faire deux intégrations par parties successives pour « baisser » le degré du polynôme, en remarquant à chaque fois que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

2) Il s'agit dans cette question de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ en passant par les nombres complexes. L'idée est de passer par le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$.

a) On demande de montrer une égalité dans $\mathbb{C}$ qui permet dans la suite de l'exercice d'arranger la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$.

$\hookrightarrow$ L'astuce est d'écrire les expressions du type $1 - e^{i\theta}$ sous la forme $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$ et d'utiliser une des deux formules d'Euler.

b) On calcule donc maintenant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$, en usant de **2) a)**.

$\hookrightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ est la partie réelle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$, au cas où vous ne l'auriez pas compris.

3) Il s'agit de montrer ici un résultat qui sera utile pour la suite, sachez qu'il est appelé le lemme de Lebesgue.

$\hookrightarrow$ L'indication importante : « faire une intégration par parties » est dans l'énoncé.

4) On définit une fonction g sur $[0, \pi]$, de façon explicite sur $]0, \pi]$ et en donnant la valeur en 0. Le but est de montrer que ce raccordement est de classe $\mathcal{C}^1$. Encore une fois, cela est utile dans la suite car il faudra appliquer plus loin le résultat de **3)** à une intégrale où figure g (et pour appliquer ce résultat, g doit être de classe $\mathcal{C}^1$).

$\hookrightarrow$ C'est l'occasion d'utiliser ce fameux théorème de raccordement de classe $\mathcal{C}^1$ si utile (et donc de ne pas se tromper dans les hypothèses). Et en plus, on révise quelques développements limités, quelle chance !

5) On demande ici une égalité qui permet d'écrire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ sous forme d'une intégrale. Cette question est un peu ce qu'est le coeur du réacteur dans une centrale nucléaire, c'est-à-dire la question qui donne tout son sens à la méthode développée ici. De plus, c'est une vraie question de synthèse, c'est-à-dire qui utilise un certain nombre de résultats montrés auparavant.

$\hookrightarrow$ Il s'agit d'utiliser **1)** puis de sommer pour k variant de 1 à n, puis d'utiliser **2)**.
Puis enfin d'aller chercher une formule trigonométrique que l'on peut retrouver rapidement : $2 \sin p \cos q = \sin(p + q) + \sin(p - q)$.
Rien ne vous interdit de vous entraîner à en redémontrer d'autres !

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Les formules de base de la trigonométrie ne sont pas toujours sues. C'est un handicap à l'écrit ou à l'oral dans différents domaines. Ainsi, la linéarisation du carré d'un cosinus, la relation entre les carrés de tangente et du cosinus, les relations de duplication restent méconnues pour certains.

6) On en arrive à pourquoi on a fait tout cet exercice : le calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

$\hookrightarrow$ On pense au résultat de la question **3)**.

Corrigé

1) On veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}$.
On va faire de façon classique deux intégrations par parties successives, en remarquant à chaque fois que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(kt)}{k}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt + \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi,$$

par une première intégration par parties. Or :

$$\left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

Il reste : $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt.$
On effectue une deuxième intégration par parties car $t \mapsto \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $t \mapsto \dfrac{-\cos(kt)}{k^2}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$:

$$-\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt = \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{(-\cos(kt))}{k^2}\, dt + \left[\left(-\frac{t}{\pi} + 1\right) \frac{(-\cos(kt))}{k^2}\right]_0^\pi.$$

Or : $\displaystyle\left[\left(-\frac{t}{\pi} + 1\right) \frac{(-\cos(kt))}{k^2}\right]_0^\pi = 0 - \left(-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{k^2}$. Il reste :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\cos(kt)}{k^2}\, dt + \frac{1}{k^2}.$$

Enfin : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\cos(kt)}{k^2}\, dt = \left[\frac{1}{\pi k^2} \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$
D'où :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}.}$$

2) a) Soit $x \in]0, \pi]$. Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
On peut déjà remarquer que x appartenant à $]0, \pi]$, $1 - e^{ix} \neq 0$.
Pour prouver cette égalité, on va utiliser les formules d'Euler :

$$\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}\right) \text{ et } \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right).$$

On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{-\frac{inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}} = e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Ce qui se met sous la forme simplifiée :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}.}$$

b) Supposons encore $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in]0,\pi]$. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}$, en utilisant la formule qui donne la somme partielle d'une suite géométrique car $e^{ix} \neq 1$.
Il reste à récupérer la partie réelle de chaque membre de l'égalité précédente.

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Re}\left(e^{ikx}\right) = \text{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right),$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \text{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)$.
On arrange le second membre de la dernière égalité. On utilise **2) a)** :

$$\text{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) = \text{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

car $\text{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$. On en déduit bien ce que l'on veut :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.}$$

3) Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On procède à une intégration par parties et l'on écrit :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx = -\int_0^\pi \Psi'(x)\left[\frac{-\cos(mx)}{m}\right]dx + \left[\Psi(x)\frac{-\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi.$$

Cela donne :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx = \frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx + \frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m + \Psi(0)\right].$$

On remarque que $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m + \Psi(0)\right] = 0$ car $-\Psi(\pi)(-1)^m + \Psi(0)$ est borné quand m varie. Puis :

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{m}\int_0^\pi |\Psi'(x)\cos(mx)|\,dx.$$

Or Ψ' étant continue sur $[0,\pi]$, elle est bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $x \in [0,\pi]$, $|\Psi'(x)| \leqslant M$ et donc pour tout $x \in [0,\pi]$, $|\Psi'(x)\cos(mx)| \leqslant M$.

On écrit : $\left|\dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^{\pi} \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right| \leqslant \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^{\pi} M\,dx = \dfrac{M\pi}{m}$.
Et cette dernière quantité tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
Donc : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\left|\frac{1}{m}\int_0^{\pi} \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right| = 0$ et on peut conclure.

$$\boxed{\lim_{m\to+\infty}\int_0^{\pi}\Psi(x)\sin(mx)\,dx = 0.}$$

4) Soit g définie sur $[0,\pi]$ par : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si} \quad x \in]0,\pi] \\ \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ par rapport de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Il reste à montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. Pour cela, on va utiliser le théorème de raccordement. Pour montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, il suffit de montrer que g est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ (ce qui est le cas) et que $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (et sa valeur est alors celle de la dérivée de g en 0).
Commençons donc par montrer la continuité de g en 0.
On part, pour tout $x \in]0,\pi]$, de l'écriture $g(x) = \dfrac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
Effectuons un développement limité de sin à l'ordre 1 au voisinage de 0^+ :

$$g(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)} = \frac{\frac{x}{2\pi}-1}{2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)},$$

quantité qui tend vers -1 quand x tend vers 0. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = -1$ et g est bien continue en 0 et donc sur $[0,\pi]$ (car rapport de deux fonctions continues sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas).
Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{x\to 0} g'(x)$ existe. On écrit, pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$g'(x) = \frac{\left(\dfrac{x}{\pi}-1\right)\left(2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) - \left(\dfrac{x^2}{2\pi}-x\right)\times\dfrac{2}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

On utilise un développement limité d'ordre 2 de sin et d'ordre 1 de cos, ce qui donne

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\left(\dfrac{x}{\pi}-1\right)\left(2\left(\dfrac{x}{2}+o(x^2)\right)\right) - \left(\dfrac{x^2}{2\pi}-x\right)(1+o(x))}{4\left(\dfrac{x^2}{4}+o(x^2)\right)} \\ &= \frac{\dfrac{x^2}{\pi}-x+o(x^2)-\dfrac{x^2}{2\pi}+x}{x^2+o(x^2)} \quad . \end{aligned}$$

Il reste l'implication : $g'(x) = \dfrac{\dfrac{x^2}{2\pi} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dfrac{\dfrac{1}{2\pi} + o(1)}{1 + o(1)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = \dfrac{1}{2\pi}$.

$$\boxed{\text{Donc, } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$$

5) En utilisant **1)**, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\, dt$.

Posons pour tout $t \in]0,\pi]$, $h(t) = \displaystyle\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

Or, toujours pour tout $t \in]0,\pi]$, en utilisant **2) b)**,

$$h(t) = \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Il reste à utiliser une formule trigonométrique classique :

$$2\sin\left(\tfrac{nt}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)t}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(2n+1)t}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{-t}{2}\right).$$

Alors, pour tout $t \in]0,\pi]$, en utilisant la définition de g,

$$\begin{aligned} h(t) &= \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= g(t)\sin\left(\tfrac{(2n+1)t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\right) \end{aligned}.$$

Et ceci est valable en fait pour tout $t \in [0,\pi]$. D'où :

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt - \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\right) dt.$$

Il reste un calcul : $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{4\pi} - \frac{t}{2}\right) dt = \left[\frac{t^3}{12\pi} - \frac{t^2}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{6}$.

Ainsi (1) devient :

$$\boxed{(2)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} g(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt + \frac{\pi^2}{6}.}$$

6) Puis comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut appliquer le résultat de **3)** :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) dx = 0.$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ dans (2) et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on calcule des sommes du type $\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ ou $\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)$. On passe par les nombres complexes en calculant $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}$ (on reconnaît une somme de termes d'une suite géométrique) et on prend la partie réelle ou imaginaire du résultat.

♡ Il faut se souvenir que l'on peut arranger les expressions du type $1 - e^{i\theta}$ (respectivement $1 + e^{i\theta}$), où θ est un réel, en les mettant sous la forme $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$ (respectivement $e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)$) puis en allant chercher les formules d'Euler.

♡ Il faut se souvenir des formules trigonométriques qui permettent de remplacer un produit d'un sinus (ou un cosinus) par un autre sinus (ou un autre cosinus). Il faut développer $\sin(p+q)$, $\cos(p+q)$, $\sin(p-q)$ ou $\cos(p-q)$ et faire des additions ou des soustractions. Exercez vous à écrire les quatre formules !

♡ Il faut se souvenir que pour montrer qu'une fonction f définie sur $]a, b]$ explicitement et ayant une valeur $f(a)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on commence par vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b]$ puis que f est continue sur $[a, b]$ et enfin que $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)$ existe et est finie. Cette limite est alors aussi la dérivée de f en a.

Formulaire

• *Formules d'Euler*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ et $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$.

• *Formule d'intégration par parties*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit (f, g) un couple de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Alors : $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt$.

• *Théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$*

Soit $a \in I$, f définie et continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{t\to a} f'(t) = l$.
Alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans I (notée encore f) et telle que l'on ait l'égalité : $f'(a) = l$.

• *Formule de majoration des intégrales*

Pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Énoncé

Ici $n \geqslant 2$, a, b et c sont trois réels et on définit $A(a,b,c) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
• les coefficients de la diagonale principale sont égaux à a ;
• les coefficients au dessus de la diagonale principale sont égaux à b ;
• les coefficients en dessous de la diagonale principale sont égaux à c.
Enfin, on introduit la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'ayant que des 1 pour coefficients et :

$$P(x) = \det(A(a,b,c) + xJ).$$

1) Montrer que P est un polynôme de degré au plus 1.

2) On suppose $b \neq c$. Déterminer $\det A(a,b,c)$ en fonction de a, b, c et n.

3) Calculer $\det A(a,b,c)$ dans le cas où $b = c$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun Mines-Ponts en filière MP en 2017. Il faut savoir qu'à l'oral de Mines-Ponts en général sont proposés deux exercices, le premier avec une préparation (qui peut être assez courte (10 minutes)) et l'autre sans préparation. C'était le cas de cet exercice. Donc abordez-le comme si vous étiez en situation d'oral et donc comme si vous aviez quelqu'un derrière vous. C'est un bon entraînement. Et regardez de temps en temps l'analyse car on y donne des indications. Le jour de l'oral, l'examinateur vous en donnera (*a priori*) si vous bloquez un certain temps à une question.
Plus précisément, ici l'exercice propose le calcul d'un déterminant. Pour le faire, il y a trois manières principales de procéder (voir la partie « Techniques » pour plus de détail). Ici, on passe par un polynôme auxiliaire.

1) On veut montrer que $P(X) = \det(A(a,b,c) + XJ)$ est un polynôme de degré 1. L'idée, dans la suite de l'exercice, est alors de l'écrire sous la forme $\alpha X + \beta$ et il ne reste plus qu'à calculer β, qui donne $\det(A(a,b,c))$.

$\hookrightarrow$ On peut visualiser $P(x)$ sous la forme d'un grand déterminant et on peut procéder à des opérations élémentaires qui vont faire disparaître le trop plein de x. Dans ce type de question, il ne faut pas se perdre dans les calculs (développement du déterminant par exemple) car il y a le reste à faire.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Les candidats ne sont, en majorité, pas très solides au niveau calculatoire et perdent alors beaucoup de temps.

2) On calcule $\det A(a,b,c)$ mais uniquement dans le cas où $b \neq c$. En effet, on va appliquer $P(x) = \alpha x + \beta$ avec $x = -a$ et $x = -b$ pour en déduire α puis β (qui est la valeur qu'on veut). On va devoir diviser par $c - b$, qui ne doit donc pas être nul.

$\hookrightarrow$ On a tous compris que $P(0) = \det A(a,b,c)$.

3) On calcule $\det A(a,b,c)$ dans le cas restant : $b = c$. On a ainsi finalement la valeur de $\det A(a,b,c)$ dans tous les cas.

$\hookrightarrow$ L'idée est de remarquer que $g : h \mapsto \det(A(a,b,b+h))$ est une fonction polynomiale

en h donc continue, puis de remplacer $\det(A(a,b,b+h))$ avec la formule trouvée à **2)** (en supposant $h \neq 0$) et enfin de remarquer que $\det A(a,b,b)$ est $\lim\limits_{h\to 0} g(h)$.
Il reste à utiliser la notion de nombre dérivé.
En deuxième année, on donne des résultats sur la continuité et la dérivabilité des fonctions multilinéaires (comme le déterminant). Cette question fait donc un pont entre la première et la deuxième année. C'est l'esprit de ce livre.

Corrigé

1) On commence par écrire :

$$P(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & \dots & \dots & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & \dots & \dots & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x & \dots & b+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c+x & c+x & \dots & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & \dots & \dots & c+x & a+x \end{vmatrix}.$$

À chaque colonne (hormis la première C_1), on retranche C_1, c'est-à-dire, on fait les opérations élémentaires : $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $C_k \leftarrow C_k - C_1$.
x disparaît des nouvelles colonnes C_2 à C_n. La contribution en x ne se trouve plus que dans la première colonne C_1. Un développement du déterminant $P(x)$ par rapport à cette colonne fait écrire $P(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des quantités $(a+x)$ et $(c+x)$, et on peut conclure :

$$\boxed{P \text{ est un polynôme de degré au plus 1.}}$$

2) On remarque que $P(-b)$ est un déterminant triangulaire inférieur ayant n fois le coefficient $a-b$ sur sa diagonale principale et $P(-c)$ est un déterminant triangulaire supérieur ayant n fois le coefficient $a-c$ sur sa diagonale principale.
Alors : $P(-b) = (a-b)^n$ et $P(-c) = (a-c)^n$.
Posons $P(x) = \alpha x + \beta$. Il s'agit de déterminer α et β. On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P(-b) & = & (a-b)^n \\ P(-c) & = & (a-c)^n \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -\alpha b + \beta & = & (a-b)^n \\ -\alpha c + \beta & = & (a-c)^n \end{array} \right. .$$

La différence des deux lignes du dernier système donne (avec $c - b \neq 0$) :

$$-\alpha b + \alpha c = (a-b)^n - (a-c)^n \Rightarrow \alpha = \frac{(a-b)^n - (a-c)^n}{c-b}.$$

Donc : $\beta = (a-c)^n + \alpha c = (a-c)^n + c\dfrac{(a-b)^n - (a-c)^n}{c-b}$.
En mettant au même dénominateur, $\beta = \dfrac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}$.
Puis, $\det(A(a,b,c)) = P(0) = \beta$. On peut conclure :

$$\boxed{\det(A(a,b,c)) = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.}$$

3) La formule précédente n'est plus valable car on a divisé par $c-b$ qui est maintenant nul. Soit maintenant h un réel.

La fonction $g : h \mapsto \det(A(a,b,b+h))$ est une fonction polynomiale en h (attention, son degré est certainement plus grand que 1). On peut le voir en développant ce déterminant selon n'importe quelle rangée. Il n'est pas besoin d'avoir une expression de cette forme développée. Par contre, on peut remarquer que cette fonction polynomiale en h est continue en h, comme toutes les fonctions polynomiales.
On a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} g(h) = g(0) = \det(A(a,b,b)).$$

Or, pour $h \neq 0$, $g(h) = \dfrac{(b+h)(a-b)^n - b(a-(b+h))^n}{b+h-b}$, en utilisant le résultat de la question **2)**. Cela donne :

$$\forall h \neq 0,\ g(h) = \frac{(b+h)(a-b)^n - b(a-b-h)^n}{h} = \frac{\Phi(h)-\Phi(0)}{h-0},$$

en posant :

$$\Phi(h) = (b+h)(a-b)^n - b(a-b-h)^n.$$

En effet, $\Phi(0) = (b+0)(a-b)^n - b(a-b-0)^n = b(a-b)^n - b(a-b)^n = 0$.
La fonction Φ est évidemment dérivable et pour tout h,

$$\Phi'(h) = (a-b)^n + nb(a-b-h)^{n-1}.$$

Donc : $g(0) = \lim\limits_{h\to 0} g(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Phi(h)-g(0)}{h-0} = \Phi'(0)$, ce qui donne :

$$\boxed{\det(A(a,b,b)) = \Phi'(0) = (a-b)^n + nb(a-b)^{n-1} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on calcule un déterminant. Il y a en fait trois manières principales de procéder.
1) La première manière (quand on a de la chance) est de développer directement selon une rangée et (ou) de faire quelques opérations élémentaires sur des lignes ou colonnes avant de développer selon une rangée. On peut reconnaître des déterminants classiques (par exemple des déterminants triangulaires) et la conclusion arrive rapidement.
2) La deuxième manière est de trouver une relation de récurrence qui permette le calcul du déterminant de proche en proche, la clé est certainement ici aussi un développement selon une rangée bien choisie.
3) Et la troisième manière est d'utiliser un déterminant auxiliaire qui est généralement un polynôme en x. Un exemple emblématique de cette méthode est le calcul du déterminant de Vandermonde (pour ceux qui connaissent). Voir **l'exercice 20.2**. Une autre illustration se trouve bien sûr dans cette planche.

♡ Il faut se souvenir des opérations élémentaires qui ne changent pas la valeur d'un déterminant, ce sont les opérations du type $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + aC_j$, où $a \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

Formulaire

• *Définition du nombre dérivée en a*

On dit que f, fonction de I contenant a dans $\mathbb{R}$, est dérivable en a lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ défini pour $x \neq a$, admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, cette limite s'appelle **nombre dérivé** de f en a et est notée $f'(a)$.
On dit que f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a lorsque le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ défini pour $x \neq a$, admet une limite finie quand x tend vers a à droite (repectivement à gauche). Dans ce cas, cette limite s'appelle **nombre dérivé à droite** (respectivement **nombre dérivé à gauche**) de f en a et est notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$).

• *Développement limité à l'ordre* 1 *d'une fonction dérivable en a*

La fonction f, définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est dérivable en $a \in I$ si et seulement s'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = f(a) + d.(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a),$$

où $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x-a) = 0$. Dans ce cas, $d = f'(a)$.

• *Développement d'un déterminant selon une rangée*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **mineur d'indice** (i_0, j_0) le nombre : $\Delta_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0} \det(A_{i_0,j_0})$, où A_{i_0,j_0} est la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de la matrice A, en supprimant sa $i_0{}^{\text{ème}}$ ligne et sa $j_0{}^{\text{ème}}$ colonne.

Alors, pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j}$.

On dit que l'on a développé selon la $i_0{}^{\text{ème}}$ ligne.

Et, pour tout $j_0 \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0}$.

On dit que l'on a développé selon la $j_0{}^{\text{ème}}$ colonne.

• *Déterminant triangulaire*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n, qui est **triangulaire supérieure ou inférieure**. Alors :

$$\det(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \ldots \times a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients de sa diagonale principale.

Jour n^{o}17

Exercice 17.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Une particule P possède deux états possibles 1 et 2 et peut passer d'un état à l'autre de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la *v.a.r* X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de P au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :

• si au temps n, P est dans l'état 1, au temps $n+1$, P passe à l'état 2 avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$;

• si au temps n, P est dans l'état 2, au temps $n+1$, P passe à l'état 1 avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$.

On suppose enfin que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

1) Déterminer, en justifiant ce que vous faites, la loi de X_1.

2) On pose $\mu_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ le vecteur-ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n.
Justifier la relation matricielle : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \mu_n A$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à déterminer.

3) En déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de X_5.

4) On note T la *v.a.r* égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$.
Déterminer $P(T = 1)$ puis $P(T = k)$, pour tout entier $k \geqslant 2$.

Exercice 17.2 — MPSI-PCSI-PTSI

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \langle f,\, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt.$$

1) Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f,\, g\rangle$ est un produit scalaire.

2) On pose pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $I(a, b, c) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|t| - at^2 - bt - c\right)^2\, dt.$

- **a)** Trouver (a, b, c) pour que $I(a, b, c)$ soit minimale.
- **b)** Calculer le minimum en question.

Énoncé

Une particule P possède deux états possibles 1 et 2 et peut passer d'un état à l'autre de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la *v.a.r* X_n égale à l'état de la particule au temps n. L'état de P au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps n selon les règles suivantes :
- si au temps n, P est dans l'état 1, au temps $n+1$, P passe à l'état 2 avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$;
- si au temps n, P est dans l'état 2, au temps $n+1$, P passe à l'état 1 avec une probabilité de $\dfrac{1}{4}$.

On suppose enfin que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

1) Déterminer, en justifiant ce que vous faites, la loi de X_1.

2) On pose $\mu_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ le vecteur-ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de X_n.
Justifier la relation matricielle : $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à déterminer.

3) En déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de X_5.

4) On note T la *v.a.r* égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$.
Déterminer $P(T = 1)$ puis $P(T = k)$, pour tout entier $k \geqslant 2$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'une partie de l'écrit de Mathématiques II du Concours Commun INP (ex CCP), filière MP en 2017.
C'est un exercice de probabilités qui utilise l'algèbre matricielle. On identifie la loi d'une v.a.r X_n et un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et on étudie la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au travers d'une matrice carrée d'ordre deux dite stochastique. Ce type d'étude se développe surtout en deuxième année à partir de la diagonalisation de la matrice. Nous n'irons pas aussi loin ici. On détermine donc la loi de X_n (en commençant par X_1) puis on étudie en fin d'exercice la loi de T appelé temps d'attente d'un certain événement (ici il s'agit de l'accès à l'état 1). Cet exercice est notamment un prétexte pour utiliser les formules classiques que sont la formule des probabilités totales et la formule des probabilités composés. Enfin, soyez rigoureux et posez bien les choses comme en témoigne l'extrait de rapport ci-dessous. Par exemple, le premier piège est de confondre le temps et l'état. Le temps prend toutes les valeurs entières et l'état vaut 1 ou 2.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Il faut justifier les calculs : argument d'indépendance ou formule des probabilités composées, argument d'incompatibilité, utilisation de la formule des probabilités totales en précisant le système complet d'événements associé... de même dire qu'une variable est binomiale ou géométrique sans pouvoir le justifier est sanctionné.

1) On commence par établir la loi de X_1, c'est-à-dire les valeurs $P(X_1 = 1)$ et $P(X_1 = 2)$.

$\hookrightarrow$ On commence par écrire $X_1(\Omega)$ pour justifier la suite. Puis, on remarque que l'état de la particule au temps 1 dépend de son état au temps 0, il faut donc introduire la formule des probabilités totales.

2) Il s'agit d'établir des égalités fournissant $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction de $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$ et de les mettre sous forme matricielle.

$\hookrightarrow$ Encore une fois, on applique la formule des probabilités totales sur le bon système complet d'événements.

3) On détermine A^5, ce qui va permettre d'avoir la loi de X_5.

$\hookrightarrow$ Ici, on propose la calculette mais vous pouvez en profiter pour faire un peu de Python pour l'entraînement ou aussi faire les calculs à la main, c'est-à-dire « à l'ancienne ».

4) Ici, on termine par une question un peu plus originale mais qui permet de mettre en lumière un type de problème classique en probabilité : le temps d'attente d'un événement. Plus, précisément, ici, on désire connaître le temps d'attente T à l'accès 1. Attention, $T(\Omega) = \mathbb{N}$. On sort du cadre proprement dit des variables aléatoires étudiées en première année mais la question posée peut être résolue par le bagage de première année.

$\hookrightarrow$ Par exemple l'événement $(T = k)$ (pour k non nul) signifie que l'on arrive pour la première fois à l'état 1 au temps k et que l'on était à l'état 2 du temps 0 au temps $k-1$. Ainsi, on se ramène à une intersection d'événements et la formule des probabilités composées pend au nez.

Corrigé

1) La *v.a.r* X_1 est égale à l'état de la particule au temps 1.
On a : $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. Donc, ici, en prenant $n = 0$:

- si au temps 0, P est dans l'état 1, alors au temps 1, P passe à l'état 2 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- si au temps 0, P est dans l'état 2, alors au temps 1, P passe à l'état 1 avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.

On sait que : $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \frac{1}{2}$.
Les deux événements $(X_0 = 1)$ et $(X_0 = 2)$ forment un système complet d'événements et on a, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_1 = 1) = P(X_0 = 1)P_{(X_0=1)}(X_1 = 1) + P(X_0 = 2)P_{(X_0=2)}(X_1 = 1).$$

Ce qui donne : $P(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. De même,

$$P(X_1 = 2) = P(X_0 = 1)P_{(X_0=1)}(X_1 = 2) + P(X_0 = 2)P_{(X_0=2)}(X_1 = 2).$$

Ce qui donne : $P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$.
(On pouvait aussi faire $P(X_1 = 2) = 1 - P(X_1 = 1)$.) Ainsi :

$$\boxed{P(X_1 = 1) = \frac{3}{8} \text{ et } P(X_1 = 2) = \frac{5}{8}.}$$

2) On généralise ce que l'on a fait à la question précédente.

Déjà, $X_n(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \{1, 2\}$ et on utilise la formule des probabilités totales deux fois sur le système complet d'événements $\{(X_n = 1), (X_n = 2)\}$.

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1),$$

et :

$$P(X_{n+1} = 2) = P(X_n = 1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + P(X_n = 2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2),$$

ce qui donne les deux relations :

$$\begin{array}{rcl} P(X_{n+1} = 1) & = & \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{4}P(X_n = 2) \\ P(X_{n+1} = 2) & = & \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{3}{4}P(X_n = 2) \end{array}.$$

On en déduit la relation matricielle : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_{n+1} = \mu_n A$ car :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 1) & P(X_{n+1} = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Et donc :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.}$$

3) On va en déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de X_5.
On commence par partir de $\mu_1 = \mu_0 A$. On a : $\mu_2 = \mu_1 A = \mu_0 A^2$.
On suppose donc que pour n fixé entier, $\mu_n = \mu_0 A^n$. Alors :

$$\mu_{n+1} = \mu_n A = (\mu_0 A^n)A = \mu_0 A^{n+1}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \mu_0 A^n$. On applique avec $n = 5$.
Vous pouvez utiliser une calculette pour calculer A^5.
Nous proposons une commande Python :
$>>>$ *import numpy as np*; *import numpy.linalg as alg*
$>>>$ $alg.matrix\_power(np.array([[1/2, 1/2], [1/4, 3/4]]), 5)$
$array([[0.33398438, 0.66601562],\ [0.33300781, 0.66699219]])$
La commande $alg.matrix\_power(A, n)$ donne la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice A.
Il reste à multiplier par μ_0. On tape :
$>>>$ $mu0\ =\ np.array([[1/2, 1/2]])$
$>>>$ $A5\ =\ alg.matrix\_power(np.array([[1/2, 1/2], [1/4, 3/4]]), 5)$
$>>>$ $np.dot(mu0, A5)$
$array([[0.33349609, 0.66650391]])$
Donc, on a pour valeurs approchées :

$$\boxed{P(X_5 = 1) = 0.33349609 \text{ et } P(X_5 = 2) = 0.66650391.}$$

Remarque.

On pouvait calculer A^5 directement.
On commence par A^2, puis son carré A^4, et enfin $A^5 = A^4 A$:

$$A^2 = \frac{1}{4^2}\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = \frac{1}{4^4}\begin{pmatrix} 86 & 170 \\ 85 & 171 \end{pmatrix} \Rightarrow A^5 = \frac{1}{4^5}\begin{pmatrix} 342 & 682 \\ 341 & 683 \end{pmatrix}.$$

On en déduit des valeurs exactes pour :

$$P(X_5 = 1) = \frac{1}{2 \times 4^5}[342 + 341] = \frac{683}{2 \times 4^5}.$$

$$P(X_5 = 2) = \frac{1}{2 \times 4^5}[682 + 683] = \frac{1365}{2 \times 4^5}.$$

4) On note T la *v.a.r* égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$.
On dit que T est le temps d'attente du premier accès à l'état 1.
On remarque, au passage, que $P(T = 0) = \dfrac{1}{2}$, bien que cela ne soit pas demandé.

• Déterminons $P(T = 1)$. L'événement $(T = 1)$ signifie que l'on arrive pour la première fois à l'état 1 au temps 1 et donc que l'on était à l'état 2 au temps 0.
Donc : $(T = 1) = (X_0 = 2) \cap (X_1 = 1)$.
Et, en utilisant la formule des probabilités composées,

$$P(T = 1) = P(X_1 = 1, X_0 = 2) = P(X_0 = 2)P_{(X_0=2)}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

• Déterminons $P(T = k)$, pour tout entier $k \geqslant 2$.
L'événement $(T = k)$ signifie que l'on arrive pour la première fois à l'état 1 au temps k et donc que l'on était à l'état 2 du temps 0 au temps $k - 1$.
Donc : $(T = k) = (X_0 = 2) \cap ... \cap (X_{k-1} = 2) \cap (X_k = 1)$.
Ce qui donne : $P(T = k) = P(X_0 = 2, X_1 = 2, ..., X_{k-1} = 2, X_k = 1)$.
C'est-à-dire, en usant encore de la formule des probabilités composées, la probabilité $P(T = k)$ vaut (en posant $B_m = \displaystyle\bigcap_{j=0}^{m}(X_j = 2)$ pour tout $m \in [\![0, k - 1]\!]$) :

$$P(X_0 = 2)P_{B_0}(X_1 = 2)P_{B_1}(X_2 = 2)...P_{B_{k-2}}(X_{k-1} = 2)P_{B_{k-1}}(X_k = 1).$$

Or, si $m \in [\![0, k - 2]\!]$, $P_{B_m}(X_{m+1} = 2)$ est la probabilité de rester à l'état 2 au temps $m + 1$ sachant que l'on y était auparavant de façon sûre. C'est donc $\dfrac{3}{4}$.
Et enfin, $P_{B_{k-1}}(X_k = 1)$ est la probabilité de passer à l'état 1 au temps k sachant que l'on était de façon sûre à l'état 2 auparavant. Cette probabilité est $\dfrac{1}{4}$.
Ce qui donne : $P(T = k) = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$. On écrit :

$$\boxed{P(T = 1) = \frac{1}{8} \text{ et plus généralement : } \forall k \geqslant 1,\ P(T = k) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.}$$

Remarque

On peut vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(T = k) = 1$, en appliquant les égalités que l'on vient de trouver. Ce type de loi de probabilité se rencontre souvent en deuxième année.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on détermine la loi d'une variable aléatoire réelle X. On commence par trouver $X(\Omega)$, ce qui permet de rechercher ensuite toutes les valeurs $P(X = x_k)$, avec $x_k \in X(\Omega)$. Puis, soit on remarque que X suit une loi connue (si par exemple $X(\Omega) = \{0, 1\}$, X suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(X = 1)$), soit on donne toutes les valeurs $P(X = x_k)$ et on peut vérifier à la fin que $\displaystyle\sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = 1$, histoire de savoir si c'est cohérent.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2016
>
> Quand on demande la loi d'une variable aléatoire X, le premier point à préciser est l'ensemble des valeurs prises par cette variable, noté $X(\Omega)$. Très peu de candidats pensent à le préciser.

♡ Il faut se souvenir que l'on applique la formule des probabilités totales avec un système complet d'événements qu'il faut obligatoirement déterminer auparavant.

♡ Il faut se souvenir que sous Python, la commande $alg.matrix\_power(A, n)$ renvoie la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice A (écrite avec $np.array$).
Il faut préalablement avoir tapé :
import numpy as np ; *import numpy.linalg as alg*

Formulaire

• *Formule des probabilités totales*

Soit I un ensemble fini et un système complet d'événements $(A_n)_{n\in I}$, alors on a, pour tout événement B,

$$P(B) = \sum_{n\in I} P(B \cap A_n) = \sum_{n\in I} P_{A_n}(B)\, P(A_n).$$

• *Formule des probabilités composées*

$A_1, ..., A_n$ étant n événements d'un espace probabilisé et si $P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)...P_{\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}(A_n).$$

Énoncé

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose :

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \langle f,\ g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

1) Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f,\ g\rangle$ est un produit scalaire.

2) On pose pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $I(a, b, c) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|t| - at^2 - bt - c\right)^2\, dt$.

a) Trouver (a, b, c) pour que $I(a, b, c)$ soit minimale.

b) Calculer le minimum en question.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral de la banque PT (donc pour la filière PT) en 2016. On doit déterminer le minimum d'une fonction I de trois variables. L'idée motrice est de remarquer que $I(a, b, c)$ s'exprime comme la norme au carré d'une différence de deux fonctions. Il faut donc définir proprement cette norme et donc le produit scalaire qui lui est associé dans un premier temps. Il faut ensuite utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et la formule qui permette de calculer la projection orthogonale d'une fonction sur un certain sous-espace vectoriel, tout cela par rapport au produit scalaire qu'on a fixé. Nous allons détailler un peu plus le processus ci-dessous.
Une remarque, si vous êtes en TSI1, vous pourrez aborder cet exercice en TSI2 quand vous aurez fait le chapitre sur les espaces préhilbertiens.
Ce type d'exercice est très classique et c'est une excellente chose de le maîtriser quand on aborde la deuxième année car finalement dans cette partie du programme, le gros des connaissances (pour les filières MPSI-PCSI-PTSI) se trouve en première année.

1) On commence par vérifier que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire car en effet c'est fondamental pour la suite de l'exercice.

↪ C'est aussi un prétexte pour réviser un peu son cours.
Allez dans le formulaire si vous avez besoin de vous rafraîchir !

2) On demande de déterminer la valeur (a, b, c) pour laquelle $I(a, b, c)$ est minimale puis la valeur de ce minimum. Comme indiqué plus haut, nous allons passer dans l'espace préhilbertien E, muni du produit scalaire de la question **1)**. Donnons maintenant un peu le synopsis de cette question. On commence par interpréter $I(a, b, c)$ par rapport au produit scalaire de cette question **1)**.
Si l'on pose $\langle f,\ f\rangle = \|f\|^2$, alors : $I(a, b, c) = \||t| - (at^2 + bt + c)\|^2$.
Or, $t \mapsto at^2 + bt + c$, quand $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, parcourt l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
Si l'on note maintenant $p(t)$ le projecté orthogonal de $t \mapsto |t|$ sur $\mathbb{R}_2[X]$, pour le produit scalaire de la question **1)**, alors :

$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \||t| - (at^2 + bt + c)\|^2 = \||t| - p(t)\|^2.$$

Comme p est un polynôme de degré au plus 2, ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont dans l'ordre c, b et a cherchés. Pour calculer p, nous allons procéder en deux étapes. On détermine d'abord une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour $\langle\,,\,\rangle$ à partir de sa base canonique en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Puis, on applique la formule (voir le formulaire de cet exercice) qui donne le projeté $p(t)$ en utilisant les produits scalaires de p avec les vecteurs d'une base orthonormale du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.

a) Ici, on demande finalement de calculer $p(t)$, la fonction qui est le projecté orthogonal de $t \mapsto |t|$ sur $\mathbb{R}_2[X]$. On récupère les coefficients de la fonction polynomiale p, qui sont dans l'ordre décroissant des degrés les valeurs a, b et c que l'on veut.

$\hookrightarrow$ On peut dans les calculs remarquer que lorsqu'on intègre une fonction impaire entre -1 et 1, la valeur de l'intégrale est nulle. Cela permet d'aller (un petit peu) plus vite. Et on peut remarquer aussi que l'intégrale de -1 à 1 d'une fonction paire est deux fois son intégrale de 0 à 1.

b) On veut $I(a,b,c)$ pour (a,b,c) trouvé à la question **2) a)**.

$\hookrightarrow$ Il s'agit donc de calculer $\||t| - p(t)\|^2$. Encore une fois, pour aller un peu plus vite, pensez aux simplifications quand on intègre une fonction paire ou impaire entre -1 et 1.

Corrigé

1) Il faut montrer que $\langle\,,\,\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

Symétrie

Pour tout couple $(f,g) \in E^2$, la quantité $\langle f,\, g\rangle$ vaut :

$$\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\,dt = \langle g,\, f\rangle.$$

Bilinéarité

Pour tout $(f,g,h) \in E^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f,\, g+\alpha h\rangle &= \int_{-1}^{1} f(t)(g(t)+\alpha h(t))\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt + \alpha\int_{-1}^{1} f(t)h(t)\,dt \\ &= \langle f,\, g\rangle + \alpha\langle f,\, h\rangle. \end{aligned}$$

Forme définie et positive

Pour tout $f \in E$, $\langle f,\, f\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt \geqslant 0$, car on intègre de -1 à 1 une fonction à valeurs positives. La forme $\langle\,,\,\rangle$ est bien définie.

Puis : $\langle f,\, f\rangle = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt = 0$.

Comme $t \mapsto f^2(t)$ est continue sur $[-1,1]$ et à valeurs positives et comme son intégrale de -1 à 1 est nulle, $t \mapsto f^2(t)$ est nulle sur $[-1,1]$, c'est-à-dire que $t \mapsto f(t)$ est nulle sur $[-1,1]$. La forme $\langle\,,\,\rangle$ est positive.

On peut conclure :

$$\boxed{\langle .\,,\,. \rangle \text{ est un produit scalaire.}}$$

2) a) On pose pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $I(a,b,c) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(|t| - at^2 - bt - c\right)^2 \, dt$.
On commence par interpréter $I(a,b,c)$ par rapport au produit scalaire de la première question. Si l'on pose $\langle f,\, f\rangle = \|f\|^2$, $I(a,b,c) = \||t| - (at^2+bt+c)\|^2$.
Or, $t \mapsto at^2+bt+c$, quand $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, parcourt l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
Si l'on note $p(t)$ le projeté orthogonal de $t \mapsto |t|$ sur $\mathbb{R}_2[X]$, pour le produit scalaire de la question **1)**, alors : $\displaystyle\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \||t| - (at^2+bt+c)\|^2 = \||t| - p(t)\|^2$.
Comme p est un polynôme de degré au plus 2, ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont dans l'ordre c, b et a cherchés.
Pour calculer p, nous allons procéder en deux étapes.
Étape 1
On détermine une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour $\langle\,,\,\rangle$ à partir de sa base canonique en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Cherchons pour commencer une base orthogonale (V_1, V_2, V_3) de $\mathbb{R}_2[X]$.

On pose : $\begin{cases} V_1 &= 1 \\ V_2 &= t+\alpha \\ V_3 &= t^2+\beta t+\gamma \end{cases}$, où α, β et γ sont à déterminer. On écrit :

$$\langle V_1, V_2\rangle = \int_{-1}^{1} (t+\alpha)\, dt = \left[\frac{t^2}{2} + \alpha t\right]_{-1}^{1} = 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Puis :

$$\langle V_1, V_3\rangle = \int_{-1}^{1} (t^2+\beta t+\gamma)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} + \beta\frac{t^2}{2} + \gamma t\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{3}.$$

Et enfin, en prenant $\alpha = 0$ pour simplifier :

$$\langle V_2, V_3\rangle = \int_{-1}^{1} t(t^2+\beta t+\gamma)\, dt = \left[\frac{t^4}{4} + \beta\frac{t^3}{3} + \gamma\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Il reste : $\begin{cases} V_1 &= 1 \\ V_2 &= t \\ V_3 &= t^2 - \frac{1}{3} \end{cases}$.
On va maintenant « normaliser » cette nouvelle base.
Posons $W_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|}$, $W_2 = \dfrac{V_2}{\|V_2\|}$ et $W_3 = \dfrac{V_3}{\|V_3\|}$. On a les implications :

$$\langle V_1, V_1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\, dt = 2 \Rightarrow W_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} V_1.$$

$$\langle V_2, V_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow W_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} V_2.$$

$$\langle V_3, V_3\rangle = \int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1}\left(t^4-\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{9}\right) dt = \left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{9}+\frac{t}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{45},$$

ce qui implique : $W_3 = \sqrt{\dfrac{45}{8}}V_3$.

On en déduit nos trois vecteurs : $\begin{cases} W_1 &= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ W_2 &= \sqrt{\dfrac{3}{2}}t \\ W_3 &= \sqrt{\dfrac{45}{8}}\left(t^2-\dfrac{1}{3}\right)\end{cases}$.

Étape 2

On utilise la formule : $p = \langle W_1, |t|\rangle W_1 + \langle W_2, |t|\rangle W_2 + \langle W_3, |t|\rangle W_3$.
On peut l'écrire :

$$p = \frac{1}{2}\langle V_1, |t|\rangle V_1 + \frac{3}{2}\langle V_2, |t|\rangle V_2 + \frac{45}{8}\langle V_3, |t|\rangle V_3.$$

On passe aux calculs et on utilise la parité de $t \mapsto |t|$:

$$\langle V_1, |t|\rangle = \int_{-1}^{1} |t|\, dt = 2\int_0^1 t\, dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1.$$

Puis, comme $t \mapsto t|t|$ est impaire : $\langle V_2, |t|\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t|t|\, dt = 0$.

Enfin, comme $t \mapsto |t|\left(t^2-\dfrac{1}{3}\right)$ est une fonction paire,

$$\langle V_3, |t|\rangle = \int_{-1}^{1} |t|\left(t^2-\frac{1}{3}\right) dt = 2\int_0^1\left(t^3-\frac{1}{3}t\right) dt = 2\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

On regroupe tout cela : $p = \dfrac{1}{2}V_1 + \dfrac{45}{8}\times\dfrac{1}{6}V_3 = \dfrac{1}{2}V_1 + \dfrac{15}{16}V_3$.
Et finalement, $p = \dfrac{1}{2} + \dfrac{15}{16}\left(t^2-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{15}{16}t^2 + \dfrac{3}{16}$.
Ce qui donne :

$$\boxed{\text{On en déduit que } a = \frac{15}{16},\ b = 0 \text{ et } c = \frac{3}{16}.}$$

b) On veut calculer la valeur du minimum, c'est-à-dire la valeur de :

$$\||t| - p(t)\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(|t| - \left(\frac{15}{16}t^2+\frac{3}{16}\right)\right)^2 dt.$$

Comme on intègre une fonction paire, on a :

$$\||t| - p(t)\|^2 = 2\int_0^1\left(t - \left(\frac{15}{16}t^2+\frac{3}{16}\right)\right)^2 dt.$$

On commence par développer l'intérieur de l'intégrale $\| |t| - p(t) \|^2$:

$$2 \int_0^1 \left(t^2 + \frac{9}{256} + \frac{225}{256} t^4 + \frac{90}{256} t^2 - \frac{3}{8} t - \frac{15}{8} t^3 \right) dt.$$

On intègre :

$$2 \left[\frac{t^3}{3} + \frac{9t}{256} + \frac{225 t^5}{5 \times 256} + \frac{90 t^3}{3 \times 256} - \frac{3t^2}{8 \times 2} - \frac{15 t^4}{4 \times 8} \right]_0^1.$$

On finit les calculs. Notre intégrale vaut :

$$2 \left(\frac{1}{3} + \frac{9}{256} + \frac{45}{256} + \frac{30}{256} - \frac{3}{16} - \frac{15}{32} \right),$$

c'est-à-dire : $2 \left(\frac{84}{256} + \frac{1}{3} - \frac{3}{16} - \frac{15}{32} \right) = 2 \left(\frac{21}{64} + \frac{1}{3} - \frac{21}{32} \right) = \frac{2}{3 \times 64}$.
Finalement, en divisant le haut et le bas par 2,

$$\boxed{\text{la valeur de } \min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \| |t| - (at^2 + bt + c) \|^2 = \| |t| - p(t) \|^2 = \frac{1}{96}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour déterminer une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$. On suppose ici $\dim F = 3$ et notons $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ une base de F.
Étape 1. On pose $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ puis $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + a_1 \vec{v}_1$, où $a_1 \in \mathbb{R}$ est déterminé par la condition : $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = 0$. Cela donne : $a_1 = -\frac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}$ puis on explicite $\vec{v}_2$.
Étape 2. On pose ensuite $\vec{v}_3 = \vec{u}_3 + b_1 \vec{v}_1 + b_2 \vec{v}_2$, où $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ est déterminé par les conditions : $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = 0$.
On trouve : $b_1 = -\frac{\langle \vec{v}_1, \vec{u}_3 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}$ et $b_2 = -\frac{\langle \vec{v}_2, \vec{u}_3 \rangle}{\|\vec{v}_2\|^2}$ puis on explicite $\vec{v}_3$.
Étape 3. À ce niveau, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base orthogonale de F.
La famille $\left(\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}, \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}, \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} \right)$ est une base orthonormée de F.

♡ Il faut se souvenir que pour tout réel a, $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$ si f est continue et impaire sur $[-a, a]$ et que $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2 \int_0^a f(t)\, dt$ si f est continue et paire sur $[-a, a]$.

♡ Il faut se souvenir que pour calculer la distance $d(\vec{x}, F)$ entre $\vec{x}$ et F, on calcule le projeté orthogonal $p_F(\vec{x})$ de $\vec{x}$ sur F puis $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$, qui vaut $d(\vec{x}, F)$.

♡ Il faut se souvenir que, souvent, pour calculer le minimum d'une fonction de plusieurs variables, on peut l'interpréter comme le minimum de la norme d'un vecteur à un sous-espace vectoriel F. Il faut préciser alors le produit scalaire utilisé dont est associé cette norme. Les coordonnées du projeté orthogonal de ce vecteur sur F dans une base orthonormale de F fournissent la valeur minimale de cette fonction.

Rapport du jury Mines-Ponts 2017

Le théorème d'orthonormalisation de Schmidt pose toujours des problèmes à certains étudiants.

Formulaire

• *Définition d'un produit scalaire*

Une application $\langle\,,\,\rangle : E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'on a à la fois les quatre assertions :

(i) $\langle\,,\,\rangle$ est bilinéaire, c'est-à-dire : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall (\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w}) \in E^3$,

$$\langle a\vec{u} + b\vec{v},\,\vec{w}\rangle = a\langle \vec{u},\,\vec{w}\rangle + b\langle \vec{v},\,\vec{w}\rangle,$$

$$\langle \vec{w},\,a\vec{u} + b\vec{v}\rangle = a\langle \vec{w},\,\vec{u}\rangle + b\langle \vec{w},\,\vec{v}\rangle\,;$$

(ii) $\forall\,(\vec{u},\,\vec{v}) \in E^2,\ \langle \vec{v},\,\vec{u}\rangle = \langle \vec{u},\,\vec{v}\rangle\,;$

(iii) $\forall\,\vec{u} \in E,\ \langle \vec{u},\,\vec{u}\rangle \geqslant 0\,;$

(iv) $\forall\,\vec{u} \in E,\ \left[\langle \vec{u},\,\vec{u}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}\right].$

• *Orthogonal d'un sous-espace vectoriel F*

Si F est un sous-espace vectoriel de E, espace vectoriel euclidien ou préhilbertien associé au produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$, l'orthogonal de F, que l'on note $F^{\perp}$, est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de E tels que pour tout $\vec{v} \in F$, on ait : $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$.
On montre que cet ensemble $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
De plus, si l'on connaît une base $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_l)$ de F, un vecteur u appartient à $F^{\perp}$ si et seulement si l'on a les égalités, pour tout i entier de 1 à l : $\langle \vec{u}, \vec{v}_i\rangle = 0$.

• *Projeté orthogonal sur le sous-espace vectoriel F*

Soit $(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_p)$ une base orthonormale d'un sous-espace vectoriel F de E espace euclidien ou un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$ alors le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur F est : $p(\vec{u}) = \langle \vec{w}_1, \vec{u}\rangle \vec{w}_1 + ... + \langle \vec{w}_p, \vec{u}\rangle \vec{w}_p$.

Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017

Ne pas oublier que si p est la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}\,(e_1, ..., e_n)$ alors la formule $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$ n'est valable que si $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de F. Ainsi, une mauvaise maîtrise de l'expression d'une projection orthogonale rend difficile le calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel donné.

• *Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel F*

La distance de $\vec{x} \in E$, espace euclidien ou préhilbertien muni d'un produit scalaire et d'une norme notée $\|.\|$, sur le sous-espace vectoriel F de E est $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$, où $p_F(\vec{x})$ est le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur F.

• *Définie-positivité de l'intégrale des fonctions continues*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, une fonction **continue et positive** sur $[a,b]$ avec $a < b$.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si f est nulle sur $[a,b]$.

Jour n^{o}18

Exercice 18.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E tel que :

$$f^{n-1} \neq 0 \text{ et } f^n = 0.$$

(On rappelle que f^n est la composée de f par lui-même n fois.)

1) Soit $\vec{v} \in E \setminus [\operatorname{Ker} f^{n-1}]$. Montrer que la famille :

$$B = \{\vec{v}, f(\vec{v}), ..., f^{n-1}(\vec{v})\}$$

est une base de E.

2) Écrire la matrice de f dans la base B.

3) Déterminer le rang de f, noté $\operatorname{Rg} f$.

Exercice 18.2 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI

Énoncé

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2}$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite l.

2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. On pose :

$$M_2 = \sup_{[0,1]} |f''|.$$

Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et n, on a :

$$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\, dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{6n^3}.$$

En déduire une majoration de :

$$\left| \int_0^1 f(x)\, dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

3) En appliquant la question précédente à la bonne fonction f, préciser un équivalent simple de $u_n - l$.

Énoncé

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E tel que :

$$f^{n-1} \neq 0 \text{ et } f^n = 0.$$

(On rappelle que f^n est la composée de f par lui-même n fois.)

1) Soit $\vec{v} \in E \setminus [\operatorname{Ker} f^{n-1}]$. Montrer que la famille :

$$B = \{\vec{v}, f(\vec{v}), ..., f^{n-1}(\vec{v})\}$$

est une base de E.

2) Écrire la matrice de f dans la base B.

3) Déterminer le rang de f, noté $\operatorname{Rg} f$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral de Mines-Ponts pour la filière PSI en 2008. On demande ici de déterminer le rang d'un endomorphisme nilpotent. C'est un exercice très classique. La notion d'endomorphisme nilpotent n'est pas citée dans la plupart des programmes officiels (à part MP) mais beaucoup de sujets de concours utilisent cette notion. En effet, il suffit de définir ce qu'est un endomorphisme nilpotent d'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$, il s'agit d'un endomorphisme tel que f^p soit nul sans que f^{p-1} le soit.

1) Allez voir l'exercice du **jour 3-1**. Dans cet exercice, il s'agit d'un endomorphisme nilpotent d'ordre 3 et on introduit comme par hasard la base B pour le cas $n = 3$. La pratique des exercices sur les endomorphismes nilpotents aurait pu nous faire penser à considérer la famille :

$$(\vec{v}, f(\vec{v}), ..., f^{n-1}(\vec{v})) ,$$

où $\vec{v} \in E \setminus [\operatorname{Ker} f^{n-1}]$.
Ici, on vous l'indique pour que vous puissiez démarrer sans souci.
Bon, maintenant, donnons une petite indication supplémentaire, au cas où.

$\hookrightarrow$ On sait qu'une famille libre de n vecteurs est nécessairement une base de E.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> L'algèbre linéaire de première année ne ressemble plus qu'à un vague souvenir pour quelques candidats.

2) On demande ici d'écrire la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base B introduite à la question précédente.

$\hookrightarrow$ On construit cette matrice colonne par colonne, les colonnes correspondent aux coordonnées des images de B exprimés dans la base B.

3) On demande ici le rang de f. C'est en fait pour trouver ce rang que l'on a écrit la matrice de f dans la base B.

$\hookrightarrow$ En effet, le rang de f est le rang de sa matrice dans n'importe laquelle des bases de l'espace vectoriel E, de dimension finie.

Corrigé

1) Comme $f^{n-1} \neq 0$, il existe bien $\vec{v} \in E \setminus [\operatorname{Ker} f^{n-1}]$, c'est-à-dire avec $f^{n-1}(\vec{v}) \neq 0$. Considérons donc la famille : $B = \{\vec{v}, f(\vec{v}), ..., f^{n-1}(\vec{v})\}$.
Comme B possède n éléments, il suffit de démontrer que B est libre pour avoir une base, l'espace vectoriel E étant de dimension n.

On suppose $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$(E_1) \;\; a_0\vec{v} + a_1 f(\vec{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

On applique f^{n-1} à (E_1), on obtient alors : $a_0 f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$, car $f^k(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout entier k supérieur ou égal à n.
Comme $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$, on en déduit que $a_0 = 0$. L'égalité (E_1) devient :

$$(E_2) \;\; a_1 f(\vec{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

On combine (E_2) par f^{n-2}, on obtient alors : $a_1 f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}$.
Et encore une fois, on utilise le fait que $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$. On en déduit que $a_1 = 0$.
De façon générale, soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons que l'on ait l'égalité :

$$(E_{k+1}) \;\; a_k f^k(\vec{v}) + ... + a_p f^p(\vec{v}) + ... + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

On applique f^{n-1-k} à (E_{k+1}).
Pour tout $p \in [\![k, n-1]\!]$, l'image de $a_p f^p(\vec{v})$ est $a_p f^{n-1-k+p}(\vec{v})$.
Ce vecteur est nul si $n - 1 - k + p \geqslant n \Leftrightarrow p \geqslant k + 1$. (E_{k+1}) devient :

$$a_k f^{n-1-k+k}(\vec{v}) = a_k f^{n-1}(\vec{v}) = \vec{0}.$$

Et comme bien entendu $f^{n-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$, on en déduit que $a_k = 0$.
On a bien : $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } B \text{ est libre et elle est donc une base de } E.}$$

2) On exprime la matrice de f par rapport à la base B. La colonne C_1 de cette matrice est le vecteur colonne des coordonnées de $f(\vec{v})$ dans la base B. De façon générale, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la colonne C_k est le vecteur colonne des coordonnées de $f(f^{k-1}(\vec{v}))$ dans B et donc la colonne C_n est le vecteur colonne des coordonnées de $f(f^{n-1}(\vec{v}))$ dans B. On remarque donc que C_n est la colonne nulle et que les autres colonnes sont des colonnes n'ayant que des 0 sauf un 1 dans une certaine ligne.
On obtient la matrice :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

3) On peut voir sans difficulté que la matrice A est de rang $n-1$. Pour le justifier, on peut dire par exemple que $\operatorname{Im} f$ a pour famille génératrice $B' = B \setminus \{\vec{v}\}$.
Cette famille génératrice est libre car B est libre.

En effet, une sous-famille d'une famille libre est une famille libre. B' est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$. Son cardinal est $n-1$.
Elle est donc une base de $\mathrm{Im}\, f$. Son cardinal est $n-1$.

$$\boxed{\text{Le rang } \mathrm{Rg}\, f \text{ de } f \text{ est } n-1.}$$

Remarque

On peut aussi faire des opérations élémentaires sur A pour obtenir la matrice J_{n-1}. Il suffit de permuter les lignes, ce qui ne transforme pas le rang et on obtient bien :

$$J_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que si f est un endomorphisme de E de dimension n, tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$ alors on peut toujours trouver $\vec{v}$ tel que $\{\vec{v}, f(\vec{v}), ..., f^{n-1}(\vec{v})\}$ soit une base de E. Et l'expression de la matrice de f dans cette base est simple et il faut savoir la trouver rapidement.

♡ Il faut se souvenir que dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre de n éléments est une base.

Formulaire

• Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on dit que ϕ, endomorphisme de E dans E, est **nilpotent** si et seulement s'il existe un entier p supérieur ou égal à 1, tel que l'on ait les contraintes : $\phi^p = 0$ et $\phi^{p-1} \neq 0$.
On note alors p l'indice de nilpotence. On remarque que l'endomorphisme nul est nilpotent d'ordre 1 en posant : $\phi^0 = Id \neq 0$.

• *Définition du rang d'une application linéaire*

Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F.
On appelle rang de f (noté $\mathrm{Rg}\, f$) la dimension de $\mathrm{Im}\, f$, sous-espace vectoriel de F.

• *Familles libres de E*

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille libre** de E si :

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ \left[\lambda_1\vec{x}_1 + ... + \lambda_p\vec{x}_p = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_p = 0\right].$$

Énoncé

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$.

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite l.

2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. On pose :

$$M_2 = \sup_{[0,1]} |f''|.$$

Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et n, on a :

$$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{6n^3}.$$

En déduire une majoration de :

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

3) En appliquant la question précédente à la bonne fonction f, préciser un équivalent simple de $u_n - l$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice d'Analyse posé à l'oral du Concours Mines-Ponts à la filière PSI en 2014. Au départ, on a l'impression d'avoir à faire à un exercice sur les suites réelles mais très vite, ce sont les notions d'intégrale et de formule de Taylor-Lagrange qui surgissent. On rappelle les différentes formules de Taylor dans le formulaire de cet exercice.

1) On doit montrer, dans cette question, la convergence d'une suite et sa limite. C'est vrai que dans certains exercices, on commence par prouver la convergence puis ensuite on détermine la limite. Ici, ce n'est absolument pas nécessaire. Par exemple, tenter de trouver la variation de la suite ne doit pas être aisé car u_n est une somme dont le terme générique dépend de n.

$\hookrightarrow$ Il faut penser aux sommes de Riemann. Ce serait dommage que ce soit l'examinateur qui vous en parle au bout d'une demi-heure de recherche infructueuse au tableau.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2010
>
> On constate de nombreuses confusions entre les notions de somme d'une série convergente et de somme de Riemann.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2005
>
> Rappelons, enfin, une fois de plus, que l'interrogation porte sur l'ensemble des programmes des classes de PSI, et de PCSI. Ce dernier point semble échapper à de nombreux candidats...

2) On a deux inégalités à montrer dans cette question. Le passage de la première à la seconde ne devrait pas poser trop de difficulté. Par contre, la première est plus difficile à prouver.

$\hookrightarrow$ Vous allez écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, (c'est-à-dire que le terme de droite de l'inégalité dépend de M_2) pour f sur $\left[\frac{k}{n}, x\right]$, où x est un réel entre 0 et 1, et $k \in [\![1, n]\!]$.
Puis on intègre le résultat entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$. Il faut faire alors un travail propre en faisant attention au fait que l'on part d'une inégalité avec une valeur absolue.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2008
>
> Renvoyons les candidats à l'essentiel : *apprendre son cours,* entraîner ses « petites cellules grises », pour reprendre l'expression d'un célèbre personnage à moustaches cher à Agatha Christie, et faire preuve d'un minimum d'inventivité le jour J, sans se fermer comme une huître.

3) On utilise ici la dernière inégalité de la question précédente en prenant une fonction f qui doit venir naturellement après le développement de la première question.
On retrouve alors l'expression de u_n dans cette inégalité et on calcule la limite de

$$\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

quand n tend vers l'infini.

$\hookrightarrow$ Cette question utilise encore les sommes de Riemann.

Corrigé

1) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$. On écrit cette expression sous la forme :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1}.$$

On a là une splendide somme de Riemann, associée à la fonction :

$$g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Cette fonction est évidemment continue sur $[0, 1]$. Il reste à utiliser la formule (rappelée dans le formulaire) sur les limites de somme de Riemann :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

On sait que arctan est une primitive de g. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

On peut conclure.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge et sa limite est } \frac{\pi}{4}.}$$

2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. On pose :

$$M_2 = \sup_{[0,1]} |f''|.$$

<u>*Première inégalité*</u>

On veut montrer que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{6n^3}.$$

En étant inspiré ou tout simplement à partir de l'indication, on commence par écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, (c'est-à-dire que le terme de droite de l'inégalité dépend de M_2) pour f sur $\left[\frac{k}{n}, x\right]$, où x est un réel entre 0 et 1, et k est un entier entre 1 et n. On a :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{2} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$

Encore une fois, allez vous rafraîchir la mémoire avec le formulaire !

On écrit le résultat sous la forme :

$$-\frac{M_2}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \leq f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(x - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{M_2}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.$$

Puis on intègre cette double inégalité entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$. L'expression :

$$\frac{M_2}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2$$

a pour primitive :

$$\frac{M_2}{6}\left(x - \frac{k}{n}\right)^3.$$

Son intégrale entre les deux bornes voulues donne :

$$-\frac{M_2}{6}\left(\frac{k-1}{n} - \frac{k}{n}\right)^3 = \frac{M_2}{6n^3}.$$

L'expression $f(x)$ a pour intégrale entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx.$$

Puis l'expression constante $f\left(\frac{k}{n}\right)$ a pour intégrale entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$: $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Et l'expression $\left(x-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right)$ a pour intégrale entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$:

$$\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 f'\left(\frac{k}{n}\right)\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} = -\frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

On a alors : $-\frac{M_2}{6n^3} \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{M_2}{6n^3}$.

On en déduit bien l'inégalité voulue :

$$\boxed{\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M_2}{6n^3}.}$$

Seconde inégalité

Il s'agit, à partir de l'inégalité précédente, d'en déduire une majoration de :

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Donnons le menu. On va sommer sur k avec l'aide de l'inégalité triangulaire autant de fois que nécessaire l'inégalité prouvée précédemment. On part de :

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

Vous avez reconnu l'utilisation de la relation de Chasles pour les intégrales.
Puis, en passant aux valeurs absolues, on a :

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

Puis on applique l'inégalité triangulaire promise :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|.$$

On applique enfin l'inégalité prouvée plus haut :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{M_2}{6n^3}.$$

On remarque que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{M_2}{6n^3} = \frac{M_2}{6n^2}$. On a bien le résultat :

$$\boxed{\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{6n^2}.}$$

3) On applique la question précédente à la fonction g de la première question, qui est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et on obtient :

$$(1) \quad \left| \int_0^1 g(x)\,dx - u_n + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M_2}{6n^2}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de (1) par n et que l'on fait tendre n vers $+\infty$, on remarque que :

$$\lim_{n\to+\infty} n \left(-\int_0^1 g(x)\,dx + u_n - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) \right) = 0.$$

Et donc : $u_n = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

L'expression $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ est constante et vaut $\dfrac{\pi}{4}$. L'expression $\displaystyle\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right)$ tend vers 0 mais par contre l'expression $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right)$ est (on le reconnaît) une nouvelle somme de Riemann. Sa limite, quand n tend vers $+\infty$, est :

$$\int_0^1 g'(x)\,dx = g(1) - g(0) = -\frac{1}{2}.$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$: $\displaystyle\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} g'\left(\frac{k}{n}\right) \sim -\frac{1}{4n}$.

On en déduit donc un équivalent simple de $u_n - l$, quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{u_n - \frac{\pi}{4} \sim -\frac{1}{4n}\ .}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que si l'on doit trouver le comportement quand n tend vers $+\infty$ d'une somme du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u(k,n)$, il est parfois intéressant de la mettre sous la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ (si cela est possible) et utiliser les résultats sur les sommes de Riemann.

Formulaire

• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. En partageant l'intervalle $[a,\ b]$ en n intervalles de longueurs égales à $\dfrac{b-a}{n}$, on obtient les $n+1$ points de subdivision : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, où $k \in [\![0, n]\!]$. Considérons alors les deux fonctions en escalier φ et ψ de subdivision subordonnée commune : $\sigma = (a,\ a_1,\ ...,\ a_{n-1},\ b)$ telles que : $\forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \forall\, x \in [a_k,\ a_{k+1}[\ ,\ \varphi(x) = f(a_k)$ et $\psi(x) = f(a_{k+1})$.
Ces fonctions en escalier approchent f et dans le cas (courant) où f est strictement monotone sur $[a,\ b]$, ces deux fonctions encadrent f. Les intégrales de ces deux fonctions en escalier sont les **sommes de Riemann de** f sur $[a,\ b]$ par rapport à σ.
Il s'agit de : $I_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right),\ J_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right).$
Les suites composées des sommes de Riemann (I_n) et (J_n) convergent vers la même limite qui est : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

• *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I alors :
pour tout $(a,\ x) \in I^2$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x-a)^k f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$.

> Rapport du jury Mines-Telecom 2016
>
> La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas connue par un candidat sur deux.

• *Inégalités de Taylor*

On commence par **l'inégalité de Taylor-Lagrange**.
Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors pour tout $(a,\ b) \in I^2$ avec $a < b$, en posant M_{n+1} un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a, b]$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(b-a)^k f^{(k)}(a)\right| \leqslant M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On en déduit **l'inégalité de Taylor-MacLaurin**.
Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, x]$ si $x > 0$ ou sur $[x, 0]$ si $x < 0$, alors

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k f^{(k)}(0)\right| \leqslant \max_{[0,x]} |f^{(n+1)}|\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Jour n^{o}19

Exercice 19.1 MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Soit X une variable aléatoire réelle discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, ..., p_r$, où $r \in \mathbb{N}^\star$ puis $M_X : t \mapsto E(e^{tX})$ et enfin la fonction ϕ_X définie sur $\mathbb{R}^\star$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^\star$, $\phi_X(t) = \dfrac{1}{t}\ln(M_X(t))$.

1) Déterminer M_X et ϕ_X si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

2) Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

3) Montrer que ϕ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et prolongeable par continuité en 0.
On pose $\phi_X(0) = E(X)$ et on note dans la suite encore ϕ_X la fonction prolongée.

4) Démontrer que ϕ_X est dérivable en 0 et calculer $\phi'_X(0)$ en fonction de $V(X)$.

5) On veut montrer que ϕ_X caractérise X.

a) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto e^{tx_i}$.
Montrer que la famille $(f_1, ..., f_r)$ est libre.

b) En déduire que deux *v.a.r.d* finies X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega)$ ont la même loi si, et seulement si, les fonctions ϕ_X et ϕ_Y sont égales.

(Fin de l'exercice pour MPSI-PCSI-PTSI.)

6) Montrer que si X et Y sont des *v.a.r.d* finies indépendantes alors $\phi_{X+Y} = \phi_X + \phi_Y$.

7) En déduire ϕ_X, lorsque X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(s, p)$, où $s \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0, 1[$.

Exercice 19.2 MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Soit G l'ensemble des matrices $M(a) = \begin{pmatrix} -3 & 9a & -4+3a \\ -1 & 1+3a & -1+a \\ 3 & -9a & 4-3a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1) ***Uniquement MPSI***. Montrer que G est un groupe multiplicatif. Est-il abélien ?

2) Reconnaître $M(0)$. Déterminer $\operatorname{Ker} M(0)$ et $\operatorname{Im} M(0)$.

3) Montrer : $\exists\, P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 19.1 Concours Commun National Marocain 2017 - ♣♣♣

Énoncé

Soit X une variable aléatoire réelle discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, ..., p_r$, où $r \in \mathbb{N}^\star$ puis $M_X : t \mapsto E(e^{tX})$ et enfin la fonction ϕ_X définie sur $\mathbb{R}^\star$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^\star$, $\phi_X(t) = \dfrac{1}{t}\ln(M_X(t))$.

1) Déterminer M_X et ϕ_X si X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

2) Montrer que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

3) Montrer que ϕ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^\star$ et prolongeable par continuité en 0.
On pose $\phi_X(0) = E(X)$ et on note dans la suite encore ϕ_X la fonction prolongée.

4) Démontrer que ϕ_X est dérivable en 0 et calculer $\phi'_X(0)$ en fonction de $V(X)$.

5) On veut montrer que ϕ_X caractérise X.

a) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto e^{tx_i}$.
Montrer que la famille $(f_1, ..., f_r)$ est libre.

b) En déduire que deux *v.a.r.d* finies X et Y, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega)$, ont la même loi si, et seulement si, les fonctions ϕ_X et ϕ_Y sont égales.

(Fin de l'exercice pour MPSI-PCSI-PTSI)

6) Montrer que si X et Y sont des *v.a.r.d* finies indépendantes alors $\phi_{X+Y} = \phi_X + \phi_Y$.

7) En déduire ϕ_X, lorsque X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(s,p)$, où $s \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0,1[$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'écrit du Concours Commun National Marocain en filière PSI en 2017. Le but de ce problème est d'étudier des propriétés de fonctions des moments de variables aléatoires discrètes finies. On voit en deuxième année (hors filière TPC et TSI) les séries ou fonctions génératrices $t \mapsto E(t^X)$. Les fonctions M_X (et les fonctions ϕ_X) étudiées ici sont des cousines proches de ces séries génératrices et ont des propriétés voisines. Faire cet exercice est un bon moyen de pénétrer dans le programme de deuxième année tout en restant avec les outils de première année. Que les (futurs) élèves de 2TSI se rassurent. Ce type de fonction peut (et a déjà été posé) à leurs concours (CCS 2015 par exemple). Donc, ils pourront eux aussi faire cet exercice avec profit.

> Rapport du jury Concours Commun INP (ex CCP) 2017
>
> Les exercices de probabilités forment désormais une part assez importante des questions proposées. À l'exception d'un petit nombre d'entre eux, les candidats connaissent leur cours et ont une compréhension « intuitive » des problèmes. Cependant, toute demande de formalisation et tout exercice théorique est insurmontable pour nombre d'entre eux.

1) On commence par un exemple : X est une loi de Bernoulli de paramètre p et on demande M_X et ϕ_X correspondants.

$\hookrightarrow$ On utilise ici et dans la suite le théorème de transfert (voir le formulaire de cet exercice).

2) On montre ici une première propriété générale (attention, X n'est plus une loi de Bernoulli nécessairement). On va montrer que les espérances $E(X^k)$ (appelées les moments d'ordre k de X) sont égales aux dérivées successives de M_X en 0.

$\hookrightarrow$ On pourra faire un développement limité de $M_X(t)$ au voisinage de 0 (sous forme d'une somme double) d'une part avec la formule de Taylor-Young (après avoir justifié que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$) et d'autre part en utilisant les développements limités de $t \mapsto e^{tx_k}$ pour tout k. Et on utilisera ensuite l'unicité d'un développement limité.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Les erreurs sont assez fréquentes dans l'énoncé des formules de Taylor, les hypothèses ne sont pas toujours citées. Les choix entre les différentes formules ne sont pas toujours très pertinents. En particulier, le lien entre formule de Taylor Young et développements limités n'est pas toujours clair pour les candidats.

3) On passe maintenant pour toute la suite de l'exercice à l'étude de ϕ_X. Dans cette question, on commence par vérifier que ϕ_X existe et que l'on peut la prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$.

$\hookrightarrow$ Il s'agit de commencer par vérifier que $M_X(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ puis de montrer que $\lim\limits_{t \to 0} \phi_X(t) = E(X)$. Pour cela, on peut encore appliquer la formule de Taylor-Young à M_X à l'ordre 1.

4) Ici, on montre que le prolongement de ϕ_X sur $\mathbb{R}$ est dérivable en 0 et on exprime le nombre dérivé $\phi'_X(0)$.

$\hookrightarrow$ Il s'agit de commencer par faire un développement limité de $\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t - 0}$ en partant encore une fois de la formule de Taylor-Young appliquée à M_X en 0 à l'ordre 2.

5) On veut montrer une propriété importante de la fonction ϕ_X. Les fonctions ϕ_X et ϕ_Y sont égales si et seulement si X et Y ont la même loi. Cela signifie que l'on peut cataloguer les lois classiques par la forme de leur fonction ϕ_X correspondante. Ainsi, ϕ_X « caractérise » la loi de X. Cette propriété est analogue pour les séries génératrices que l'on voit en deuxième année.

a) On commence par montrer un lemme (c'est-à-dire un résultat qui sert pour la suite). Il faut prouver la liberté d'une certaine famille de n fonctions.

$\hookrightarrow$ On fait une incursion dans le monde de l'algèbre linéaire. Soyez rigoureux dans ce genre de question. Déjà, supposer $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$, quitte à réindexer. Cela vous simplifiera les choses. On peut tenter alors une récurrence directe ou faire un raisonnement par l'absurde. C'est ce que l'on fait dans la correction.

b) On démontre maintenant le résultat annoncé : ϕ_X caractérise la loi de X.

$\hookrightarrow$ Pour montrer que X et Y ont la même loi, il faut prouver que pour tout x dans $X(\Omega) \cup Y(\Omega)$, $P(X = x) = P(Y = x)$. On part de $\phi_X = \phi_Y$ et on raisonne par équivalence. Il faut utiliser le résultat de **5) a)** quelque part.

6) À partir d'ici, il faut connaître la notion de somme de deux ou plusieurs variables aléatoires, ce qui n'a pas encore été fait en fin de 1TSI. Pour tous les autres, on doit montrer ici une autre propriété fondamentale de la fonction ϕ_X. Elle permet d'avoir rapidement ϕ_{X+Y} connaissant ϕ_X et ϕ_Y si X et Y sont indépendantes. Comme ϕ_{X+Y} caractérise la loi de $X + Y$, on peut en déduire la loi de $X + Y$ connaissant ϕ_X et ϕ_Y. Encore une propriété qui a son analogue avec les séries génératrices.

$\hookrightarrow$ Pour arriver au résultat, on utilise le fait si X et Y sont indépendantes alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tX} et e^{tY} sont aussi indépendantes.

7) On termine par le calcul de ϕ_X si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(s,p)$.

$\hookrightarrow$ Il faut utiliser le fait que si Z_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, et si les v.a.r $Z_1, ..., Z_s$ sont mutuellement indépendantes alors $X = Z_1 + ... + Z_s$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(s,p)$. Vous admettez ce résultat si vous ne l'avez pas encore vu.

Corrigé

1) Ici X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
Alors $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tX} P(X=x) = e^{t\times 0} P(X=0) + e^{t \times 1} P(X=1),$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = 1-p+pe^t \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^\star,\ \phi_X(t) = \frac{1}{t}\ln\left(1-p+pe^t\right).}$$

2) D'après le théorème de transfert : $\forall t \in \mathbb{R}, M_X(t) = E(e^{tX}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} e^{tx_k} P(X=x_k)$.
Donc, comme M_X est une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{la fonction } M_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On écrit : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} e^{tx_k} P(X=x_k) = \sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(tx_k)^j}{j!} + o(t^n)\right)$,
quand t tend vers 0, en appliquant un développement limité de $t \mapsto e^{tx_k}$.
Puis : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)\frac{(tx_k)^j}{j!} + o(t^n)$, en permutant les deux sommes, en remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)o(t^n) = o(t^n)$ car $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} P(X=x_k) = 1$.
Cela donne : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)x_k^j + o(t^n)$.
Comme $E(X^j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} P(X=x_k)x_k^j$, on en déduit : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{E(X^j)}{j!} t^j + o(t^n)$.
En appliquant la formule de Taylor-Young à M_X, de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a par ailleurs : $M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{M_X^{(k)}(0)}{k!} + o(t^n)$.
Par unicité d'un développement limité au voisinage de 0 :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k).}$$

3) Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$, $p_1, ..., p_r$ ne sont pas tous nuls et il existe donc $k_0 \in [\![1,r]\!]$ tel que $p_{k_0} > 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} p_k e^{tx_k} \geqslant p_{k_0} e^{tx_0} > 0$.

Ainsi, la fonction $t \mapsto \ln(M_X(t))$ est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\text{la fonction } \phi_X \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^\star.}$$

Pour tout $t \neq 0$, (toujours avec la formule de Taylor-Young),

$$M_X(t) = M_X(0) + M_X'(0)t + o(t).$$

Et donc : $\phi_X(t) = \dfrac{1}{t} \ln\left(M_X(0) + M_X'(0)t + o(t)\right)$ et, de plus, $M_X(0) = 1$.

Cela donne : $\phi_X(t) = \dfrac{1}{t} \ln\left(1 + E(X)t + o(t)\right) = \dfrac{1}{t}\left(E(X)t + o(t)\right)$.

Puis : $\phi_X(t) = E(X) + o(1)$ tend vers $E(X)$ quand $t \to 0$.

$$\boxed{\phi_X \text{ est prolongeable par continuité en 0 et } \phi_X(0) = E(X).}$$

4) Pour tout $t \neq 0$, on écrit : $\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t - 0} = \dfrac{1}{t}\left[\dfrac{1}{t}\ln(M_X(t)) - E(X)\right]$.

(Là, on applique la formule de Taylor à un cran supérieur.)

Donc : $M_X(t) = 1 + E(X)t + \dfrac{E(X^2)}{2}t^2 + o(t^2)$, par la question précédente.

On en déduit la quantité $\ln(M_X(t))$.

$$\ln(M_X(t)) = \left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right) - \frac{1}{2}\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right)^2 + o(t^2),$$

en utilisant $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$, quand u tend vers 0.

La quantité $\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t - 0}$ devient :

$$\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\left(\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right) - \frac{1}{2}\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2\right)^2 + o(t^2)\right) - E(X)\right].$$

Il reste à développer. La quantité $\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t - 0}$ devient d'abord :

$$\frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}\left(E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2 - \frac{1}{2}E(X)^2t^2\right) - E(X) + o(t)\right].$$

$\dfrac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t - 0}$ devient : $\dfrac{1}{2}\left[E(X^2) - E(X)^2\right) + o(1) = \dfrac{1}{2}V(X) + o(1)$. Ainsi,

$$\boxed{\phi_X \text{ est dérivable en 0 et } \phi_X'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\phi_X(t) - \phi_X(0)}{t - 0} = \frac{1}{2}V(X).}$$

5) a) On écrit $x_1 < x_2 < ... < x_r$, (quitte à réindexer) et supposons $(f_1, ..., f_r)$ liée.
Il existe donc $a_1, ..., a_r$ r réels non tous nuls tels que : (1) $a_1 f_1 + ... + a_r f_r = 0$.
Prenons $k_0 = \min\{k \in [\![1, r]\!],\ a_k \neq 0\}$. On a : $a_1 = ... = a_{k_0 - 1} = 0$ et $a_{k_0} \neq 0$.
La relation (1) devient alors l'égalité : $a_{k_0} f_{k_0} + ... + a_r f_r = 0$.
Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $a_{k_0} e^{x_{k_0} t} + ... + a_r e^{x_r t} = 0$. Si $k_0 = r$, $a_{k_0} = 0$, c'est absurde.

Si $k_0 < r$, cela donne, en divisant par $e^{x_{k_0}t}$: $\forall t \in \mathbb{R}$, $a_{k_0} = -\displaystyle\sum_{k=k_0+1}^{r} a_k e^{(x_k - x_{k_0})t}$.
Comme $x_k - x_{k_0} > 0$, quand on fait tendre t vers $-\infty$, il reste $a_{k_0} = 0$. Absurde.

$$\boxed{\text{La famille } (f_1, ..., f_n) \text{ est libre.}}$$

b) Posons $F = X(\Omega) = Y(\Omega)$. Partons maintenant de :

$$[\phi_X = \phi_Y] \Leftrightarrow \left[\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ \frac{1}{t}\ln(M_X(t)) = \frac{1}{t}\ln(M_Y(t))\right].$$

On multiplie par t et on étend à $t = 0$, par continuité de M_X et M_Y :

$$[\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = M_Y(t)] \Leftrightarrow \left[\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{x \in F} P(X = x)e^{tx} = \sum_{x \in F} P(Y = x)e^{tx}\right].$$

C'est-à-dire : (1) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{x \in F} \left(P(X = x) - P(Y = x)\right) e^{tx}$.
Or $t \mapsto e^{tx}$ est une fonction du type f_x. Comme le nombre de x est fini, la famille $(f_x)_{x \in E}$ est libre et (1) équivaut à écrire : $\forall x \in F$, $P(X = x) - P(Y = x) = 0$.
Cela signifie que pour tout $x \in F$, $P(X = x) = P(Y = x)$.

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont la même loi si et seulement si } \phi_X = \phi_Y.}$$

6) On suppose que X et Y sont des *v.a.r.d* finies indépendantes. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tX} et e^{tY} sont aussi indépendantes. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_{X+Y}(t) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right) = E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right).$$

Ainsi, $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$. On passe au logarithme et on divise par t :

$$\boxed{\phi_{X+Y} = \phi_X + \phi_Y.}$$

7) On peut généraliser le résultat de la question **6)**.
Soit n un entier supérieur ou égal à 2, si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, montrons que $\phi_{X_1+...+X_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_{X_i}$.
Le résultat est vrai pour $n = 2$, d'après la question **2)**.
Supposons le résultat vrai à l'ordre n. Montrons le résultat à l'ordre $n+1$. Soient $X_1, ..., X_{n+1}$ $n+1$ variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et posons $Y = X_1 + ... + X_n$. Les variables aléatoires réelles X_{n+1} et Y sont indépendantes donc en utilisant **6)**, on écrit : $\phi_{X_1+...+X_{n+1}} = \phi_{Y+X_{n+1}} = \phi_Y + \phi_{X_{n+1}}$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, $\phi_Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_{X_i}$, on a :

$$\phi_{X_1+...+X_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \phi_{X_i} + \phi_{X_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \phi_{X_i}.$$

C'est bien le résultat à l'ordre $n+1$.

Lorsque X suit la loi binomiale de paramètres s et p, s est un entier naturel non nul et $0 < p < 1$, X s'écrit comme somme $Z_1 + ... + Z_s$ de s variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

Et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} \phi_{Z_k}(t)$, $Z_1, ..., Z_s$ étant mutuellement indépendantes. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$, pour tout $s \in [\![1, s]\!]$, $\phi_{Z_k}(t) = \dfrac{1}{t}\ln(1-p+pe^t)$, on a pour $t \in \mathbb{R}^\star$, $\phi_X(t) = \dfrac{s}{t}\ln(1-p+pe^t)$. Puis si $t = 0$, $\phi_X(0) = E(X) = sp$. On écrit :

$$\boxed{\phi_X(t) = \begin{cases} \dfrac{s}{t}\ln(1-p+pe^t) & \text{pour } t \neq 0 \\ \\ sp & \text{pour } t = 0 \end{cases}}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X, il faut commencer par $X(\Omega)$ et cela peut orienter la recherche.

♡ Il faut se souvenir que pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ont la même loi, il faut que $X(\Omega) = Y(\Omega)$, puis que pour tout $x \in X(\Omega)(= Y(\Omega))$, $P(X = x) = P(Y = x)$.

♡ Il faut se souvenir (pour MPSI-PCSI-PTSI) que si Z_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et si les v.a.r $Z_1, ..., Z_n$ sont mutuellement indépendantes alors $X = Z_1 + ... + Z_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Formulaire

• *Théorème de transfert*

Soit X une *v.a.r.d* finie et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$ alors $Y = f(X)$ est aussi une *v.a.r.d* finie et son espérance $E(Y)$ est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)P(X = x_k)$.

• *Quelques développements limités au voisinage de* 0

On a les formules : $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2),\ \ln(1+t) = t - \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$.

• *Loi de Bernoulli*

Soit $p \in]0, 1[$. On dit que X suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p si et seulement si $X(\Omega) = [\![0, 1]\!]$ et $P(X = 0) = q = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.
Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$. Et de plus : $E(X) = p$, $V(X) = pq$.

• *Loi binomiale*

On suppose $n \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$. X suit la **loi binomiale de paramètres** n et p si et seulement si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k}$, où $q = 1 - p$.
Notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors : $E(X) = np$ et $V(X) = npq$.

Énoncé

Soit G l'ensemble des matrices $M(a) = \begin{pmatrix} -3 & 9a & -4+3a \\ -1 & 1+3a & -1+a \\ 3 & -9a & 4-3a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

1) ***Uniquement MPSI***. Montrer que G est un groupe multiplicatif. Est-il abélien ?

2) Reconnaître $M(0)$. Déterminer $\operatorname{Ker} M(0)$ et $\operatorname{Im} M(0)$.

3) Montrer : $\exists\, P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun Centrale-Supélec pour la filière MP en 2017. C'est l'étude d'une famille de matrices (indéxées par a réel). On commence par remarquer que l'on est dans une structure de groupe (cela, c'est réservé à la filière MPSI car la notion de groupe n'est pas au programme des autres filières). En gros, pour les non MPSI-MP, remarquer que le produit de deux matrices de G est une matrice de G. Vous pouvez d'ailleurs le montrer ! Puis, on étudie $M(0)$, histoire de manier les noyaux et images, le prétexte est toujours facile ! Enfin, on passe au (classique) problème de changement de base.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Construire une démonstration en algèbre linéaire n'est pas une chose aisée pour de nombreux candidats. Beaucoup d'entre eux confondent les matrices avec les endomorphismes, ce qui les empêche d'utiliser efficacement le second point de vue en cas de changement de base. L'outil matriciel, notamment le calcul avec des indices, n'est pas particulièrement bien maîtrisé.

1) Dans cette question (réservée donc à la filière MPSI), on s'intéresse à la structure de G.

$\hookrightarrow$ Cela permet de réviser la notion de groupe.
On rappelle qu'un groupe est abélien si sa loi (ici $\times$) est commutative.

2) On étudie $M(0)$. Avouons que c'est plus facile si vous avez effectué le produit $M(a)M(b)$ car on remarque rapidement que $M^2(0) = M(0)$. $M(0)$ est donc la matrice d'une projection.

$\hookrightarrow$ On sait que $\operatorname{Ker} M(0)$ et $\operatorname{Im} M(0)$ caractérisent la projection de matrice $M(0)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comment ?

3) Il s'agit ici de montrer que dans une certaine base, l'endomorphisme associé à $M(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice une matrice triangulaire supérieure particulière. Cette question est intuitive et déductive. C'est à vous.

$\hookrightarrow$ Pour trouver P, on commence par remarquer que $P^{-1}M(a)P = J + aK$, où J est une matrice de projection vectorielle sur un plan. On rapproche cette matrice J et la matrice $M(0)$. Quel lien les unit ?

Corrigé

1) ***Uniquement MPSI***.
Pour montrer que G est un groupe multiplicatif, il faut commencer par vérifier que le produit de deux matrices de G est une matrice de G. Considérons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et effectuons le produit $M(a)M(b)$. Après calculs (un peu long mais très faisable) :

$$M(a)M(b) = \begin{pmatrix} -3 & 9a & -4+3a \\ -1 & 1+3a & -1+a \\ 3 & -9a & 4-3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 9b & -4+3b \\ -1 & 1+3b & -1+b \\ 3 & -9b & 4-3b \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne : $M(a)M(b) = \begin{pmatrix} -3 & 9(a+b) & -4+3(a+b) \\ -1 & 1+3(a+b) & -1+a+b \\ 3 & -9(a+b) & 4-3(a+b) \end{pmatrix}$.
On reconnaît $M(a+b)$, qui est donc une matrice de G.
Une conséquence est que le produit est ici commutatif car :

$$M(a)M(b) = M(a+b) = M(b+a) = M(b)M(a).$$

Puis, comme le produit de matrices est associatif, il l'est *a fortiori* dans G.
Ensuite, passons au neutre. C'est clairement $M(0)$ (qui est évidemment dans G) :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ M(a)M(0) = M(0)M(a) = M(a+0) = M(a).$$

Puis tout élément $M(a)$ de G possède un symétrique dans G qui est $M(-a)$:

$$\forall a \in \mathbb{R},\ M(a)M(-a) = M(-a)M(a) = M(a+(-a)) = M(0).$$

$$\boxed{G\text{, muni de la multiplication matricielle, est un groupe abélien.}}$$

2) On peut déjà écrire : $M(0)^2 = M(0)M(0) = M(0+0) = M(0)$.

$$\boxed{\text{Donc } M(0) \text{ est un projecteur.}}$$

On sait alors que $M(0)$ est la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} M(0)$, dans la direction de $\operatorname{Ker} M(0)$. Explicitons cette projection en déterminant $\operatorname{Ker} M(0)$ et $\operatorname{Im} M(0)$.
On écrit : $M(0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
$\operatorname{Ker} M(0)$ est l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que $M(0)X = 0$, où 0 est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'ayant que des 0.
Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors : $M(0)X = \begin{pmatrix} -3x-4z \\ -x+y-z \\ 3x+4z \end{pmatrix}$.
Et on a l'équivalence : $X \in \operatorname{Ker} M(0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3x-4z & = & 0 \\ -x+y-z & = & 0 \\ 3x+4z & = & 0 \end{array} \right.$.
Rapidement, on a : $x = -\dfrac{4}{3}z$ et $y = x+z = -\dfrac{1}{3}z$.
Donc $X \in \operatorname{Ker} M(0) \Leftrightarrow X = -\dfrac{z}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{R}$.

Puis, d'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} M(0)$ est un plan vectoriel porté par deux vecteurs colonnes indépendants de la matrice $M(0)$.
Prenons par exemple ses deux premières colonnes qui constituent alors une base du sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} M(0)$. On résume tout cela :

$$\boxed{\operatorname{Ker} M(0) = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \text{ et } \operatorname{Im} M(0) = \operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].}$$

3) On veut trouver $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'expression de la matrice d'une projection vectorielle sur un plan, dans la direction d'une droite. Puis on écrit la décomposition :

$$(1)\ \ M(a) = M(0) + a \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose : $P_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, alors $P_1^{-1}M(0)P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En effet, P_1 est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base constituée de deux vecteurs de $\operatorname{Im} M(0)$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} M(0)$.
On multiplie (1) à gauche par P_1^{-1} et à droite par P_1. On a la nouvelle égalité :

$$(2)\ \ P_1^{-1}M(a)P_1 = P_1^{-1}M(0)P_1 + aP_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix} P_1.$$

C'est-à-dire :

$$(2)\ \ P_1^{-1}M(a)P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + aP_1^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix} P_1.$$

On peut bien sûr maintenant se lancer dans le calcul de l'inverse de P_1 mais ce serait long et inutile (car on verra que P_1 n'est pas tout à fait la matrice P cherchée). On considère plutôt l'endomorphisme ϕ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix}$. On calcule les images par ϕ des vecteurs $\vec{v}_1(-3,-1,3)$, $\vec{v}_2(0,1,0)$ et $\vec{v}_3(4,1,-3)$ (on reconnaît les vecteurs d'une base de l'image de la projection vectorielle de la question **2)** et d'une base du noyau de cette projection) :

$$\phi(\vec{v}_1) = (-9+9, -3+3, 9-9) = (0,0,0),\ \phi(\vec{v}_2) = (9,3,-9) = -3\vec{v}_1.$$

Et :

$$\phi(\vec{v}_3) = (9-9, 3-3, -9+9) = (0,0,0).$$

Posons maintenant $\vec{w}_1 = -3\vec{v}_1$, $\vec{w}_2 = \vec{v}_2$ et $\vec{w}_3 = \vec{v}_3$. On a :

$$\phi(\vec{w}_1) = -3\phi(\vec{v}_1) = \vec{0},\ \phi(\vec{w}_2) = -3\vec{v}_1 = \vec{w}_1 \text{ et } \phi(\vec{w}_3) = \vec{0}.$$

La matrice de ϕ dans la base $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nous posons donc :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -9 & 0 & -3 \end{pmatrix}.}$$

Et alors on a l'égalité : $P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $\operatorname{Im} M(0)$ peut s'écrire $\operatorname{Vect}\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ car le vecteur $(9, 3, -9)$ est colinéaire au vecteur $(-3, -1, 3)$, on a aussi : $P^{-1}M(0)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il reste à reprendre (1) et on multiplie maintenant par P^{-1} à gauche et par P à droite. On obtient :

$$(2')\ \ P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + aP^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix} P,$$

c'est-à-dire l'égalité cherchée :

$$\boxed{P^{-1}M(a)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on caractérise une projection par sa matrice M dans la base canonique de E, espace vectoriel de dimension finie. On commence par vérifier que $M^2 = M$ et donc M est bien la matrice d'une projection. Puis si p est la projection associée canoniquement à M, $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p, c'est-à-dire en assimilant un vecteur $\vec{x}$ de E et sa matrice-colonne X de ses composantes dans la base canonique, l'ensemble des X tels que $MX = X$. On peut aussi directement trouver une base de $\operatorname{Im} p$ en considérant un nombre maximal de colonnes de M qui forment une famille libre. Puis $\operatorname{Ker} p$ est l'ensemble des X tels que $MX = 0$. Alors p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ dans la direction de $\operatorname{Ker} p$.

Formulaire

• *Définition d'un groupe (MPSI seulement)*

On appelle loi de composition interne toute application $*$ du type :

$$E \times E \to E,\ (x, y) \mapsto x * y.$$

Une loi de composition interne est dite :
associative si pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x * (y * z) = (x * y) * z$;
commutative si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x * y = y * x$.
Un élément e de E est dit **élément neutre** pour $*$ si pour tout $x \in E$, $x*e = e*x = x$.
Si E possède un élément neutre e et est associative, on appelle **symétrique** de $x \in E$, l'élément x' de E tel que $x * x' = x' * x = e$.
Si e est élément neutre de E pour $*$, il est unique et le symétrique d'un élément x, s'il existe, est unique.
On dit que $(E, *)$ est un **groupe** si la loi de composition interne $*$ est associative dans E, elle possède un élément neutre et tout élément de E possède un symétrique pour $*$.
Si de plus, la loi $*$ est commutative, on dit que G est un **groupe abélien ou commutatif**.

• *Définition du rang d'une application linéaire*

Soit f une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F, ce dernier espace vectoriel étant de dimension finie.
On appelle rang de f (noté $\operatorname{Rg} f$) la dimension de $\operatorname{Im} f$, sous-espace vectoriel de F.

• *Théorème du rang*

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et f une application linéaire de E dans F. On suppose de plus que E est de **dimension finie**. Alors :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

• *Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme*

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$, et on note $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, la matrice représentative de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$.
On a : $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(Id_E)$. En particulier, $\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$.
Soit ϕ un endomorphisme de E et $A = M_{\mathcal{E}}(\phi)$, $A' = M_{\mathcal{E}'}(\phi)$. Alors :

$$A' = \left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\right)^{-1} A P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}.$$

Jour n^{o}20

Exercice 20.1 MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

1) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
On considère maintenant h définie par $h(0) = 1$ et $\forall x \neq 0$, $h(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$.

2) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\, dt$. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser H' et H''. Trouver une relation entre $H(x)$ et $H\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

Exercice 20.2 MPSI-PCSI-PTSI (option PSI seulement)

Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout n-uplet $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ la **matrice de Vandermonde** définie par :

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$ le déterminant de $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

1) Si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas tous distincts, justifier que $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = 0$.

2) Calculer $|V_2(x_1, x_2)|$.
Dans la suite, **on suppose $n \geqslant 3$ et $x_1, x_2, ..., x_n$ sont deux à deux distincts**.

3) On note F la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par : $F(x) = |V_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)|$.

a) Montrer que la fonction F est polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$. Préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.

b) Montrer que les scalaires $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sont des racines de F.

c) En déduire que : $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})| \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k)$.

4) Montrer alors que : $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

5) Justifier que la matrice $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ est inversible.

6) Montrer, en utilisant le déterminant $F(x) = |V_4(a, b, c, x)|$ et ce qui précède que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(c-b),$$ où a, b et c sont trois réels distincts.

Exercice 20.1 — Banque E3A 2015 - ♣ ♣

Énoncé

1) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

On considère maintenant h définie par $h(0) = 1$ et $\forall x \neq 0$, $h(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$.

2) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\, dt$. Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser H' et H''. Trouver une relation entre $H(x)$ et $H\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'une partie d'un problème posé à l'écrit de la banque E3A pour la filière PC en 2015. Le but est l'étude de $H : x \mapsto \displaystyle\int_0^x h(t)\, dt$. Ce type d'exercice est classique en première année. On sait que si h est continue par morceaux, H est continue et si h est continue, H est de classe $\mathcal{C}^1$. Sauriez vous redémontrer ces résultats ? Attention, en deuxième année, on étudie les fonctions du type $x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\, dt$. Les théorèmes utilisés ne sont pas les mêmes que précédemment. Donc, si vous êtes déjà en deuxième année, ne confondez pas ces deux types de fonctions intégrales car à l'écrit comme à l'oral, un certain nombre de candidats mélangent.

1) Dans la première question, on fait démontrer une relation classique entre $\arctan x$ et $\arctan \frac{1}{x}$. Certains la font même dans leur cours.

$\hookrightarrow$ Le mieux, c'est de dériver la fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

2) Les propriétés de continuité et de dérivabilité successives de H dépendent de celles de h. C'est pourquoi on commence ici par montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$.

$\hookrightarrow$ Attention, h est définie explicitement pour $x \neq 0$ et pour $x = 0$ par la valeur $h(0) = 1$. Un théorème du cours nous tend les bras pour arriver au résultat. Lequel ?

3) On étudie maintenant H. La question est compartimentée en deux parties. Dans la première, on étudie la dérivabilité de H et on demande d'expliciter les dérivées première et seconde de H. Dans la deuxième partie, on demande une relation entre $H(x)$ et $H\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\hookrightarrow$ Pour la relation entre $H(x)$ et $H\left(\frac{1}{x}\right)$, on pourra dériver $G : x \mapsto H\left(\frac{1}{x}\right)$.

Corrigé

1) Posons $g(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$, où $x > 0$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ (par somme et composée de fonctions dérivables).

Et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a : $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$.

C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a : $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$.

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Or,

$$g(1) = \arctan 1 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

On peut conclure.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.}$$

2) On considère la fonction h définie par $h(0) = 1$ et $\forall x \neq 0$, $h(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$.
On peut déjà remarquer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$, car $x \mapsto \arctan x$ et $x \mapsto x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et que le rapport de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, dont le dénominateur ne s'annule pas, est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.
Par ailleurs, quand x tend vers 0, $\arctan(x) = x + o(x^2)$ et $h(x) = 1 + o(x)$.
On a : $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1 = h(0)$ et la fonction h est continue sur $\mathbb{R}$.
Calculons $h'(x)$ pour x non nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ h'(x) = \frac{x \times \arctan' x - 1 \times \arctan x}{x^2},$$

c'est-à-dire, en utilisant $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ h'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)}.$$

On utilise, au voisinage de 0, $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.
Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ h'(x) = \frac{x - (1+x^2)\left[x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right]}{x^2(1+x^2)} = \frac{-\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2(1+x^2)} = -\frac{2}{3}x + o(x).$$

On a ainsi : $\lim\limits_{x \to 0} h'(x) = 0$. Il reste à utiliser le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$. h est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et donc sur $\mathbb{R}$. On résume :

$$\boxed{h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } h'(0) = 0.}$$

3) On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$.
Comme h est continue sur $\mathbb{R}$, h est intégrable sur $[0, x]$ pour tout x réel.
Donc, premier point à signaler, H existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Puis, comme h est continue, H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H'(x) = h(x).$$

Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, d'après la question **2)**, H' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H''(x) = h'(x).$$

On peut conclure :

$$\boxed{H \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et : } H' = h,\ H'' = h'.}$$

On veut ensuite déterminer une relation entre $H(x)$ et $H\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x>0$. L'indication est de dériver $G : x \mapsto H\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On suppose $x>0$ et donc G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ par composée des fonctions $x \mapsto H(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^\star$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G'(x) = -\frac{1}{x^2}H'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}h\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il reste à utiliser la question **1)**. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G'(x) = -\frac{1}{x^2} \times x \times \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right).$$

Cela donne : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G'(x) = -\dfrac{\pi}{2x} + h(x) = -\dfrac{\pi}{2x} + H'(x)$.
On intégre : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ G(x) = H\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}\ln x + H(x) + K$, où $K \in \mathbb{R}$.
En appliquant pour $x=1$, il reste : $H(1) = -\dfrac{\pi}{2}\ln 1 + H(1) + K \Rightarrow K = 0$.
On peut conclure.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ H\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}\ln x + H(x).}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir du fait que si $a \in \mathbb{R}$ est fixé, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si f est continue sur $\mathbb{R}$. Et alors $F' = f$. Par contre si f n'est continue que par morceaux alors F est seulement continue.

Formulaire

• *Théorème de prolongement de fonction de classe* $\mathcal{C}^1$

Soit $a \in I$ et f définie et continue sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.
On suppose de plus qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que : $\lim\limits_{t \to a} f'(t) = l$.
Alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans I (notée encore f) et telle que l'on ait l'égalité : $f'(a) = l$.

• *Propriétés de la fonction* arctan

La fonction arctan est la réciproque de la restriction de tan à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, elle est impaire et sa dérivée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, vérifie $(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
De plus, au voisinage de 0, $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Énoncé

Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout n-uplet $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ la **matrice de Vandermonde** définie par :

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$ le déterminant de $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

1) Si $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas tous distincts, justifier que $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = 0$.

2) Calculer $|V_2(x_1, x_2)|$.

Dans la suite, **on suppose** $n \geqslant 3$ **et** $x_1, x_2, ..., x_n$ **sont deux à deux distincts**.

3) On note F la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par : $F(x) = |V_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)|$.

a) Montrer que la fonction F est polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$. Préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.

b) Montrer que les scalaires $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sont des racines de F.

c) En déduire que : $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})| \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x_n - x_k)$.

4) Montrer alors que : $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_j - x_i)$.

5) Justifier que la matrice $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ est inversible.

6) Montrer, en utilisant le déterminant $F(x) = |V_4(a, b, c, x)|$ et ce qui précède que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(c-b),$$ où a, b et c sont trois réels distincts.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice très classique, posé régulièrement, de cette façon ou sous une forme assez proche. Citons parmi les concours où est apparu cet exercice à l'écrit : le Concours National Marocain, épreuve de Maths II, filière TSI ou encore la banque de concours E3A épreuve de Maths B, filière PSI en 2006. Il s'agit ici du calcul du **déterminant de Vandermonde** du n-uplet $(x_1, x_2 ..., x_n)$. Le déterminant de Vandermonde est un incontournable dans les concours. Il est d'ailleurs souvent fait comme application directe du cours de Mathématiques des classes préparatoires de deuxième année. Ceci dit, le bagage nécessaire pour calculer un tel déterminant ne demande que des outils de première année, à la seule condition que les déterminants d'ordre n soient au programme, ce qui n'est pas le cas en TSI1 et en TPC1, ni en PTSI hors option PSI. Donc cet exercice ne s'adresse pas à ces trois niveaux. Par contre, un élève de TSI2 par exemple pourra l'aborder avec profit après avoir vu le cours sur les déterminants d'ordre n. Plus précisément, pour faire cet exercice, il faut connaître les propriétés classiques d'un déterminant d'ordre n (un déterminant qui a deux colonnes identiques est nul, comment le développer selon une rangée etc.) et des propriétés sur les polynômes, en particulier la décomposition en facteurs irréductibles et le nombre de racines d'un polynôme de degré donné.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> Les calculs de déterminants classiques posent désormais des problèmes.

1) On commence par examiner le cas où certains des réels $x_1, ..., x_n$ sont égaux. Cela permet ensuite d'éliminer ce cas.

$\hookrightarrow$ C'est rapide. Mais encore faut-il connaître les propriétés élémentaires des déterminants.

2) On calcule $|V_n(x_1, ..., x_n)|$ dans le cas $n = 2$.

$\hookrightarrow$ C'est le type de question inloupable le jour du concours.

3) Ici, on va établir une relation entre $|V_n(x_1, ..., x_n)|$ et $|V_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})|$, ce qui permet d'initier une récurrence dans la suite. Pour cela, on introduit la fonction auxiliaire $F(x) = |V_n(x_1, ..., x_{n-1}, x)|$.

a) On commence par montrer que F est polynomiale et appartient à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$\hookrightarrow$ Comme $F(x)$ est un déterminant, commencez par le développer selon la dernière colonne.

b) On détermine les racines de F, ce qui va permettre de factoriser F plus loin.

$\hookrightarrow$ Encore une fois, on applique directement une propriété des déterminants.

c) On en arrive à la relation entre $|V_n(x_1, ..., x_n)|$ et $|V_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})|$. Tout est basé sur la décomposition en facteurs irréductibles de F.

$\hookrightarrow$ On connaît les racines de F et son coefficient dominant. Que dire de plus ?

4) On en arrive à la formule qui donne explicitement $|V_n(x_1, ..., x_n)|$.

$\hookrightarrow$ Vous avez compris qu'il faut faire une récurrence. À faire proprement !

5) On montre ici une propriété des matrices de Vandermonde qui découle directement de la valeur de son déterminant.

$\hookrightarrow$ On utilise encore une fois que les réels $x_1, ..., x_n$ sont distincts.

6) On termine par une application : le calcul d'un déterminant d'ordre 4, ou plutôt la mise sous sa forme factorisée. Il faut utiliser des outils déjà introduits dans l'exercice comme le polynôme $F(x) = |V_4(a, b, c, x)|$.

$\hookrightarrow$ On comparera $F(x)$ et Δ, le déterminant à calculer. Ils ne diffèrent que d'une colonne. Comment passer de l'un à l'autre ?

Corrigé

1) On suppose que les scalaires $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas tous distincts. Supposons par exemple $x_i = x_j$, où i et j sont deux entiers différents et compris entre 1 et n. Alors les colonnes C_i et C_j de la matrice de Vandermonde $V_n(x_1, ..., x_n)$ sont égales. On sait qu'un déterminant qui a deux colonnes égales est nul. Donc :

$$\boxed{|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = 0.}$$

2) On a rapidement : $|V_2(x_1, x_2)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$. Finalement :

$$\boxed{|V_2(x_1, x_2)| = x_2 - x_1.}$$

3) a) Dans cette question et toute la suite, **on suppose** $n \geqslant 3$ **et les scalaires** $x_1, x_2, ..., x_n$ **sont deux à deux distincts**.
On note F la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par : $F(x) = |V_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)|$. On a :

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On développe $F(x)$ par rapport à sa dernière colonne :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k} \, \Delta_{k,n} \, x^{k-1},$$

où $\Delta_{k,n}$ est le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en enlevant à la matrice initiale la dernière colonne et la $k^{\text{ème}}$ ligne. Chaque déterminant $\Delta_{k,n}$ n'a pas de terme en x et sa valeur est constante par rapport à x.
Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} \, \Delta_{k,n} \, x^{k-1}$ est un polynôme en x de degré ne dépassant pas $n-1$.
Par ailleurs, son coefficient dominant est le coefficient devant x^{n-1}, c'est-à-dire :

$$(-1)^{n+n} \Delta_{n,n} = \Delta_{n,n}.$$

Or : $\Delta_{n,n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-2}^{n-2} \end{vmatrix} = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|.$
On peut conclure :

$$\boxed{F \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \text{ de coefficient dominant } |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|.}$$

3) b) Si l'on remplace x par x_i, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, le déterminant $F(x_i)$ a deux colonnes identiques : la $i^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$. Il est donc nul. Donc :

$$\boxed{\text{les scalaires } x_1, x_2, ..., x_{n-1} \text{ sont des racines de } F.}$$

<u>*Remarque*</u>
On peut même conclure que comme F est un polynôme de degré au plus $n-1$ et comme $x_1, ..., x_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de F, si F n'est pas le polynôme nul, F a exactement $n-1$ racines qui sont $x_1, ..., x_{n-1}$. Cette remarque sert ensuite.

3) c) En utilisant le résultat de **3) a)**, on peut dire que si $|V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|$ est nul, alors F est nul car c'est alors un polynôme de degré au plus $n-2$ ayant $n-1$ racines distinctes et si $|V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})|$ n'est pas nul, F est un polynôme de degré exactement $n-1$ dont les racines sont $x_1, ..., x_{n-1}$.

Il s'écrit dans tous les cas sous la forme :

$$F(x) = |V_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})| \prod_{k=1}^{n-1} (x - x_k).$$

On applique avec $x = x_n$ et on obtient :

$$\boxed{|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})| \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k).}$$

4) Nous allons procéder à une récurrence.
$\forall p \in [\![2, n]\!]$, $\mathcal{P}_p$ est la proposition : $|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (x_j - x_i)$.
On peut vérifier que $\mathcal{P}_2$ est vraie. En effet, d'après la question **2)**,

$$|V_2(x_1, x_2)| = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (x_j - x_i).$$

Supposons que la proposition $\mathcal{P}_{p-1}$ soit vraie pour p entier fixé dans $[\![3, n]\!]$, alors en utilisant le résultat de la question **3) c)**, appliqué à p à la place de n,

$$|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = |V_{p-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{p-1})| \prod_{k=1}^{p-1} (x_p - x_k).$$

Puis, on utilise l'hypothèse de récurrence,

$$|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p-1} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^{p-1} (x_p - x_k),$$

c'est-à-dire :

$$|V_p(x_1, x_2, \cdots, x_p)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (x_j - x_i).$$

C'est bien $\mathcal{P}_p$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\boxed{|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).}$$

5) Comme tous les scalaires x_i pour i variant de 1 à n, sont distincts, la quantité $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ ne s'annule pas et $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$, qui n'est autre que le déterminant de la matrice $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, est non nul.

$$\boxed{\text{La matrice } V_n(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ est donc inversible.}}$$

6) Une application : soient a, b, c trois réels deux à deux distincts. Pour démontrer l'égalité proposée, on peut développer le déterminant de gauche directement ou après avoir fait des différences de colonnes pour mettre des quantités du type $a - b$, $a - c$ ou $b - c$ en facteur et développer le membre de droite. Puis remarquer qu'ils sont égaux. On est incité à faire autre chose, sachant que l'égalité à montrer est classée dans l'énoncé comme application du déterminant de Vandermonde. On va utiliser $F(x) = |V_4(a, b, c, x)|$ et bien entendu les résultats précédents.

On commence par écrire que :

$$F(x) = |V_4(a,b,c,x)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}.$$

La seule différence entre $F(x)$ et le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix}$ est au niveau de la $4^{\text{ème}}$ colonne. On remarque que la $4^{\text{ème}}$ colonne de Δ correspond à la dérivation par x de celle de $F(x)$ et en posant ensuite $x = a$. Comme $F(x)$ est un polynôme de degré au plus 3 en x, on peut effectivement le dériver (c'est ici que l'hypothèse $x \in \mathbb{R}$ intervient, en effet, au programme officiel, on n'a pas le droit de dériver une fonction à variable complexe) et :

$$\Delta = F'(a).$$

Il reste à expliciter $F(x)$ en utilisant ce qui précède :

$$F(x) = |V_4(a,b,c,x)| = |V_3(a,b,c)|\,(x-a)(x-b)(x-c),$$

c'est-à-dire :

$$F(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c).$$

Il reste à dériver. On peut utiliser la formule :

$$[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x),$$

où u, v et w sont trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la quantité $F'(x)$ vaut :

$$(b-a)(c-a)(c-b)\left[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)\right].$$

On applique avec $x = a$, ce qui donne :

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)\left[(a-b)(a-c) + (a-a)(a-c) + (a-a)(a-b)\right],$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = (b-a)(c-a)(c-b)(a-b)(a-c) = (a-b)^2(a-c)^2(c-b).$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(c-b).}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on calcule un déterminant. Il y a en fait trois manières principales de procéder.
1) La première manière (quand on a de la chance) est de développer directement selon une rangée et (ou) de faire quelques opérations élémentaires sur des lignes ou colonnes avant de développer selon une rangée. On peut reconnaître des déterminants classiques (par exemple des déterminants triangulaires) et la conclusion arrive rapidement.
2) La deuxième manière est de trouver une relation de récurrence qui permette le calcul du déterminant de proche en proche, la clé est certainement ici aussi un développement selon une rangée bien choisie.
3) Et la troisième manière est d'utiliser un déterminant auxiliaire qui est généralement un polynôme en x. Un exemple emblématique de cette méthode est le calcul de ce déterminant de Vandermonde que l'on fait ici.

♡ Il faut se souvenir des opérations élémentaires qui ne changent pas la valeur d'un déterminant, ce sont les opérations du type $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + aC_j$, où $a \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

♡ Il faut se souvenir que si $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $X - \alpha$ divise P.

♡ Il faut se souvenir qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Formulaire

• *Développement d'un déterminant selon une rangée*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle **mineur d'indice** (i_0, j_0) le nombre : $\Delta_{i_0,j_0} = (-1)^{i_0+j_0} \det(A_{i_0,j_0})$, où A_{i_0,j_0} est la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de la matrice A, en supprimant sa $i_0{}^{\text{ème}}$ ligne et sa $j_0{}^{\text{ème}}$ colonne.

Alors, pour tout $i_0 \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\Delta_{i_0,j}$.

On dit que l'on a développé selon la $i_0{}^{\text{ème}}$ ligne.

Et, pour tout $j_0 \in [\![1, n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0}\Delta_{i,j_0}$.

On dit que l'on a développé selon la $j_0{}^{\text{ème}}$ colonne.

Jour n^{o}21

Exercice 21.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Dans la question 3), on écrira un programme en Python.
Soit un réel $a \in]0,29[$ et : $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 10t^3 + 31t^2 + 71t - a$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel noté $l \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que : $H(l) = 0$.

2) On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par le fait que pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{H(u_n)}{H'(u_n)}$.

b) Déterminer le sens de variation de l'application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t - \dfrac{H(t)}{H'(t)}$.

En déduire que $u_n \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|H(l) - H(u_n) - (l - u_n)H'(u_n))| \leqslant 46\,|u_n - l|^2$.

d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{46\,|u_n - l|^2}{71}$ et : $|u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{7\,|u_n - l|^2}{10}$.

e) Pour tout $a \in]0,29[$, vérifier que u_2 est une valeur approchée de l à $0,03$ près.

3) Écrire en langage Python une fonction $suite(a,n)$ qui prend en argument le paramètre a et un entier n et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, ..., u_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question **2)** en fonction de a.

Exercice 21.2 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

1) Soit E un espace vectoriel **de dimension finie** et u un endomorphisme de E tel que $u\,o\,u = u$. Montrer que : $\mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u = E$.
A-t-on encore le résultat si E n'est plus de dimension finie ?

2) Soient maintenant E et F deux espaces vectoriels (***non nécessairement de dimensions finies***), on note $\mathcal{L}(E,F)$ (respectivement $\mathcal{L}(F,E)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F (respectivement de F dans E).
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $v\,o\,u = \mathrm{Id}_E$. Montrer : $\mathrm{Ker}\,v \oplus \mathrm{Im}\,u = F$.

Énoncé

Dans la question 3), on écrira un programme en Python.
Soit un réel $a \in]0, 29[$ et : $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 10t^3 + 31t^2 + 71t - a$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel noté $l \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que : $H(l) = 0$.

2) On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par le fait que pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{H(u_n)}{H'(u_n)}$.

b) Déterminer le sens de variation de l'application $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t - \dfrac{H(t)}{H'(t)}$.

En déduire que $u_n \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|H(l) - H(u_n) - (l - u_n)H'(u_n))| \leqslant 46\,|u_n - l|^2$.

d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{46\,|u_n - l|^2}{71}$ et : $|u_{n+1} - l| \leqslant \dfrac{7\,|u_n - l|^2}{10}$.

e) Pour tout $a \in]0, 29[$, vérifier que u_2 est une valeur approchée de l à $0,03$ près.

3) Écrire en langage Python une fonction $suite(a, n)$ qui prend en argument le paramètre a et un entier n et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, ..., u_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question **2)** en fonction de a.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'écrit du concours Arts et Métiers Paris Tech-ESTP-Polytech de la banque E3A dans la filière MP en 2017.
On demande ici de montrer d'abord l'existence et l'unicité d'une racine d'une équation polynomiale de degré 3 sur un certain intervalle réel. Puis, on propose de déterminer une valeur approchée de cette racine par le très classique algorithme de Newton. Il correspond à l'étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On est guidé dans cette étude. On termine l'exercice par une mise en code Python de cet algorithme.

> Rapport du jury Mines-Ponts 2017
>
> L'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ est rarement bien menée. Si l'autonomie n'est plus un attendu, il est important de pouvoir suivre les indications de l'énoncé s'il s'agit de l'écrit ou de l'examinateur s'il s'agit de l'oral.

1) Dans cette question, on demande de prouver l'existence et l'unicité de la racine de $H(x) = 0$ sur un certain intervalle. Cela va préparer le terrain pour la suite.

$\hookrightarrow$ Vous avez compris qu'il va falloir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. N'oubliez pas d'écrire que H est continue pour justifier l'utilisation du T.V.I.

2) On met en place l'algorithme de Newton qui construit une suite (u_n) de premier terme $u_0 \in I$ (ici $u_0 = 1/2$) et dont la limite est l'unique racine de $H(x) = 0$ sur I.

a) On rentre directement dans le vif du sujet en présentant la suite (u_n) définie par une relation récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Si vous avez déjà travaillé cet algorithme, vous retrouverez cette relation de récurrence facilement.

$\hookrightarrow$ Il faut suivre le cheminement géométrique proposé pour trouver u_{n+1} en fonction de u_n. On utilisera en particulier une équation d'une tangente en un point donné.

b) On a donc une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On étudie maintenant cette fonction f. Le but est de prouver en finalité la convergence de la suite (u_n) et même sa vitesse de convergence. Ici l'étude de f va nous permettre de conclure que la suite (u_n) est bornée, ce qui va être essentiel pour la suite.

$\hookrightarrow$ Pour étudier les variations de f, il faut la dériver. Vous pouvez commencer par écrire cette dérivée en fonction de H et de ses dérivées successives.

c) Ici, l'on montre une inégalité importante pour la suite. Vous avez reconnu l'inégalité de Taylor-Lagrange.

$\hookrightarrow$ Il faut être rigoureux. Citez les hypothèses qui permettent d'utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange. Quel est l'intervalle sur lequel on l'applique ?

d) Dans cette question, on montre deux inégalités (la seconde est une application directe de la première, sa seule utilité est que le coefficient $7/10$ est plus simple que $46/71$). Elles permettent de prouver d'abord la convergence de (u_n), puis d'avoir la vitesse de convergence et elles permettent d'avoir une valeur approchée de la racine l (limite de (u_n)) à une précision donnée à l'avance.

$\hookrightarrow$ On part de l'inégalité trouvée à la question **2) c)** et on utilise $H(l) = 0$.

e) On passe à une application numérique : trouver une valeur approchée de l à $0,03$ près. On utilise la deuxième inégalité de **2) d)**.

$\hookrightarrow$ On peut y arriver sans calculette !

3) On passe à une application en Python. On crée une fonction qui renvoie la liste des valeurs u_n jusqu'à un certain indice donné. Les arguments de cette fonction Python ne sont que la valeur a et l'indice n maximal que l'on veut atteindre. On pourrait (ce n'est pas demandé) écrire aussi une fonction Python qui renvoie la première valeur approchée de l à ϵ près. On se sert de la précision trouvée en remarque dans le corrigé à la fin de **2) d)**. À vous de compléter cet exercice !

$\hookrightarrow$ Si vous avez besoin de vous rafraîchir niveau commandes Python pour faire votre programme, allez voir la partie « Techniques à mémoriser » de cet exercice.

Corrigé

1) La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall t \in \mathbb{R}$, $H'(t) = 30t^2 + 62t + 71$.
On peut déterminer les racines du polynôme du second degré $H'(t) = 0$.
Pour cela, on détermine le signe de son discriminant :

$$\Delta = 62^2 - 4 \times 30 \times 71 = 62^2 - 120 \times 71 < 0.$$

Et : $H'(t)$ est positive (car elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, de terme dominant $30t^2$).
On peut aussi continuer à dériver, si l'on est allergique aux équations du second degré et on trouve : $\forall t \in \mathbb{R}$, $H''(t) = 60t + 62$.

Pour tout $t \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $H''(t) > 0$ et donc H' est strictement croissante.
On a : $H'(0) = 71$ et ainsi, pour tout $t \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $H'(t) > 0$.
La fonction H est strictement croissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Il reste à écrire :

$$H(0) = -a < 0 \text{ et } H\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{2^3} + \frac{31}{2^2} + \frac{71}{2} - a = \frac{178 - 4a}{4} > 0,$$

car $a < 29 \Rightarrow -4a > -4 \times 29 \Rightarrow -4a > -116 \Rightarrow 178 - 4a > 62 > 0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme H est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et comme $H(0)H\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{il existe un unique réel noté } l \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ tel que : } H(l) = 0.}$$

2) a) On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par le fait que pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.
Commençons par écrire l'équation de la tangente : $y - H(u_n) = H'(u_n)(x - u_n)$.
L'axe des abscisses a pour équation $y = 0$. Donc si $(x, 0)$ est l'intersection de la tangente et de l'axe des abscisses :

$$-H(u_n) = H'(u_n)(x - u_n) \Rightarrow x - u_n = -\frac{H(u_n)}{H'(u_n)} \Rightarrow x = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}.$$

Cette valeur x est notée u_{n+1}. Elle existe sauf si $H'(u_n) = 0$. Or H' ne s'annule pas sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, d'après **1)** et on va voir à la question **2) b)** que la suite (u_n) est à valeurs dans $\left[l, \dfrac{1}{2}\right]$, donc dans $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. On peut en conclure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car à partir de u_n, pour tout n fixé entier, u_{n+1} est unique et parfaitement définie.

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}.}$$

b) On commence par dériver $f(t)$:

$$f'(t) = 1 - \frac{(H'(t))^2 - H(t)H''(t)}{(H'(t))^2} = \frac{H(t)H''(t)}{(H'(t))^2}.$$

Sur $[0, 1]$, on voit que $H''(t) > 0$. Donc le signe de $f'(t)$ est le signe de $H(t)$. Comme pour $t \in [0, 1]$, $H''(t) > 0$, H' est strictement croissante sur $[0, 1]$. On a toujours : $H'(0) = 71$ et ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, $H'(t) > 0$. La fonction H est strictement croissante sur $[0, 1]$. Comme H s'annule en un unique $l \in]0, 1[$, alors H est négative sur $[0, l]$ et positive sur $[l, 1]$ car croissante sur $[0, 1]$. On peut conclure :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0, l] \text{ et croissante sur } [l, 1].}$$

Comme $f(0) = -\dfrac{H(0)}{H'(0)} = \dfrac{a}{71} \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, et comme la fonction f décroit sur $[0, l]$ et comme $f(l) = l$ (car $H(l) = 0$), $f(0) > l$ et plus précisement, $f(0) \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$.
Puis comme $f(1) = 1 - \dfrac{112 - a}{163} = 1 - \dfrac{H(1)}{H'(1)} = \dfrac{51 + a}{163} < \dfrac{1}{2}$, en utilisant :

$$\frac{51 + a}{163} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 102 + 2a < 163 \Leftrightarrow 2a < 61,$$

ce qui le cas car $a < 29$, on peut en déduire que $f(t) \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$, pour tout $t \in [0, 1]$.
Ainsi comme $u_0 = 1/2 \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$, $u_1 = f(u_0) \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$.
De façon générale, si $u_n \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$, $u_{n+1} \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]$. On a donc prouvé que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[l, \frac{1}{2}\right].}$$

c) Comme H est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur tout $(a, b) \in \left[l, \dfrac{1}{2}\right]^2$. On écrit :

$$|H(b) - H(a) - (b - a)H'(a)| \leqslant \frac{1}{2!}. \sup_{t \in [a,b]} |H''(t)| \, |b - a|^2.$$

Ici, on applique cette inégalité avec $b = l$ et $a = u_n$. On a :

$$|H(l) - H(u_n) - (l - u_n)H'(u_n)| \leqslant \frac{1}{2!}. \sup_{t \in [l,u_n]} |H''(t)| \, |l - u_n|^2.$$

Comme pour tout t, $H''(t) = 60t + 62$, et comme $\left[l, \dfrac{1}{2}\right] \subset \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$,

$$\sup_{t \in [l,u_n]} |H''(t)| \leqslant \sup_{t \in [0,\frac{1}{2}]} |H''(t)| = 92,$$

car $H''(t)$ prend son maximum sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ en 1/2 et vaut $H''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 92$. Et :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |H(l) - H(u_n) - (l - u_n)H'(u_n))| \leqslant 46 \, |u_n - l|^2.}$$

d) Comme $H(l) = 0$, l'inégalité précédente trouvée à la question **2) c)** devient :

$$(1)\ \ \forall n \in \mathbb{N}, |-H(u_n) - (l - u_n)H'(u_n))| \leqslant 46 \, |u_n - l|^2.$$

On rappelle que la fonction H' est strictement positive sur $[0, 1]$ donc sur $\left[l, \dfrac{1}{2}\right]$.
Ainsi $H'(u_n) > 0$. On peut diviser l'inégalité (1) par $H'(u_n)$. On a :

$$(2)\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \left| -\frac{H(u_n)}{H'(u_n)} - (l - u_n) \right| \leqslant \frac{46}{H'(u_n)} \, |u_n - l|^2.$$

Cela devient :

$$(2)\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leqslant \frac{46}{H'(u_n)} |u_n - l|^2 .$$

Puis comme H' est croissante et positive sur $[0,1]$, et comme $u_n \in [0,1]$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{1}{H'(u_n)}\right| \leqslant \frac{1}{H'(0)} = \frac{1}{71}.$$

On peut en déduire finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leqslant \frac{46\,|u_n - l|^2}{71}.}$$

Puis on remarque que $\frac{46}{71} \leqslant \frac{7}{10}$ et ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leqslant \frac{7\,|u_n - l|^2}{10}.}$$

Remarque

Ce n'est pas demandé par l'énoncé mais on peut maintenant conclure que la suite (u_n) converge vers l et on a une idée de la vitesse de convergence.
En effet, on a les implications, pour n entier au moins égal à 2 :

$$|u_n - l| \leqslant \frac{7}{10} |u_{n-1} - l|^2 \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \left(\frac{7}{10}\right)^{1+2} |u_{n-2} - l|^{2^2} .$$

Puis, pour n entier supérieur ou égal à 3, $|u_n - l| \leqslant \left(\frac{7}{10}\right)^{1+2+2^2} |u_{n-3} - l|^{2^3} .$

Ainsi de suite : $|u_n - l| \leqslant \left(\frac{7}{10}\right)^{1+2+\ldots+2^{n-1}} |u_0 - l|^{2^n} .$

Comme $1 + 2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$, il reste : $|u_n - l| \leqslant \left(\frac{7}{10}\right)^{2^n-1} |u_0 - l|^{2^n} .$

2) e) On écrit les deux inégalités : $|u_2 - l| \leqslant \frac{7\,|u_1 - l|^2}{10}$ et $|u_1 - l| \leqslant \frac{7\,|u_0 - l|^2}{10}$.
Ce qui donne en combinant les deux :

$$|u_2 - l| \leqslant \frac{7}{10} . \frac{7^2\,|u_0 - l|^4}{10^2}.$$

Or $u_0 = 1/2$ et donc, comme l est compris entre 0 et $1/2$,

$$|u_0 - l|^4 = \left|\frac{1}{2} - l\right|^4 \leqslant \frac{1}{2^4}.$$

Ainsi : $|u_2 - l| \leqslant \frac{7^3}{10^3} . \frac{1}{2^4} = \frac{343}{16000} < \frac{3}{100}$, car $34300 < 48000$. En conclusion,

$$\boxed{u_2 \text{ est une valeur approchée de } l \text{ à } 0,03 \text{ près.}}$$

3) Commençons par taper les deux fonctions H et H' (que l'on pourrait mettre dans la procédure principale si cela vous chante.

$>>> \ def \ H(a,x) \ : \ return(10*x**3+31*x**2+71*x-a)$
$>>> \ def \ dH(x) \ : \ return(30*x**2+62*x+71)$

Puis on passe à la procédure $suite(a,n)$:

```
>>> def suite(a,n) :
        u = 0.5 ; l = [u]
        for k in range(1,n) :
            u = u - H(a,u)/dH(u)
            l.append(u)
        return(l)
```

Faisons des essais.

$>>> \ suite(4,10)$

$[0.5, 0.13013698630136988, 0.057417455782622126,$
$0.054996682803988395, 0.05499411078524169, 0.05499411078234254,$
$0.05499411078234254, 0.05499411078234254, 0.05499411078234254,$
$0.05499411078234254]$

$>>> \ suite(28,10)$

$[0.5, 0.3493150684931507, 0.3388262973014769,$
$0.33877861022690076, 0.3387786092461513, 0.3387786092461512,$
$0.3387786092461513, 0.3387786092461512, 0.3387786092461513,$
$0.3387786092461512]$

On remarque que pour $a = 4$, $l = 0.054994$ environ et pour $a = 28$, $l = 0,338778$ environ et de plus on remarque que u_2 est bien à chaque fois une valeur approchée à deux chiffres après la virgule ce qui est cohérent avec la question **2) e)**.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on étudie $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = a$ avec Python.

Pour ***calculer un certain nombre de termes consécutifs***, on procède de manière itérative ou de manière récursive. Les deux pistes peuvent avoir des coûts différents. Nous comparerons la vitesse de convergence dans les deux cas.

Pour ***tracer la ligne polygonale joignant les points*** (k, u_k) pour $0 \leqslant k \leqslant n$ en posant $u_k = f(u_{k-1})$ et $u_0 = a$, on tape :

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> def tracer(f,a,n) :
        X = [i for i in range(n+1)] ; u = a ; Y = [u]
        for i in range(n) :
            u = f(u) ; Y.append(u)
        plt.plot(X,Y) ; plt.show( )
```

Exemple : écrire deux procédures Python qui calculent les termes u_{38} et u_{39} de la suite définie par : $u_{n+1} = \cos(u_n)^2 - u_n$ avec $u_0 = \pi$, de façon itérative et l'autre de façon récursive, comparer leur rapidité . On utilisera *perf_counter* de *time* et on rentrera *numpy* avec l'alias *np*.

```
>>> def terme(f,a,n) :        """ Pour la première procédure itérative """
        u = a
        for i in range(n) :
            u = f(u)
        return u
>>> from time import perf_counter as pc
>>> def f(x) :  return(np.cos(x)**2 - x)
>>> for k in range(38,40) :
        print(terme(f,np.pi,k)) ; t = pc() ; terme(f,np.pi,k) ; print(pc() - t)
1.6872557743882985   0.000324692591675572
-1.6737541772198121   0.00032749160575740674
>>> def u(f,a,n) :      """ Pour la deuxième procédure récursive """
        if n == 0 :
            return a
        else :
        return f(u(f,a,n-1))
>>> from time import perf_counter as pc
>>> for k in range(38,40) :
        print(u(f,np.pi,k)) ; t = pc() ; u(f,np.pi,k) ; print(pc() - t)
1.6872557743882985   0.00026217993748
-1.6737541772198121   0.00025378271539
```

Formulaire

• *Théorème des valeurs intermédiaires*

Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)f(b) \leqslant 0$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

• *Équation de la tangente à $y = f(x)$ en un point a, où f est dérivable*

Une équation est donnée par : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

• *Inégalités de Taylor*

On commence par **l'inégalité de Taylor-Lagrange**.
Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, alors pour tout $(a,\, b) \in I^2$ avec $a < b$, en posant M_{n+1} un majorant de $\left|f^{(n+1)}\right|$ sur $[a,b]$,

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(b-a)^k f^{(k)}(a)\right| \leqslant M_{n+1}\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On en déduit **l'inégalité de Taylor-Mac laurin**.
Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0,x]$ si $x > 0$ ou sur $[x,0]$ si $x < 0$, alors

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k f^{(k)}(0)\right| \leqslant \max_{[0,x]}|f^{(n+1)}|\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Énoncé

1) Soit E un espace vectoriel **de dimension finie** et u un endomorphisme de E tel que $u\,o\,u = u$. Montrer que : $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.
A-t-on encore le résultat si E n'est plus de dimension finie ?

2) Soient maintenant E et F deux espaces vectoriels (***non nécessairement de dimensions finies***), on note $\mathcal{L}(E, F)$ (respectivement $\mathcal{L}(F, E)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F (respectivement de F dans E).
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v\,o\,u = \mathrm{Id}_E$. Montrer : $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u = F$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice d'Algèbre linéaire basé sur un exercice d'oral du concours Mines-Ponts pour la filière PC posé en 2010.

1) Pour commencer, vous avez peut-être reconnu une question de cours. Autant en refaire ! On veut donc montrer que : $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$. Dans cette question, on a d'abord une hypothèse qui permet d'utiliser le théorème du rang. Puis on retire cette hypothèse. Pensez alors à votre cours ou à un raisonnement par Analyse-Synthèse.

$\hookrightarrow$ Il est intéressant de comparer les deux raisonnements dans le cas où E est de dimension finie et dans le cas où il ne l'est pas.

2) On montre que $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires dans F. Pour montrer que $F = \operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} u$, on peut encore raisonner par Analyse-Synthèse en supposant au départ que $\vec{x} \in F$ s'écrive $\vec{y} + u(\vec{z})$, où $\vec{y} \in \operatorname{Ker} v$ et $\vec{z} \in E$. Puis, on écrit $\vec{y}$ en fonction de $\vec{x}$ seul et on vérifie qu'un tel $\vec{y} \in \operatorname{Ker} v$.

$\hookrightarrow$ Bien retenir ce procédé car c'est assez standard dans ce type d'exercice.

Corrigé

1) *Intersection de* $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$

Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, alors $u(\vec{x}) = \vec{0}$ et il existe $\vec{y} \in E$ tel que $\vec{x} = u(\vec{y})$.
Donc, on a les égalités : $\vec{0} = u(\vec{x}) = u^2(\vec{y}) = u(\vec{y}) = \vec{x}$.
Et finalement : $\vec{x} = \vec{0}$. Ainsi, $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\vec{0}\}$.

Supplémentarité de $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *dans E, en dimension finie*

On utilise le théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$.
On en déduit que $\dim(\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u) = \dim E$, par la formule de Grassmann. Donc, comme $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u \subset E$, on a bien :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E.}$$

Supplémentarité de $\operatorname{Ker} u$ *et* $\operatorname{Im} u$ *dans E, en dimension quelconque*

Analyse. Supposons $\vec{x} = \vec{y} + u(\vec{t})$, où $\vec{y} \in \operatorname{Ker} u$ et $\vec{t} \in E$.
Alors $u(\vec{x}) = u(\vec{y}) + u^2(\vec{t}) = u^2(\vec{t}) = u(\vec{t})$. Donc, on pose $\vec{y} = \vec{x} - u(\vec{x})$.
Synthèse. Soit $\vec{x} \in E$ et posons $\vec{y} = \vec{x} - u(\vec{x})$. Alors $\vec{x} = \vec{y} + u(\vec{x})$.
Et, de plus, $u(\vec{y}) = u(\vec{x}) - u^2(\vec{x}) = u(\vec{x}) - u(\vec{x}) = \vec{0}$. Ainsi, $\vec{y} \in \operatorname{Ker} u$.

De plus, $u(\vec{x}) \in \operatorname{Im} u$. On en déduit que $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$. Et : $E \subset \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$.
Il est clair que $\operatorname{Ker} u \subset E$ et $\operatorname{Im} u \subset E$, donc $\operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u \subset E$.
Comme $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{\vec{0}\}$ (on n'a pas utilisé la dimension pour le montrer), on a :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E.}$$

2) *Intersection de* $\operatorname{Ker} v$ *et* $\operatorname{Im} u$
Soit $\vec{y} \in \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u$, il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = \vec{y}$.
De plus, $v(\vec{y}) = \vec{0}$. Comme $v\,o\,u = Id_E$, $v(u(\vec{x})) = v(\vec{y}) = \vec{0} = \vec{x}$.
Donc : $\vec{y} = u(\vec{0}) = \vec{0}$. Finalement, $\operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{\vec{0}\}$.
Somme de $\operatorname{Ker} v$ *et* $\operatorname{Im} u$
Analyse. Soit $\vec{x} \in F$, supposons $\vec{x} = \vec{y} + u(\vec{z})$, où $\vec{y} \in \operatorname{Ker} v$ et $\vec{z} \in E$.
Alors : $v(\vec{x}) = v(\vec{y}) + v\,o\,u(\vec{z}) = v\,o\,u(\vec{z}) = \vec{z}$. Et $\vec{x} = \vec{y} + u(v(\vec{x})) = \vec{y} + u\,o\,v(\vec{x})$.
Synthèse. Soit $\vec{x} \in F$ et posons $\vec{y} = \vec{x} - u\,o\,v(\vec{x})$.
Alors : $v(\vec{y}) = v(\vec{x}) - v\,o\,(u\,o\,v)(\vec{x}) = v(\vec{x}) - (v\,o\,u)(v(\vec{x})) = \vec{0}$. Ainsi, $\vec{y} \in \operatorname{Ker} v$.
Comme $u\,o\,v(\vec{x}) \in \operatorname{Im} u$, l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + u\,o\,v(\vec{x})$ entraîne que $F \subset \operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} u$.
La réciproque est immédiate car $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et leur somme, par conséquent, aussi. Donc : $F = \operatorname{Ker} v + \operatorname{Im} u$. On conclut.

$$\boxed{\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u = F.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir du raisonnement par Analyse-Synthèse en particulier pour montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est l'espace entier.
Étape 1 (Analyse) : on suppose qu'un vecteur $\vec{x}$ de E se décompose en la somme de deux vecteurs $\vec{x}_i$, chacun de ces vecteurs appartenant à un de ces sous-espaces vectoriels. Puis, on détermine chacun de ces vecteurs $\vec{x}_i$ en fonction de $\vec{x}$ en utilisant les hypothèses fournies par l'énoncé.
Étape 2 (Synthèse) : on montre que la décomposition obtenue lors de la première étape convient en vérifiant que chaque $\vec{x}_i$ appartient bien à son sous-espace vectoriel.

Formulaire

• Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E alors $E_1 \oplus E_2 = E$ si et seulement si l'on a une des trois assertions équivalentes suivantes :
- ▹ $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ et $E = E_1 + E_2$;
- ▹ tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 ;
- ▹ dans le cas où E est de dimension finie $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$.

• *Théorème du rang*
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de **dimension finie**, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on a l'égalité des dimensions : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.
• *Formule de Grassmann*
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, espace vectoriel de dimension finie, alors on a l'égalité des dimensions : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Jour n^{o}22

Exercice 22.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Dans la question 6), on écrit un programme en Python.

1) Montrer : $\forall n \geqslant 3$, $e^x = nx$ admet deux solutions vérifiant : $0 \leqslant x_n < y_n$.

2) Étudier la monotonie des suites $(x_n)_{n\geqslant 3}$ et $(y_n)_{n\geqslant 3}$. En déduire leurs limites.

3) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

4) Trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ et puis un développement asymptotique.

5) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang de n, $y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n$.

6) Écrire une fonction Python d'argument n et qui renvoie le couple des valeurs approchées de x_n et de y_n. Afficher ces couples pour $n \in [\![3, 20]\!]$.

Exercice 22.2 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Dans 1), 2), 3) et 4) d), on écrit des programmes en Python.

Une particule P se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 (position 0) qui est un puits, A_1 (position 1) et A_2 (position 2) deux positions intermédiaires et A_3, (position 3) un second puits. À l'instant $t = n$:
- si P est dans un puits, elle y reste avec une probabilité de 1;
- si P est en A_1, P va en A_0 avec la probabilité p, en A_2 avec la probabilité $1-p$.;
- si P est en A_2, P va en A_1 avec la probabilité p, en A_3 avec la probabilité $1-p$.

On note x_n la position de la particule P à $t = n$, $x_n(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

1) Écrire une fonction $Position(x, p)$ en Python qui donne x_{n+1} en fonction de x_n.

2) Écrire une fonction $Pos(n, p, x0)$ en Python renvoyant x_n en fonction de x_0 et p.

3) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$. Écrire une fonction en Python qui donne avec quelle fréquence la particule se trouve dans les quatre positions au bout de N essais, en fonction de la position initiale x_0.

4) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n^T = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) & P(x_n = 1) & P(x_n = 2) & P(x_n = 3) \end{pmatrix}$.

a) Trouver $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b) On suppose dorénavant $p = \frac{1}{2}$. Soit ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$, de $\operatorname{Ker}\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ et de $\operatorname{Ker}(\phi - Id)$. Vérifier que la réunion $\mathcal{B}'$ de ces trois bases forme une base de $\mathbb{R}^4$. Écrire alors la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}'$.

c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$.

d) Écrire un programme Python d'argument l'entier n et qui fournit A^n.

Énoncé

Dans la question 6), on écrit un programme en Python.

1) Montrer : $\forall n \geqslant 3$, $e^x = nx$ admet deux solutions vérifiant : $0 \leqslant x_n < y_n$.

2) Étudier la monotonie des suites $(x_n)_{n\geqslant 3}$ et $(y_n)_{n\geqslant 3}$. En déduire leurs limites.

3) Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

4) Trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ et puis un développement asymptotique.

5) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang de n, $y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n$.

6) Écrire une fonction Python d'argument n et qui renvoie le couple des valeurs approchées de x_n et de y_n. Afficher ces couples pour $n \in [\![3, 20]\!]$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du Concours Commun INP (ex Concours Communs Polytechniques) dans la filière PSI en 2016.
On étudie les solutions d'une équation dans $\mathbb{R}$, indexé par un entier n. En particulier, on regarde le comportement de ces solutions quand n est très grand. On termine par une fonction Python, histoire de continuer à faire le tour des algorithmes principaux vus en première année.

1) Pour commencer, on pose les bases de l'exercice.
En introduisant $g_n : x \mapsto e^x - nx$, on montre l'existence de deux racines positives et distinctes de l'équation étudiée.

$\hookrightarrow$ On utilise bien entendu le théorème des valeurs intermédiaires. On en profitera pour placer x_n et y_n par rapport à $\ln n$.

2) Les racines dont on a montré l'existence à la question **1)** définissent donc deux suites (indéxées par l'entier $n \geqslant 3$). Dans cette question, on étudie les variations de ces deux suites, ce qui va permettre d'en déduire la convergence d'au moins l'une des deux grâce à un théorème classique.

$\hookrightarrow$ Pour (y_n), la comparaison avec $\ln n$ permet de conclure rapidement quant à sa nature.

3) On demande un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$. On doit être en cohérence avec la limite trouvée pour la suite (x_n).

$\hookrightarrow$ Il est conseillé parfois de lire toutes les questions avant d'attaquer la résolution.
En effet, l'énoncé d'une question peut permettre de donner une indication pour une question précédente.

4) Ici, on précise le comportement de x_n quand n tend vers $+\infty$. La technique est de poser $t_n = x_n - \frac{1}{n}$ et de trouver un équivalent de t_n.

$\hookrightarrow$ On commence à rentrer dans les affaires sérieuses. On remarque déjà que $e^{x_n} = 1 + nt_n$ et que $t_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Il reste à faire des développements limités au bon ordre.

5) On s'intéresse maintenant au comportement de y_n quand $n \to +\infty$. On en conclut que $y_n = O(\ln n)$. Voir la remarque à la fin du corrigé de cette question.

$\hookrightarrow$ Pour démarrer, on remarque qu'écrire $y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n$ revient à écrire l'inégalité $g_n((1+\epsilon)\ln n) > 0$, en revenant à l'étude de $g_n : x \mapsto e^x - xn$.
Après, on vous laisse vous débrouiller.

6) Il reste à appliquer un peu de Python. On a envie maintenant d'afficher une partie de ces deux suites x_n et y_n.

$\hookrightarrow$ On peut prendre la fonction *bisect*. (Voir la partie « Techniques à mémoriser ».) Ce qui précède permet de choisir un encadrement de x_n et de y_n à calculer qui est nécessaire pour appliquer cette fonction.

Corrigé

1) Soit $n \geqslant 3$. Posons $g_n : x \mapsto e^x - nx$. Remarquons déjà que tout réel α tel que $g_n(\alpha) = 0$ doit être strictement positif car on a obligatoirement $e^\alpha = n\alpha > 0$. Donc on restreint l'étude de g_n à $\mathbb{R}_+^\star$. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $g_n'(x) = e^x - n$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Donc g_n' est négative si $x \in]0, \ln n]$ et positive si $x \in [\ln n, +\infty[$. Et g_n est strictement décroissante sur $]0, \ln n]$, strictement croissante sur $[\ln n, +\infty[$. On a aussi : $g_n(\ln n) = n - n\ln n = n(1 - \ln n) < 0$ pour $n > e$ (ce qui est le cas car $n \geqslant 3$). On complète par $g_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = +\infty$.
Il reste à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires car g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. g_n s'annule deux fois sur $\mathbb{R}_+^\star$. La première fois est en $x_n \in]0, \ln n[$ et la deuxième fois en $y_n \in]\ln n, +\infty[$. On peut conclure.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 3,\ e^x = nx \text{ admet deux solutions vérifiant } 0 \leqslant x_n < y_n.}$$

2) *Étudions la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n vérifie $e^{x_n} = nx_n$. Et donc :

$$g_{n+1}(x_n) = e^{x_n} - (n+1)x_n = nx_n - nx_n - x_n = -x_n < 0.$$

On a : $x_n < \ln n < \ln(n+1)$. De plus, $g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Et comme g_{n+1} décroît sur $[0, \ln(n+1)]$, $x_{n+1} < x_n$. La suite (x_n) est donc strictement décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle est donc convergente. Il reste à déterminer sa limite finie. La suite (x_n) étant convergente, elle est bornée et donc la suite (e^{x_n}) est elle aussi bornée. Comme $e^{x_n} = nx_n$, la suite (x_n) tend nécessairement vers 0 car sinon $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n = +\infty$, ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_{n\geqslant 3} \text{ décroît strictement vers sa limite qui est } 0.}$$

Étudions la monotonie et la convergence de la suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$
On calque ce que l'on a fait plus haut.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_{n+1} vérifie $e^{y_{n+1}} = (n+1)y_{n+1}$. Et donc :

$$g_n(y_{n+1}) = e^{y_{n+1}} - ny_{n+1} = ny_{n+1} + y_{n+1} - ny_{n+1} = y_{n+1} > 0.$$

On a : $\ln n < \ln(n+1) < y_{n+1}$. De plus, $g_n(y_n) = 0$. Et comme g_n croît sur $[\ln n, +\infty[$, $y_{n+1} > y_n$. La suite (y_n) est donc strictement croissante. Comme pour tout $n \geqslant 3$, $y_n > \ln n$ et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = +\infty$. On peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (y_n)_{n\geqslant 3} \text{ croît strictement vers } +\infty.}$$

3) Comme pour tout $n \geqslant 3$, $e^{x_n} = nx_n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{x_n} = 1$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$. On peut conclure.

$$\boxed{\text{Lorsque } n \text{ tend vers } +\infty,\ x_n \sim \frac{1}{n}.}$$

4) On veut trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n. La technique est de poser $t_n = x_n - \dfrac{1}{n}$. Donc : $x_n = \dfrac{1}{n} + t_n$. Alors $t_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Alors :

$$e^{x_n} = e^{\frac{1}{n}} e^{t_n} = nx_n = 1 + nt_n.$$

Puis : $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $e^{t_n} = 1 + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ car $t_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Il reste :

$$e^{x_n} = \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + nt_n.$$

En développant, on a : $1 + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + nt_n$ et donc : $t_n = \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
À partir de là, on en déduit un équivalent de t_n et ensuite un développement asymptotique de x_n quand n tend vers $+\infty$:

$$\boxed{t_n \sim \frac{1}{n^2} \text{ et } x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

5) Soit $\epsilon > 0$ fixé. On veut montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n$, c'est-à -dire montrer qu'à partir d'un certain rang de n, $\ln n \leqslant y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n$. On sait que g_n est strictement croissante sur $[\ln n, +\infty[$. Et comme $g_n(y_n) = 0$, écrire $y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n$ équivaut à écrire que $g_n((1+\epsilon)\ln n) \geqslant 0$ pour n assez grand.
On développe :

$$g_n((1+\epsilon)\ln n) = e^{(1+\epsilon)\ln n} - n(1+\epsilon)\ln n = n^{1+\epsilon} - n(1+\epsilon)\ln n = n\left[n^{\epsilon} - (1+\epsilon)\ln n\right].$$

Pour ϵ fixé, posons $h_\epsilon(n) = n^\epsilon - (1+\epsilon)\ln n$. On peut vérifier que cette fonction est positive pour n assez grand. En effet,

$$h_\epsilon(n) = n^\epsilon\left[1 - \frac{(1+\epsilon)\ln n}{n^\epsilon}\right] \sim n^\epsilon,$$

quand n tend vers$+\infty$, par croissance comparée de ln et des fonctions puissances. En conclusion, $h_\epsilon(n) \geqslant 0$ à partir d'un certain rang de n et $g_n((1+\epsilon)\ln n)$ aussi.
On peut conclure :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^\star,\ \forall n \geqslant N,\ \ln n \leqslant y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n.}$$

Remarque

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, à partir d'un certain rang de n, $1 < \dfrac{y_n}{\ln n} \leqslant 1 + \epsilon$.

Donc on remarque que $y_n = O(\ln n)$, quand n tend vers $+\infty$.

6) Écrivons une fonction Python qui prend n pour argument et qui renvoie sous forme d'un couple des valeurs approchées de x_n et de y_n. Pour déterminer une solution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$, Python permet plusieurs méthodes. On peut appliquer une méthode de Dichotomie ou l'algorithme de Newton. On peut aussi utiliser des fonctions prédéfinies. Il y en a deux principales : $fsolve$ du sous-module *scipy.optimize* et *bisect*. Pour alléger la procédure, nous nous cantonnerons à une de ces deux fonctions prédéfinies. Par contre, on a ici une contrainte. On doit isoler séparement les deux racines x_n et y_n. On sait que $x_n \in [0, \ln n]$ et que $y_n > \ln(n)$. La question **6)** permet de remarquer que l'on peut choisir $y_n \in [\ln n, 10 \ln n]$ pour être tranquille. Nous choisissons alors la fonction prédéfinie *bisect* qui a pour arguments la fonction f, et a, b les bornes de l'intervalle où on recherche la racine. En effet la fonction prédéfinie $fsolve$ a pour argument f et $x0$ un point de départ et on n'est pas certain d'avoir x_n plutôt que y_n ou le contraire. On écrit alors :

```
>>> import numpy as np; import math as mt
>>> import scipy.optimize as resol
>>> for n in range(3,21) :
        def g(x) :
            return mt.exp(x) - n*x
        print(resol.bisect(g,0,np.log(n)),resol.bisect(g,np.log(n),10*np.log(n)))

0.619061286735465  1.5121345516579818
0.3574029561819328  2.1532923641103925
................  ................
0.11183255915936269  3.57715206395726
................  ................
0.05270598355098826  4.49975528852278
```

Par commodité, il n'a été affiché que les cas $n = 3$, $n = 4$ puis $n = 10$ et $n = 20$.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que toute suite croissante et majorée ou toute suite décroissante et minorée est convergente.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on résout l'équation $f(x) = 0$ avec Python.

1) On peut utiliser $fsolve$ du sous-module *scipy.optimize*. Il faut préciser la valeur initiale de l'algorithme employé par $fsolve$. Le résultat peut dépendre de cette valeur. Il est conseillé de prendre plusieurs valeurs de x_0. La syntaxe est :

```
>>> import scipy.optimize as resol; resol.fsolve(f,x0)
```

2) On peut utiliser *resol.root*$(f, x0)$ de *scipy.optimize*.

3) On peut utiliser ***l'algorithme de Dichotomie*** en le construisant ou en utilisant la fonction prédéfinie *bisect* de *scipy.optimize*. Ainsi, *resol.bisect*(f, a, b) détermine une racine de f dans $[a, b]$.

4) On peut utiliser ***l'algorithme de Newton*** en le construisant ou en utilisant la fonction prédéfinie *newton* de *scipy.optimize*. Ainsi, *resol.newton*$(f, x0)$ détermine une racine en partant de x_0.

♡ Il faut se souvenir que lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n \sim v_n$ peut se traduire par $u_n = v_n + o(v_n)$.

Formulaire

• *Théorème des valeurs intermédiaires*

Si f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a)f(b) \leqslant 0$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

• *Limite finie d'une suite*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Alors u converge vers l si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait : $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

• *Développements limités des fonctions usuelles, au voisinage de 0, à l'ordre n*

▷ $\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + ... + \dfrac{x^k}{k!} + ... + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$

▷ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^k + ... + x^n + o(x^n)$

▷ $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

▷ $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

▷ $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + ... + \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + ... + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

▷ $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + ... + \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + ... + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

▷ $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ... + (-1)^{k+1}\dfrac{x^k}{k} + ... + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$

▷ $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

▷ $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + ... + \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}x^n + o(x^n)$

▷ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + ... + \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n + o(x^n)$

▷ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

On retrouve les développements limités de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ en appliquant celui de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, respectivement avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

Énoncé

Dans 1), 2), 3) et 4) d), on écrit des programmes en Python.

Une particule P se déplace sur une surface comportant quatre positions successives, A_0 (position 0) qui est un puits, A_1 (position 1) et A_2 (position 2) deux positions intermédiaires et A_3, (position 3) un second puits. À l'instant $t = n$:
- si P est dans un puits, elle y reste avec une probabilité de 1.
- si P est en A_1, P va en A_0 avec la probabilité p, en A_2 avec la probabilité $1-p$.
- si P est en A_2, P va en A_1 avec la probabilité p, en A_3 avec la probabilité $1-p$.

On note x_n la position de la particule P à $t = n$, $x_n(\Omega) = [\![0,3]\!]$.

1) Écrire une fonction $Position(x,p)$ en Python qui donne x_{n+1} en fonction de x_n.

2) Écrire une fonction $Pos(n,p,x0)$ en Python renvoyant x_n en fonction de x_0 et p.

3) On suppose dans cette question $p = \frac{1}{2}$. Écrire une fonction en Python qui donne avec quelle fréquence la particule se trouve dans les quatre positions au bout de N essais, en fonction de la position initiale x_0.

4) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n^T = \begin{pmatrix} P(x_n=0) & P(x_n=1) & P(x_n=2) & P(x_n=3) \end{pmatrix}$.

a) Trouver $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b) On suppose dorénavant $p = \frac{1}{2}$. Soit ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer une base de Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$, de Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ et de Ker $(\phi - Id)$. Vérifier que la réunion $\mathcal{B}'$ de ces trois bases forme une base de $\mathbb{R}^4$. Écrire alors la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}'$.

c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$.

d) Écrire un programme Python d'argument l'entier n et qui fournit A^n.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice très inspiré d'un exercice posé à l'oral du Concours Centrale Supélec Mathématiques II dans la filière PSI en 2016.
Seule la dernière question a été transformée car la notion de diagonalisation de matrice n'est pas au programme de première année. On vous guide pour que vous fassiez cette diagonalisation sans savoir que c'est une diagonalisation.

1) Il s'agit de créer une fonction Python appelée $Position$ et d'arguments x (qui correspond à la position de la particule à l'instant n) et p (qui correspond à la probabilité p de l'énoncé). Il faut renvoyer la position de la particule à l'instant $n+1$. Attention, cette procédure est indépendante de l'instant n.

$\hookrightarrow$ Commencez par la partie « Techniques », où on explique comment démarrer un programme Python en simulation probabiliste. Puis ceci fait, donnons quelques pistes pour construire $Position(x,p)$. On remarque que $x = 1$ a pour image 0 (probabilité p) et 2 (probabilité $q = 1-p$). On peut introduire $va = binom(1,p)$ et $X = va.rvs(size = 1)$. Ainsi si $X[0] = 1$, on tape $return(0)$ et sinon $return(2)$. Idem pour $x = 2$.

2) Ici, on construit une procédure Python de nom Pos qui a pour argument n (l'instant), la probabilité p et x_0 la position initiale de la particule et qui renvoie la position de la particule à l'instant n, c'est-à-dire x_n.

$\hookrightarrow$ On pourra utiliser $Position$ comme sous-procédure dans Pos.

3) On veut construire ici une fonction Python qui fournit avec quelle fréquence la particule se trouve dans une des quatre positions au bout de N essais et cela en fonction de la position initiale. Cette fonction a donc pour arguments N et x_0. Comme $p = 1/2$, p n'est plus en argument de cette fonction.

$\hookrightarrow$ Il est clair que l'on utilisera Pos dans la boucle. Par ailleurs, on pourra utiliser $L.count(i)$ qui donne le nombre d'occurences de i dans une liste L donnée.

4) Maintenant, on va passer à la démonstration mathématique. On pourra d'ailleurs en fin de question comparer les résultats théoriques avec des valeurs trouvées avec la fonction Python de la question **3)**. À condition d'utiliser un ordinateur. L'idée générale de cette question est de poser le problème sous forme matricielle puis de diagonaliser la matrice trouvée (on indique la marche à suivre pour ceux qui ne savent pas ce que cela veut dire), ce qui va permettre de l'élever à la puissance n.

a) On commence par faire le lien entre le problème probabiliste et l'algèbre matricielle en déterminant une matrice qui permet de passer des probabilités à l'instant n d'être dans chaque position à leurs probabilités d'être pour la particule dans chacune de ces positions à l'instant $n + 1$.

$\hookrightarrow$ On pourra noter $A_{i,n}$ l'événement : « être en position i à l'instant n », et utiliser la formule des probabilités totales.

b) Ici, on prépare le terrain pour le calcul de A^n. On détermine une matrice, que l'on note B, qui vérifie $B = P^{-1}AP$, où P est une matrice de passage à trouver. L'idée est que B^n doit être facilement calculable.

$\hookrightarrow$ Voilà le moment de réviser une partie importante du programme en Algèbre linéaire, c'est-à-dire la modification de la matrice d'un endomorphisme par un changement de bases. Deux pistes sont possibles, rappelées dans la partie « Techniques à mémoriser ».

c) On calcule A^n, ce qui va permettre d'avoir X_n en fonction de X_0 et enfin, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a une idée des positions préférées de la particule au bout d'un grand nombre d'instants. Cela dépend bien entendu de X_0, donc de l'endroit où démarre la particule.

$\hookrightarrow$ Là encore, c'est une partie classique du programme.

d) On termine par un programme Python qui permet le calcul de A^n.

$\hookrightarrow$ Encore une fois, allez voir la partie « Techniques à mémoriser », où l'on vous donne l'outil pour faire du calcul matriciel avec Python.

Corrigé

1)
```
>>> from scipy.stats import *
>>> def Position(x,p) :
        va = binom(1,p); X = va.rvs(size=1)
        if x == 0 :
            return 0
        elif x == 1 :
            if X[0] = 1 :
                return(0)
```

```
        else :
            return(2)
    elif x == 2 :
        if X[0] = 1 :
            return(1)
        else :
            return(3)
    else :
        return(3)
```

2) >>> *def Pos*$(n, p, x0)$:

```
        u = x0
        for i in range(n) :
            u = Position(u, p)
        return(u)
```

<u>*Remarque.*</u>

On peut partir de $x0 = rd.randint(0, 3)$ si l'on ne veut pas choisir la position initiale.

3) On va utiliser $L.count(i)$ qui donne le nombre d'occurences de i dans la liste L.

```
>>> def g(N, x0) :
        L = [Pos(n, 0.5, x0) for n in range(0, N)]
        return [L.count(i)/len(L) for i in range(0, 4)]
```

Faisons quelques essais.

```
>>> g(30, 1) , g(120, 2)
[0.533 ; 0.066 ; 0.0 ; 0.4]  [0.266 ; 0.0083 ; 0.0166 ; 0.7083]
```

4) a) Si, pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, $A_{i,n}$ est l'événement : « être en position i à l'instant n », alors, en appliquant la formule des probabilités totales à l'événement $A_{0,n+1}$ avec le système complet d'événements $(A_{i,n})_{i\in[\![0,3]\!]}$, $P(A_{0,n+1})$ vaut :

$$\begin{array}{c} P_{A_{0,n}}(A_{0,n+1})P(A_{0,n}) + P_{A_{1,n}}(A_{0,n+1})P(A_{1,n}) \\ +P_{A_{2,n}}(A_{0,n+1})P(A_{2,n}) + P_{A_{3,n}}(A_{0,n+1})P(A_{3,n}) \end{array}.$$

Si l'on pose :

$$\begin{array}{c} a_n = P(x_n = 0) = P(A_{0,n}),\ b_n = P(x_n = 1) = P(A_{1,n}) \\ c_n = P(x_n = 2) = P(A_{2,n}),\ d_n = P(x_n = 3) = P(A_{3,n}) \end{array},$$

on a : $a_{n+1} = a_n \times 1 + b_n \times p + c_n \times 0 + d_n \times 0$.

De la même façon, on a : $b_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times p + d_n \times 0$.

Puis, on a : $c_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times q + c_n \times 0 + d_n \times 0$.

Et, enfin : $d_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times q + d_n \times 1$.

Utilisons maintenant les notations de l'énoncé, c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} P(x_n = 0) \\ P(x_n = 1) \\ P(x_n = 2) \\ P(x_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} P(x_{n+1} = 0) \\ P(x_{n+1} = 1) \\ P(x_{n+1} = 2) \\ P(x_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix},$$

On a finalement : $X_{n+1} = AX_n$ avec A donnée ci-dessous.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 1 \end{pmatrix}}.$$

b) On suppose dorénavant $p = \frac{1}{2}$.
Soit ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
• Déterminons une base de Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$.
Le vecteur $\vec{u}(x, y, z, t)$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient au sous-espace vectoriel Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = -\frac{1}{2}\vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/2 \\ -y/2 \\ -z/2 \\ -t/2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 1/2y & = & -1/2x \\ 1/2z & = & -1/2y \\ 1/2y & = & -1/2z \\ 1/2z + t & = & -1/2t \end{array} \right. ,$$

ce qui donne finalement : $3x = -y$, $z = -y$, $y = -z$ et $z = -3t$.
Et on en déduit que $(x, y, z, t) \in$ Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si (x, y, z, t) est de la forme $(x, -3x, 3x, -x) = x(1, -3, 3, -1)$. La famille $\{\vec{u}_1(1, -3, 3, -1)\}$ est donc génératrice de Ker $\left(\phi + \frac{1}{2}Id\right)$ et est libre car son unique vecteur est non nul. Donc :

$$\boxed{\text{Ker } \left(\phi + \tfrac{1}{2}Id\right) \text{ a pour base } \{\vec{u}_1(1, -3, 3, -1)\}.}$$

• Déterminons une base de Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$.
Le vecteur $\vec{u}(x, y, z, t)$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient au sous-espace vectoriel Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = \frac{1}{2}\vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 1/2y & = & 1/2x \\ 1/2z & = & 1/2y \\ 1/2y & = & 1/2z \\ 1/2z + t & = & 1/2t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y \\ z & = & y \\ y & = & z \\ z & = & -t \end{array} \right. .$$

On en déduit que $(x, y, z, t) \in$ Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ si et seulement si (x, y, z, t) est de la forme $(x, -x, -x, x) = x(1, -1, -1, 1)$. La famille $\{\vec{u}_2(1, -1, -1, 1)\}$ est donc génératrice de Ker $\left(\phi - \frac{1}{2}Id\right)$ et est libre car son unique vecteur est non nul. Donc :

$$\boxed{\text{Ker } \left(\phi - \tfrac{1}{2}Id\right) \text{ a pour base } \{\vec{u}_2(1, -1, -1, 1)\}.}$$

• Déterminons une base de Ker $(\phi - Id)$.
Le vecteur $\vec{u}(x, y, z, t)$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ appartient à Ker $(\phi - Id)$ si et seulement si $\phi(\vec{u}) = \vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + 1/2y & = & x \\ 1/2z & = & y \\ 1/2y & = & z \\ 1/2z + t & = & t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ t & = & t \end{array} \right. .$$

On en déduit que $(x, y, z, t) \in$ Ker $(\phi - Id)$ si et seulement si (x, y, z, t) est de la forme $(x, 0, 0, t) = x(1, 0, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1)$. La famille $\{\vec{e}_1(1, 0, 0, 0), \vec{e}_4(0, 0, 0, 1)\}$

est donc génératrice de Ker $(\phi - Id)$ et est clairement libre car les deux vecteurs qui la composent sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Donc :

$$\boxed{\text{Ker } (\phi - Id) \text{ a pour base } \{\vec{e}_1(1,0,0,0), \vec{e}_4(0,0,0,1)\}.}$$

• Vérifions que la réunion $\mathcal{B}'$ de ces trois bases forme une base de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1(1,-3,3,-1), \vec{u}_2(1,-1,-1,1), \vec{e}_1(1,0,0,0), \vec{e}_4(0,0,0,1)\}.$$

On a plusieurs méthodes possibles.
Si vous venez de MPSI, PCSI ou PTSI (option PSI), vous avez vu les déterminants d'ordre 4 et il suffit de prouver que le déterminant de la famille $\mathcal{B}'$ est non nul.
Si vous venez de 1TSI ou de 1TPC (mais ce n'est pas interdit de faire aussi comme cela si vous ne venez pas de ces deux filières), vous pouvez montrer que la matrice associée à la famille $\mathcal{B}'$ est de rang 4. Vous pouvez aussi montrer que la famille $\mathcal{B}'$ est libre dans $\mathbb{R}^4$. C'est ce que nous choisissons de faire car il faut bien faire quelque chose et essayer d'être commun à toutes les filières. On doit montrer l'implication :

$$\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2 + \gamma\vec{e}_1 + \delta\vec{e}_4 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

C'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 0 \\ -3\alpha-\beta & = & 0 \\ 3\alpha-\beta & = & 0 \\ -\alpha+\beta+\delta & = & 0 \end{array}\right.$

On remarque que la deuxième et la troisième lignes fournissent $\alpha = \beta = 0$. Puis la première ligne donne $\gamma = 0$ et la quatrième donne $\delta = 0$. On a bien le résultat voulu.

$$\boxed{\{\vec{u}_1(1,-3,3,-1), \vec{u}_2(1,-1,-1,1), \vec{e}_1(1,0,0,0), \vec{e}_4(0,0,0,1)\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

• Écrivons alors la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}'$.
Comme $\phi(\vec{u}_1) = -\frac{1}{2}\vec{u}_1$, $\phi(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}\vec{u}_2$, $\phi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ et $\phi(\vec{e}_4) = \vec{e}_4$, on a immédiatement les quatre colonnes de la matrice $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ de ϕ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\boxed{M_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Autre piste

Celui qui n'a pas pensé qu'on pouvait avoir directement la matrice $M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ peut la retrouver à partir de $A = M_{\mathcal{B}}(\phi)$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ de $\mathbb{R}^4$.

Posons $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On reconnaît la matrice de la famille $\mathcal{B}'$. On calcule l'inverse de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ soit en inversant un système, soit en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan. Faisons cet algorithme. On « concatène » $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et I_4 et on va effectuer des opérations élémentaires sur les lignes pour transformer $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ en I_4 et I_4 en $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'-1}$. On part donc de :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On effectue pour commencer les opérations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue les opérations élémentaires :

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue l'opération élémentaire : $L_3 \leftarrow \dfrac{1}{3}L_3$.

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue l'opération élémentaire : $L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$.

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$.

Puis, on effectue les opérations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$.

Il reste à effectuer les opérations élémentaires :

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \text{ puis } L_1 \leftarrow L_1 - L_2.$$

On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$.

On aboutit à : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Il reste encore à calculer $M_{\mathcal{B}'}(\phi) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'-1} M_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne d'abord :

$$M_{\mathcal{B}'}(\phi) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 12 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, à la fin de ce calcul long (eh oui, ce n'est pas la méthode la plus rapide !) :

$$M_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, celui qui passe par ce chemin s'est avancé dans la question suivante sans le savoir. En effet, le calcul de l'inverse de la matrice de passage est nécessaire à ce niveau.

c) Calculons A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On sait que (en posant $D = M_{\mathcal{B}'}(\phi)$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$),

$$M_{\mathcal{B}'}(\phi) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'-1} M_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}.$$

On en déduit que $D^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}A^2P$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$. La formule est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$. (Le fait qu'elle soit vraie pour $n = 2$ n'est pas obligatoire pour l'initialisation mais cela permet de deviner le développement que l'on va faire pour l'hérédité.) Supposons que la formule soit vraie pour n fixé supérieur ou égal à 2.

On a alors : $D^{n+1} = D^nD = P^{-1}A^nPP^{-1}AP = P^{-1}A^{n+1}P$.

On a fini la récurrence. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = P^{-1}A^nP \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}.$$

Il reste à se lancer dans un courageux calcul. On a successivement :

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n2^{-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^n2^{-n} & 2^{-n} & 1 & 0 \\ -3(-1)^n2^{-n} & -2^{-n} & 0 & 0 \\ 3(-1)^n2^{-n} & -2^{-n} & 0 & 0 \\ -(-1)^n2^{-n} & 2^{-n} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et enfin :

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 - 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/6 & 1/3 - 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/6 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 1/3 - 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/6 & 2/3 - 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/6 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Remarque

Si l'on applique pour $n = 0$, on retrouve I_4 et pour $n = 1$, on retrouve A.

Nous allons maintenant en déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n$.

On pose : $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{pmatrix} = A^nX_0$.

$$A^nX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 - 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/6 & 1/3 - 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/6 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/2 & 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/2 & 0 \\ 0 & 1/3 - 2^{-n}/2 + (-2)^{-n}/6 & 2/3 - 2^{-n}/2 - (-2)^{-n}/6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que lorsque n tend vers $+\infty$, 2^{-n} et $(-2)^{-n}$ tendent vers 0. Et il reste :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{pmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + d_0 \end{pmatrix}.}$$

On peut préciser selon les valeurs de a_0, b_0, c_0 et d_0.

Si $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = d_0 = 0$, ce qui signifie que la particule est certainement au puits 0 initialement. Et qu'elle y reste. On trouve logiquement que $\lim_{n\to+\infty} X_n = (1, 0, 0, 0)$.

Si $d_0 = 1$, même destin pour la particule mais au puits 3.

Si $b_0 = 1$, $a_0 = c_0 = d_0 = 0$, la particule est initialement certainement en position 1. Et $\lim_{n\to+\infty} X_n = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}\right)$. Rappelons nous $g(N, 1)$ qui donne au bout de N essais la liste des fréquences où la particule atterrit dans chacune des 4 positions en supposant que la particule parte certainement de la position 1. Rappelons nous aussi de la liste trouvée pour $N = 30$.

Si $c_0 = 1$, $a_0 = b_0 = d_0 = 0$, la particule est initialement certainement en position 2. Et $\lim_{n\to+\infty} X_n = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$. Rappelons nous maintenant $g(N, 2)$ et de la liste trouvée pour $N = 120$.

Remarque

Le résultat dépend donc de la position initiale de la particule. Mais attention, ici, il s'agit de probabilités.

d) Écrivons un programme Python d'arguments N et A et qui fournit A^N. Nous allons l'appeler *PuissanceN*. Comme on va utiliser le produit de deux matrices avec la fonction prédéfinie *dot*, on doit introduire le module *numpy*.

```
>>> import numpy as np
>>> def PuissanceN(A, N) :
        AN = A
        for n in range(1, N) :
            AN = np.dot(A, AN)
        return AN
```

On commence avec un essai : le calcul de A^1, histoire de vérifier :

```
>>> PuissanceN(np.array([[1, 1/2, 0, 0], [0, 0, 1/2, 0], [0, 1/2, 0, 0], [0, 0, 1/2, 1]]), 1)

array([[1., 0.5, 0., 0.],
[0., 0., 0.5, 0.],
[0., 0.5, 0., 0.],
[0., 0., 0.5, 1.]])
```

C'est bon. Puis, on calcule A^2.

```
>>> PuissanceN(np.array([[1, 1/2, 0, 0], [0, 0, 1/2, 0], [0, 1/2, 0, 0], [0, 0, 1/2, 1]]), 2)
```

$array([[1., 0.5, 0.25, 0.],$
$[0., 0.25, 0., 0.],$
$[0., 0., 0.25, 0.],$
$[0., 0.25, 0.5, 1.]])$

On passe aux choses sérieuses avec A^{100} :

$>>>\ \ PuissanceN(np.array([[1, 1/2, 0, 0], [0, 0, 1/2, 0], [0, 1/2, 0, 0],$
$[0, 0, 1/2, 1]]), 100)$

$array([[1.00000000e + 00, 6.66666667e - 01, 3.33333333e - 01,$
$0.00000000e + 00],$
$[0.00000000e + 00, 7.88860905e - 31, 0.00000000e + 00,$
$0.00000000e + 00],$
$[0.00000000e + 00, 0.00000000e + 00, 7.88860905e - 31,$
$0.00000000e + 00],$
$[0.00000000e + 00, 3.33333333e - 01, 6.66666667e - 01,$
$1.00000000e + 00]])$

On interpréte le résultat. Ainsi, $7.88860905e - 31$ par exemple est un synonyme de 0 et $6.66666667e - 01$ est un synonyme de $2/3$.
On « voit » que la matrice limite quand N tend vers $+\infty$, est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant à X_0, on retrouve le résultat de la question **4) c)**.

Remarque

On peut éviter la boucle et utiliser la fonction prédéfinie *matrix_power* qui donne la puissance d'une matrice donnée. Mais il faut charger *numpy.linalg* auparavant :
$>>>$ *import numpy.linalg as alg*
$>>>$ $alg.matrix\_power(A, 100)$
Et on obtient par exemple A^{100} directement.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir des différentes méthodes pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base dans E, de dimension n. On peut montrer que le déterminant associé est non nul ou alors que la famille de vecteurs est libre ou alors que la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs est de rang n.

♡ Il faut se souvenir des différentes méthodes pour inverser une matrice P. On peut poser le système linéaire $Y = PX$ et le résoudre : $X = P^{-1}Y$. On peut aussi utiliser la méthode de Gauss-Jordan explicitée dans le corrigé. L'idée est par opérations élémentaires sur les colonnes passer de $(P|I_n)$ à $(I_n|P^{-1})$.

♡ Il faut se souvenir que pour définir une matrice avec Python, on charge d'abord *numpy as np* puis la commande $np.array([[\,], ..., [\,]])$ crée une matrice.
Ensuite $np.dot(A, B)$ fournit le produit des matrices A et B.

♡ Il faut se souvenir que si $D = P^{-1}AP$, où D, P, A sont trois matrices carrées d'ordre n, P étant inversible alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^nP$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$.

♡ Il faut se souvenir que sous Python, la commande $alg.matrix\_power(A, n)$ renvoie la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice A (écrite avec *np.array*).
Il faut préalablement avoir tapé :
import numpy as np ; *import numpy.linalg as alg*

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on exploite un exercice de probabilité et notamment de la façon dont on simule une suite de tirages aléatoires avec Python.

Plusieurs modules ou sous-modules sont à votre disposition.

1. Sous-module *numpy.random* : >>> *import numpy.random as rd*

• $rd.randint(a, b)$ permet de choisir un entier au hasard dans a, b. La fonction *randint* peut prendre un troisième argument optionnel permettant d'effectuer plusieurs tirages et de renvoyer le résultat sous forme de tableau ou de matrice.
• *rd.random*( ) renvoie un réel dans $[0, 1[$. Comme la fonction *rd.randint*, cette fonction accepte un argument supplémentaire optionnel permettant de réaliser plusieurs tirages et de les renvoyer sous forme de tableau ou de matrice.
• La commande $rd.binomial(n, p)$ permet de simuler une loi binomiale dont les paramétres sont n et p. Dans le cas $n = 1$, elle simule donc une loi de Bernoulli.
Un troisième argument otionnel donne le nombre de valeurs que l'on veut.
• $rd.geometric(p)$ permet de simuler une loi géométrique de paramètre p.
Un deuxième argument optionnel donne le nombre de valeurs voulues.
• La commande $rd.poisson(p)$ permet de simuler une loi de Poisson de paramètre p.
Un deuxième argument optionnel donne le nombre de valeurs.

2. Sous-module *stats* ***de*** *scipy* : >>> *from scipy.stats import* $*$

scipy.stats possède les mêmes fonctions que *numpy.random*.
On peut ajouter des attributs qui fournissent $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$ (fonction de répartition), $E(X)$ et $V(X)$. Ces attributs sont *rvs*, *pmf*, *cdf*, *mean* et *sdt*.
Ainsi, si l'on tape : >>> $va = poisson(p)$

$va.rvs(size = l)$ donne une liste de tirages de Poisson de taille l.
$va.pmf(k)$ donne $P(X = k)$, $va.pdf(k)$ donne $P(X \leqslant k)$.
va.mean donne $E(X)$ et *va.sdt* donne $V(X)$.

♡ Il faut se souvenir que simuler une loi de probabilité c'est souvent calculer des proportions que l'on installe dans une liste. On rappelle que $L.count(i)$ donne le nombre de fois où apparaît i dans L.

Formulaire

• *Formule des probabilités totales*

Soit I un ensemble fini et un système complet d'événements $(A_n)_{n\in I}$, alors on a, pour tout événement B, $P(B) = \displaystyle\sum_{n\in I} P(B \cap A_n) = \sum_{n\in I} P_{A_n}(B) P(A_n)$.

• *Action d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme*

Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie. On appelle **matrice de passage** de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$, et on note $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$, la matrice représentative de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$. On a : $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'} = M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(Id_E)$. En particulier, $\left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}$.
Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ et $A = M_{\mathcal{E}}(\phi)$, $A' = M_{\mathcal{E}'}(\phi)$. Alors : $A' = \left(P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}\right)^{-1} A P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$.

Jour n^{o}23

Exercice 23.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Dans certaines questions de cet exercice, on écrira des programmes en langage Python.

1) Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.

a) Justifier que f s'annule sur $[a, b]$.

b) Écrire en Python une fonction *rech_dicho* prenant en arguments une fonction f, deux flottants a et b tels que $f(a)f(b) < 0$, une précision *eps* et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de f à une précision *eps* près.

2) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

a) Montrer que f a un point fixe, c'est-à-dire une valeur $c \in [0, 1]$ telle que l'on ait l'égalité : $f(c) = c$.

b) Écrire en Python une procédure $rech\_pt\_fixe$ qui prend en arguments une fonction f que l'on suppose continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, une précision *eps* et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de f à une précision *eps* près. On pourra utiliser *rech_dicho*.

Exercice 23.2 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Dans certaines questions de cet exercice, on utilisera un ordinateur muni du langage Python.

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = 2X \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

1) Avec Python, calculer P_n pour n variant de 2 à 8.

2) Conjecturer le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n.

3) Justifier ces résultats.

4) ***Sauf 1TSI et 1TPC***. On pose $\langle P, Q\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt$ pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.

a) Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.

b) Calculer à la main $\langle P_0, P_0\rangle$, $\langle P_0, P_1\rangle$ et $\langle P_1, P_1\rangle$.

c) Rappeler la méthode des trapèzes pour déterminer numériquement une intégrale définie. Proposer un programme en langage Python.

d) Avec Python, calculer $\langle P_i, P_j\rangle$ pour i et j variant de 0 à 8.
Que dire de la famille $(P_i)_{i\in[\![0,8]\!]^2}$?

Exercice 23.1 Arts et Métiers Paris Tech-ESTP-Polytech 2017 - ♣ ♣

Énoncé

Dans certaines questions de cet exercice, on écrira des programmes en langage Python.

1) Soient a et b deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$.

a) Justifier que f s'annule sur $[a,b]$.

b) Écrire en Python une fonction *rech_dicho* prenant en arguments une fonction f, deux flottants a et b tels que $f(a)f(b) < 0$, une précision *eps* et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de f à une précision *eps* près.

2) Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

a) Montrer que f a un point fixe, c'est-à-dire une valeur $c \in [0,1]$ telle que l'on ait l'égalité : $f(c) = c$.

b) Écrire en Python une procédure *rech_pt_fixe* qui prend en arguments une fonction f que l'on suppose continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, une précision *eps* et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de f à une précision *eps* près. On pourra utiliser *rech_dicho*.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un extrait de problème posé à l'écrit des concours Arts et Métiers Paris Tech-ESTP-Polytech, banque E3A, filière PC en 2017.
L'exercice est basé sur la recherche des racines d'une équation du type $f(x) = 0$ par dichotomie. Il est décomposé en deux parties, une partie purement mathématique et théorique, qui tourne autour du théorème des valeurs intermédiaires et une partie numérique, où on élabore des programmes en code Python.

1) Dans cette question, on traite le cas d'une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$. On recherche une valeur approchée d'une solution de $f(x) = 0$ en encadrant cette solution avec une précision donnée.

a) On justifie qu'il n'est pas idiot de chercher une solution de $f(x) = 0$.

$\hookrightarrow$ Vous l'avez compris, c'est ici qu'apparaît le théorème des valeurs intermédiaires.

b) L'énoncé suggère que l'on va appliquer une méthode de Dichotomie. En effet, on veut encadrer la solution dont on veut une valeur approchée par deux réels, l'un constituant une valeur approchée par défaut et l'autre par excès. On commence par se placer sur un intervalle où $f(x) = 0$ a une solution, par exemple $[a,b]$. On va supposer que la solution α est unique sur $[a,b]$. (On peut en général toujours le supposer quitte à prendre dès le départ un intervalle $[a,b]$ assez petit pour que ce soit le cas.) On pose $m = (a+b)/2$, le signe de $f(a)f(m)$ ou de $f(b)f(m)$ permet de savoir si $\alpha \in [a,m]$ ou $\alpha \in [m,b]$. Puis, on recommence avec l'intervalle réduit de moitié par rapport à $[a,b]$ qui est choisi et etc. Si $[g,d]$ est l'intervalle récurrent, on continue (donc une boucle *while*) tant que $d - g > 2\,eps$.

$\hookrightarrow$ Vous pouvez, si vous n'êtes pas loin d'un ordinateur, appliquer à un exemple. Dans le corrigé, nous avons cherché une valeur approchée à 10^{-8} d'une racine de $x^3 - 4x + 1 = 0$.

2) Ici, on étudie l'équation $f(x) = x$ et on se ramène à ce qui précède en posant $g(x) = f(x) - x$.

a) On justifie d'abord que $g(x) = 0$ a une solution avant de se lancer dans une résolution numérique.

$\hookrightarrow$ Ici, le fait que $f([0,1]) \subset [0,1]$ est important pour le signe de g en 0 et en 1.

b) On fait ici une procédure Python qui comme celle de **1) b)** renvoie un couple de réels encadrant une solution de $f(x) = x$, à une précision donnée.

$\hookrightarrow$ On peut reprendre *rech_dicho* comme sous-procédure ou sinon refaire une procédure autonome. À vous de voir. Nous, dans le corrigé, comme le suggère l'énoncé, on utilisera *rech_dicho*.

Corrigé

1) a) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue et comme $f(a)f(b) < 0$, on sait qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
De plus, $f(a)f(b) < 0$ implique que $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$.
Donc, on peut même préciser qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, } f \text{ s'annule sur } [a,b].}$$

1) b) Écrivons en Python une fonction *rech_dicho* prenant en arguments une fonction f, deux flottants a et b tels que $f(a)f(b) < 0$, une précision *eps* et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de f (noté l dans la suite) à une précision *eps* près. Le **principe de la dichotomie** consiste à obtenir une suite $(I_n)_n$ de segments emboîtés, dont la longueur tend vers 0 et contenant chacun la limite l.
En notant g_n et d_n les bornes de ces intervalles, on dispose de deux suites adjacentes, convergeant vers l.

Pour obtenir cette suite de segments emboîtés, on procède comme suit :
• on pose initialement $g_0 = min(a,b)$ et $d_0 = max(a,b)$;
• en supposant construit le segment $I_n = [g_n, d_n]$, on pose $m = \frac{g_n+d_n}{2}$ (milieu du segment) et on calcule $f(m)$: si $f(m)$ est du signe opposé à $f(g_n)$ alors il existe une racine entre g_n et m; on pose alors $I_{n+1} = [g_n, m]$, c'est-à-dire $g_{n+1} = g_n$ et $d_{n+1} = m$. Sinon, il y a une racine entre m et d_n, donc on pose $g_{n+1} = m$ et $d_{n+1} = d_n$.
On sort de la boucle *while* dès que $d - g <= 2 * eps$. Le milieu de $[g,d]$ est bien à une distance de l (qui appartient à ce segment) d'au plus *eps*.

Passons à la procédure Python.

```
>>> def rech_dicho(f, a, b, eps) :
        g, d = min(a, b), max(a, b)
        while d - g > 2 * eps :
            m = (g + d)/2
            if f(m) == 0 :
                return (m, m)
            elif f(g) * f(m) < 0 :
                d = m
            else :
                g = m
        return (g, d)
```

Remarque

Appliquons à $x^3 - 4x + 1 = 0$ pour trouver ses trois racines à 10^{-8} près. On tape :

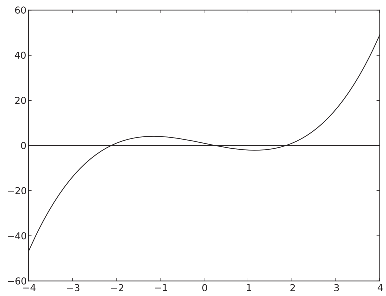
$>>>$ *import numpy as np* ; *import matplotlib.pyplot as plt*

$>>>$ $def\ f(x)\ :\ return(x**3\ -\ 4*x\ +\ 1)$

Déjà, isolons les racines pour se placer dans un intervalle où une seule racine existe.

$>>>$ $X\ =\ np.linspace(-4, 4, 500)\ ;\ Y\ =\ f(X)\ ;$

$>>>$ $plt.plot(X, Y)\ ;\ plt.axhline(\,)\ ;\ plt.show(\,)$



Ainsi, chacun des intervalles $[-3, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, 3]$ contient une racine et une seule. Par exemple :

$>>>$ $rech\_dicho(f, -3, -1, 1e-8)$

$(-2.1149075478315353,\ -2.114907532930374)$

2) a) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(0) = f(0) \in [0, 1]$ et donc $g(0) \geqslant 0$. Puis $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0, 1]$. Ainsi, $g(0)g(1) \leqslant 0$ et g étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{il existe } c \in [0, 1] \text{ tel que } f(c) = c.}$$

b) On va utiliser *rech_dicho*.

```
>>> def rech_pt_fixe(f, eps) :
        def g(x) :
            return f(x) - x
        print(rech_dicho(g, 0, 1, eps))
```

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir des différentes méthodes algorithmiques pour résoudre $f(x) = 0$ au programme. Voir la partie « Techniques à mémoriser » de **l'exercice 21.2**.

Formulaire

• *Théorème des valeurs intermédiaires*

Si f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a)f(b) \leqslant 0$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Énoncé

Dans certaines questions de cet exercice, on utilisera un ordinateur muni du langage Python.

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = 2X \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

1) Avec Python, calculer P_n pour n variant de 2 à 8.

2) Conjecturer le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n.

3) Justifier ces résultats.

4) ***Sauf 1TSI et 1TPC***. On pose $\langle P, Q\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt$ pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.

a) Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire.

b) Calculer à la main $\langle P_0, P_0\rangle$, $\langle P_0, P_1\rangle$ et $\langle P_1, P_1\rangle$.

c) Rappeler la méthode des trapèzes pour déterminer numériquement une intégrale définie. Proposer un programme en langage Python.

d) Avec Python, calculer $\langle P_i, P_j\rangle$ pour i et j variant de 0 à 8.
Que dire de la famille $(P_i)_{i\in[\![0,8]\!]^2}$?

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice posé à l'oral du concours commun Centrale-Supélec dans la filière PSI en 2016.
On étudie d'abord une suite de polynômes puis on définit un produit scalaire dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et on calcule les produits scalaires des éléments de cette suite de polynômes. On utilise le moyen informatique de temps en temps mais les parties purement mathématiques ne sont pas sacrifiées, rassurez-vous !

1) On s'intéresse d'abord à la suite de polynômes définie par la donnée de ses deux premiers termes P_0 et P_1 et par une récurrence linéaire d'ordre 2. On demande le calcul des polynômes de cette suite jusqu'à P_8. On propose de faire une procédure Python qui permette d'afficher tous les termes de P_2 à P_8.

$\hookrightarrow$ Il faut déjà savoir comment on rentre un polynôme sous Python.
Foncez voir la partie « Techniques à mémoriser » pour le savoir.

2) On s'intéresse au degré, au coefficient dominant et à la parité de P_n. Ici, on demande juste de conjecturer, donc il n'y a rien à prouver.

$\hookrightarrow$ Si vous n'avez pas fait le programme en Python, le calcul à la main de P_2 à P_5 peut permettre la conjecture.

3) Ici, il faut prouver ce qui a été conjecturé. Voilà une occasion de faire une jolie récurrence. Vous pouvez d'ailleurs la faire directement sur les trois paramètres (degré, coefficient dominant, parité).

$\hookrightarrow$ Si vous avez du mal à démarrer, posez $P_n = 2^n X^n + Q_n$, où Q_n est un polynôme de degré au plus $n-1$ et dont la parité est celle de l'entier n. On n'en dit pas plus.

4) Ici, on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et on travaille avec.

a) Tout d'abord on montre que notre produit scalaire en est bien un. C'est la moindre des choses !

$\hookrightarrow$ Rappelez vous ce qu'est un produit scalaire. Allez voir le formulaire sinon !

b) On demande quelques calculs de produits scalaires entre P_0 et P_1. On voit rapidement qu'il s'agit de faire un peu de calcul intégral.

$\hookrightarrow$ Pour $\langle P_0,\, P_0\rangle$ et $\langle P_1,\, P_1\rangle$, on pourra faire un changement de variable. Par exemple $t = \cos u$ comme dans le corrigé.

c) Ici, on demande de rappeler la méthode d'intégration numérique des trapèzes. On peut commencer par formuler mathématiquement la méthode et ensuite on propose de la mettre en code Python. Par contre, on ne s'intéresse pas ici à l'erreur commise. Allez la retrouver dans votre cours !

$\hookrightarrow$ Les arguments de la fonction $trapezes$ sont la fonction f que l'on intègre, a et b, les deux extrémités de l'intégrale et n le nombre de calculs faits dans la boucle.

d) On calcule maintenant les produits scalaires entre P_i et P_j, pour tous les entiers i et j entre 0 et 8. On utilise le programme fait à **4) c)** car à la main, on ne va pas très loin ! On conjecture alors une propriété de notre famille de polynômes.

$\hookrightarrow$ Là, on interpréte Python. Par exemple 10^{-16} signifie 0 et 0.9989 signifie 1.

Corrigé

1) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = 2X \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

Si l'on travaille « à la main », (ce n'est pas demandé mais c'est juste pour vérifier après), on a : $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 4X^2 - 1$, $P_3 = 2XP_2 - P_1 = 8X^3 - 4X$.
Et : $P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(8X^3 - 4X) - 4X^2 + 1 = 16X^4 - 12X^2 + 1$.
Passons à Python. On peut taper :

```
>>> from numpy.polynomial import Polynomial
>>> def P(n) :
        if n == 0 :
            return Polynomial([1])
        elif n == 1 :
            return Polynomial([0,2])
        else :
            return Polynomial([0,2]) * P(n-1) - P(n-2)
>>> P(4)
Polynomial([1.,0.,-12.,0.,16.],[-1.,1.],[-1.,1.]) (Cela marche !)
>>> [P(n).coef for n in range(2,9)]
[array([-1.,0.,4.]),
array([0.,-4.,0.,8.]),
array([1.,0.,-12.,0.,16.]),
array([0.,6.,0.,-32.,0.,32.]),
array([-1.,0.,24.,0.,-80.,0.,64.]),
array([0.,-8.,0.,80.,0.,-192.,0.,128.]),
array([1.,0.,-40.,0.,240.,0.,-448.,0.,256.])]
```

2) On peut conjecturer que si a_n est le coefficient dominant de P_n, alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg P_n = n,\ a_n = 2^n \text{ et } P_n \text{ a la même parité que } n.}$$

3) Les résultats conjecturés sont évidemment vrais pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons qu'ils soient vraies jusqu'à un ordre n supérieur ou égal à 1. Donc, pour tout k appartenant à $[\![0, n]\!]$, $P_k = 2^k X^k + Q_k$, où Q_k est un polynôme de degré au plus $k-1$ et dont la parité est celle de k (car $2^k X^k$ a la même parité que k). On peut écrire :

$$P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1} = 2X(2^n X^n + Q_n) - (2^{n-1}X^{n-1} + Q_{n-1}),$$

c'est-à-dire :

$$P_{n+1} = 2^{n+1}X^{n+1} + 2XQ_n - 2^{n-1}X^{n-1} - Q_{n-1}.$$

Le polynôme $2XQ_n - 2^{n-1}X^{n-1} - Q_{n-1}$ est de degré au plus n et le monôme dominant de P_{n+1} est $2^{n+1}X^{n+1}$. Donc, P_{n+1} est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est 2^{n+1}. Enfin, $2^{n+1}X^{n+1}$ a la parité de $n+1$, $2XQ_n$ a le contraire de la parité de Q_n (car X est impair) donc a le contraire de la parité de P_n et donc a la parité de $n+1$, puis $-2^{n-1}X^{n-1}$ a la parité de $n-1$ donc de $n+1$ et enfin $-Q_{n-1}$ a la parité de $n-1$ donc de $n+1$, et P_{n+1} qui est la somme de tous ces polynômes a pour parité celle de $n+1$. On a donc prouvé ce qui avait été conjecturé : si a_n est le coefficient dominant de P_n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\deg P_n = n,\ a_n = 2^n \text{ et } P_n \text{ a la même parité que } n.}$$

4) a) On pose $\langle P,\, Q\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt$ pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.

On commence par remarquer que la quantité $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt$ existe pour tout couple de polynômes. Il faut montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

Symétrie

Pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$,

$$\langle P,\, Q\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}Q(t)P(t)\,dt = \langle Q,\, P\rangle.$$

Bilinéarité

Pour tout $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle P,\, Q + \alpha R\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)(Q(t) + \alpha R(t))\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt + \alpha\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)R(t)\,dt \\
&= \langle P,\, Q\rangle + \alpha\langle P,\, R\rangle.
\end{aligned}$$

Forme définie et positive

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P,\, P\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P^2(t)\,dt \geqslant 0$ car on intégre de -1 à 1 une fonction à valeurs positives.
La forme $\langle\ ,\ \rangle$ est bien positive.

Puis : $\langle P,\, P\rangle = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P^2(t)\,dt = 0$.
Comme $t \mapsto \sqrt{1-t^2}P^2(t)$ est continue sur $[-1,1]$ et à valeurs positives et comme son intégrale de -1 à 1 est nulle, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}P^2(t)$ est nulle sur $[-1,1]$, c'est-à-dire que $t \mapsto P^2(t)$ est nulle sur $[-1,1]$. P^2 (et donc P) a une infinité de racines, c'est le polynôme nul et ainsi $P = 0$. La forme $\langle\, ,\, \rangle$ est définie. On peut conclure :

$$\boxed{\langle .\, ,\, . \rangle \text{ est un produit scalaire.}}$$

b) • Calculons à la main $\langle P_0,\, P_0\rangle$. On a : $\langle P_0,\, P_0\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$.
On pose le changement de variable $t = \cos u$, où $u \in [0,\pi]$. On a :

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2 u} = \sqrt{\sin^2 u} = |\sin u| = \sin u,$$

car $\sin u \geqslant 0$ pour $u \in [0,\pi]$.
Il reste : $\langle P_0,\, P_0\rangle = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{0} \sin u\, \sin u\, dt$, car $dt = -\sin u\, du$.
Puis : $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u \Rightarrow \sin^2 u = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2u)$. On a alors :

$$\langle P_0,\, P_0\rangle = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} (1-\cos 2u)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[u - \frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{\pi},$$

en intégrant $u \mapsto 1 - \cos 2u$.
Finalement : $\langle P_0,\, P_0\rangle = \dfrac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1$ car $\sin(2\pi) = \sin(2\times 0) = 0$.
• Calculons à la main $\langle P_0,\, P_1\rangle$:
On a : $\langle P_0,\, P_1\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} 2t\sqrt{1-t^2}\,dt$. On pose le changement de variable $u = -t$, ce qui donne :

$$\langle P_0,\, P_1\rangle = -\frac{2}{\pi}\int_{1}^{-1} (-2u)\sqrt{1-u^2}\,(-du) = \frac{2}{\pi}\int_{1}^{-1} 2u\sqrt{1-u^2}\,du = -\langle P_0,\, P_1\rangle.$$

Ainsi : $\langle P_0,\, P_1\rangle = 0$.
Remarque
Ceci est général, l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ si f est impaire.

• Calculons à la main $\langle P_1,\, P_1\rangle$:
On a : $\langle P_1,\, P_1\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} 4t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$. Le mieux est de repartir sur le même changement de variable que pour le calcul de $\langle P_0,\, P_0\rangle$. On pose donc $t = \cos u$ avec $u \in [0,\pi]$. On écrit :

$$\langle P_1,\, P_1\rangle = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0} 4\cos^2 u \sin u \sin u\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 4\cos^2 u \sin^2 u\,du.$$

Or $4\cos^2 u \sin^2 u = (\sin 2u)^2$. Effectuons le changement de variable $v = 2u$:

$$\langle P_1,\, P_1\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 2u\,du = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 v\,dv$$

car $dv = 2du$.
On utilise encore la célèbre formule trigonométrique : $\sin^2 v = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2v)$. Et :

$$\langle P_1,\, P_1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\left[v - \frac{1}{2}\sin 2v\right]_0^{2\pi},$$

ce qui donne : $\langle P_1,\, P_1\rangle = \dfrac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1$. On résume tout cela :

$$\boxed{\langle P_0,\, P_0\rangle = 1,\, \langle P_0,\, P_1\rangle = 0,\, \langle P_1,\, P_1\rangle = 1.}$$

c) Le principe de la méthode est le suivant. Prenons une fonction f à valeurs positives et continue sur $[a, b]$. : l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ est $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Considérons le segment de droite passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. L'aire comprise entre ce segment de droite, l'axe $0x$ et les droites $x = a$ et $x = b$ est une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. On appelle ce principe « méthode des trapèzes » car l'aire d'approximation est celle d'un trapèze. Si l'on suppose f croissante, cette aire d'approximation est dans ce cas la somme de l'aire d'un rectangle qui est $(b-a)f(a)$ et de l'aire d'un triangle qui est $\frac{1}{2} \times (b - a) \times (f(b) - f(a))$. L'aire totale est :

$$(b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f(b) - f(a)) = \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a) + f(b)\right).$$

Si f est décroissante, on retrouve le même résultat.
On montre que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, l'erreur est de la forme :

$$\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c),$$

où $c \in [a, b]$.
Pour obtenir de meilleurs résultats, on découpe l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles réguliers de pas $h = \frac{1}{n}(b-a)$ et on applique la méthode sur chacun des sous-intervalles $[a + ph,\, a + (p + 1)h]$, où p est un entier variant de 0 à $n - 1$.
On obtient pour approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$:

$$\frac{h}{2}\left(f(a) + f(a+h) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h) + f(a+(n-1)h) + f(b)\right).$$

En remarquant que tous les termes $f(a + ph)$ apparaîssent deux fois sauf $f(a)$ et $f(b)$, l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est :

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b)) + \sum_{p=1}^{n-1} f\left(a + p\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

L'erreur commise est majorée par $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, où $M_2 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f''(t)|$ en supposant f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.

Passons à la mise sous Python. On peut appliquer une somme ou une boucle selon votre envie. Pour la boucle, on tape :

```
>>> def trapezes(f, a, b, n) :
        h = (b - a)/float(n); z = 0.5 * (f(a) + f(b))
        for i in range(1, n) :
            z = z + f(a + i * h)
        return h * z
```

d) Il reste à appliquer notre jolie procédure pour calculer $\langle P_i, P_j \rangle$ pour i et j variant de 0 à 8. Par contre, il va falloir d'abord transformer les polynômes $P(n)$ qui sont des listes en vraies fonctions.

```
>>> def Np(n, t) :
        return sum(P(n).coef[p] * (t ** p)  for p in range(0, n + 1))
```

Par exemple, tapons :

```
>>> Np(7, 1.4)
524.9907711999997
```

Cela monte rapidement en valeur. Logique, le coefficient dominant est 2^7 ici. Cela aura une conséquence plus loin.

Puis, on prépare le terrain : on a besoin de *sqrt* , de *pi* et donc de *numpy*. On en profite pour rentrer la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ que l'on appelera *poids*.

```
>>> import numpy as np
>>> def poids(t) :
        return np.sqrt(1 - t ** 2)
```

Puis, on fait une double boucle pour calculer ce que l'on demande :

```
>>> for i in range(9) :
        for j in range(9) :
            if i <= j :
                print('< P' , i , 'Q' , j ,' >=')
                def F(t) :
                    return (2/np.pi) * poids(t) * Np(i, t) * Np(j, t)
                print(trapezes(F, -1, 1, 100))
```

On obtient (on donne ici un morceau choisi par manque de place) :

```
< P0 Q0 >=
0.998941892582
< P0 Q1 >=
4.38538094727e-17
< P0 Q2 >=
-0.00315345107568
< P0 Q3 >=
3.88578058619e-17
< P1 Q1 >=
0.995788441506
< P1 Q2 >=
5.3290705182e-17
< P2 Q7 >=
-3.8635761257e-16
< P2 Q8 >=
-0.0263862512064
```

$< P3\,Q3 > =$
0.983496377077
$< P4\,Q5 > =$
$1.24344978758e-16$
$< P4\,Q6 > =$
-0.0347247875959
$< P8\,Q8 > =$
0.926901657203
On remarque que tous les produits scalaires semblent nuls sauf dans le cas $i = j$, où ils semblent valoir 1. Maintenant, si l'on observe le résultat fourni pour $\langle P_i,\, P_i\rangle$, on remarque que sa valeur s'éloigne peu à peu de 1, en prenant i croissant. Cela est dû au défaut de précision car on a pris $n = 100$ ici pour appliquer *trapezes*, ce qui ne donne pas un résultat très performant. Et on sait que l'erreur est fonction de la dérivée seconde d'une fonction de la forme $t \mapsto \sqrt{1-t^2}P_i(t)^2$, où P_i est un polynôme de degré i de coefficient dominant 2^i, et donc la majoration de l'erreur est assez forte. Ceci dit, on peut conjecturer quand même que

$$\boxed{\text{la famille } (P_i)_{i\in[\![0,8]\!]^2} \text{ est orthonormale pour le produit scalaire } \langle\ ,\ \rangle.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on calcule une intégrale avec Python.

1) On peut calculer des ***valeurs approchées d'intégrales*** en utilisant la fonction *quad* du sous-module *scipy.integrate*. Cette fonction renvoie une valeur approchée de l'intégrale ainsi qu'un majorant de l'erreur commise.
Ainsi pour approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, on tape :
$>>>\ import\ scipy.integrate\ as\ integr\,;\ integr.quad(f,a,b)$
2) On peut utiliser la ***méthode des rectangles*** en tapant :
$>>>\ def\ rectangles(f,a,b,n)\ :$
$\quad h\ =\ (b-a)/float(n)\,;\ z\ =\ 0$
$\quad for\ i\ in\ range(n)\ :$
$\qquad z\ =\ z\ +\ f(a+i*h)$
$\quad return\ h*z$
3) On peut utiliser la ***méthode des trapèzes***.
Les seules différences entre $trapezes(f,a,b,n)$ et $rectangles(f,a,b,n)$ sont d'une part l'initialisation de z qui devient :
$>>>\ z\ =\ 0.5*(f(a)+f(b))$
et d'autre part $range(n)$ qui devient $range(1,n)$.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on crée et on fait des opérations sur les polynômes avec le langage Python.
On peut rentrer un polynôme comme une fonction.
On peut aussi utiliser la fonction *Polynomial* du sous-module *numpy.polynomial* et un certain nombre d'attributs associés. On commence alors par taper :
$>>>\ from\ numpy.polynomial\ import\ Polynomial$
1) Pour ***créer un polynôme***, on liste ses coefficients par ordre de degré croissant.

Ainsi pour $p = a0 + a1X + a2X^2 + a_3X^3$, on tape : $p = Polynomial([a0, a1, a2, a3])$.
L'attribut $coef$ donne accès aux coefficients ordonnés par degré croissant.
Ainsi, si l'on tape : $p.coef$, on obtient $array([a0., a1., a2., a3.])$
On suppose dans la suite de la méthode que p ***a été défini ainsi***.

2) Pour ***calculer la valeur*** $p(a)$, on tape simplement $p(a)$ et pour obtenir $[p(x1), ..., p(xn)]$, on tape : $p([x1, ..., xn])$.

3) $p.coef[i]$ fournit le ***coefficient devant*** X^i.

4) $p.degree(\,)$ donne le ***degré*** et $p.roots(\,)$ les ***racines*** de p.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on fait des changements de variable dans les intégrales. Par exemple, dans $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, on remplace t par $\phi(u)$ et dt par $\phi'(u)\,du$ puis on cherche deux valeurs α et β telles que $\phi(\alpha) = a$ et $\phi(\beta) = b$ et on vérifie que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'extrémités α et β.
Enfin, on écrit alors : $I = \displaystyle\int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)\,du$.

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on montre rapidement qu'un polynôme est nul. Une méthode classique est de remarquer que son nombre de racines est strictement supérieur à son degré, ce qui est toujours le cas s'il possède une infinité de racines.

Formulaire

• *Définition d'un produit scalaire*

Une application $\langle\,,\,\rangle : E^2 \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E, espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'on a à la fois les quatre assertions :

(i) $\forall\,(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ \langle\vec{v}, \vec{u}\rangle = \langle\vec{u}, \vec{v}\rangle$;

(ii) $\langle\,,\,\rangle$ est bilinéaire, c'est-à-dire : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$,

$$\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}\rangle = a\langle\vec{u}, \vec{w}\rangle + b\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle,$$

$$\langle\vec{w}, a\vec{u} + b\vec{v}\rangle = a\langle\vec{w}, \vec{u}\rangle + b\langle\vec{w}, \vec{v}\rangle\ ;$$

(iii) $\forall\,\vec{u} \in E,\ \langle\vec{u}, \vec{u}\rangle \geqslant 0$;

(iv) $\forall\,\vec{u} \in E,\ \left[\langle\vec{u}, \vec{u}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}\right]$.

Le fait de vérifier d'abord (i) permet pour (ii) de ne faire que la linéarité à gauche ou à droite. Il est inutile alors de faire les deux.

• *Définie-positivité de l'intégrale des fonctions continues*

On suppose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, une fonction **continue et positive** sur le segment $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0 \text{ avec égalité si et seulement si } f \text{ est nulle sur } [a, b].$$

Jour n^{o}24

Exercice 24.1 — MPSI-PCSI-PTSI-1TSI-1TPC

Dans cet exercice, on écrira des programmes en langage Python et on pourra utiliser un ordinateur.

On s'intéresse à l'équation différentielle : $y'(t) = t^2 - y^2(t)$, avec $y(1.5) = a$.

1) On suppose $a = 2$. Rappeler la méthode de résolution numérique d'Euler.
Tracer trois représentations de y pour $t \in [1.5, 2.5]$: en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{4}$ puis $h = \frac{1}{8}$ et en utilisant la fonction *odeint*. (On représentera ces trois courbes sur la même dessin.)

2) Faire de même avec $a = 1$.

Exercice 24.2 — MPSI-PCSI

Dans cet exercice, on pourra écrire des programmes en langage Python.

On rappelle qu'un nombre est premier si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. *On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.*

1) Écrire une fonction $divise(p, q)$ d'arguments deux entiers naturels non nuls p et q, renvoyant $True$ si p divise q et $False$ sinon.

2) Écrire une fonction $estpremier(p)$ d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.

3) Déterminer à la main le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p pour tout entier p compris entre 1 et 20.
Écrire une fonction $phi(p)$ d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\phi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Pour la suite de l'exercice, on admettra le résultat suivant : $\phi(n) \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\phi(n)\ln n}{n} - 1\right|$.

- **a)** Calculer $\Theta(n)$ pour $n \in [\![1, 20]\!]$.
- **b)** Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).
- **c)** Avec le résultat admis, prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- **d)** Écrire une fonction $test(epsilon)$ d'argument un réel $\epsilon > 0$, renvoyant le premier entier naturel $N \geqslant 50$ tel que $\Theta(N) \leqslant \epsilon$.
- **e)** Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50, 5000]\!]$.

Énoncé

Dans cet exercice, on écrira des programmes en langage Python et on pourra utiliser un ordinateur.
On s'intéresse à l'équation différentielle : $y'(t) = t^2 - y^2(t)$, avec $y(1.5) = a$.

1) On suppose $a = 2$. Rappeler la méthode de résolution numérique d'Euler.
Tracer trois représentations de y pour $t \in [1.5, 2.5]$: en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{4}$ puis $h = \frac{1}{8}$ et en utilisant la fonction *odeint*. (On représentera ces trois courbes sur la même dessin.)

2) Faire de même avec $a = 1$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice pur Python posé à l'oral de l'ENSAM pour la filière PSI pour la session de 2016.
L'exercice est basé sur la résolution numérique d'une famille d'équations différentielles du premier ordre. L'indéxation porte sur la valeur de la condition initiale. Attention, ces équations différentielles ne sont pas linéaires, donc il n'est pas question de tenter une résolution directe car toute résolution directe d'équation différentielle non linéaire est hors programme. On peut par changement de fonction (indiquée) par exemple parfois se ramener à une équation linéaire mais sans aide, il est hors de question d'essayer. Par contre, Python, soit en utilisant la mise en code de l'algorithme d'Euler, soit en usant de la fonction prédéfinie *odeint*, permet la résolution numérique de toute équation différentielle du premier ordre du type $y'(t) = f(y(t), t)$ avec une condition initiale $y(t_0) = a$, sur $[t_0, t_1]$.

> Rapport du jury ENSAM 2017
>
> Parmi les points à améliorer pour certains candidats, signalons la maîtrise d'« *odeint* » qui n'est pas parfaite dont la syntaxe est pourtant rappelée dans le formulaire.

1) Dans cette première question, on commence par rappeler la méthode d'Euler. Puis, on trace trois approximations de la solution de l'équation différentielle (dans le cas $a = 2$), les deux premières en utilisant une fonction *Euler* « bricolée » par vous-même avec deux pas différents et la dernière avec la fonction prédéfinie *odeint*.

↪ Dans la partie « Techniques à mémoriser », on rappelle comment aborder avec Python la résolution d'une équation différentielle d'ordre 1.

2) Dans cette question, on recommence à tracer mais avec $a = 1$.

↪ L'idée est de remarquer la différence de style des courbes intégrales entre les deux questions.

Corrigé

1) *Rappel de la méthode d'Euler*

On cherche à déterminer une solution approchée de $y'(t) = f(y(t), t)$ valable sur un intervalle donné, c'est-à-dire $t \in [t_0, t_n]$. On suppose la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Pour cela, on choisit une subdivision $(t_0, t_1, ..., t_n)$ de l'intervalle $[t_0, t_n]$ à pas constant h, donc on a l'égalité $h = (t_n - t_0)/n$. Cela se traduit par les égalités :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ t_{k+1} = t_k + h.$$

On définit alors la liste $(y_1, ..., y_n)$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $y_{k+1} = hf(y_k, t_k) + y_k$.
La méthode d'Euler consiste à considérer que si h est petit alors $y(t_k + h)$ est proche de $y(t_k) + hy'(t_k)$, c'est-à-dire de $y(t_k) + hf(y(t_k), t_k)$. Ainsi, pour connaître $y(t_k + h) = y(t_{k+1})$, on doit partir de t_k et de $y(t_k)$ et on suppose qu'entre les points $M_k(t_k, y(t_k))$ et $M_{k+1}(t_{k+1}, y(t_{k+1}))$, la courbe représentative de l'unique solution y reste « proche » de sa tangente au point t_k.

Élaboration d'une procédure Python utilisant l'algorithme d'Euler

Écrivons une fonction *Euler* qui prend en argument f, $t0$, tn, n et $y0$. On créera dans une boucle la liste T des abscisses et celle Y des valeurs prises par la solution y aux points considérés. On renverra Y.

```
>>> def Euler(f, t0, tn, n, y0) :
        h = (tn − t0)/float(n) ; t = t0 ; y = y0
        T = [t0] ; Y = [y0]
        for k in range(n) :
            y = y + h ∗ f(y, t) ; t = t + h ; T.append(t) ; Y.append(y)
        return Y
```

Terminons par un exemple.
Appliquons à $(t+1)y'(t) + y(t) = \cos t$ pour $t \in [0, 10]$ avec $y(0) = 1$ et $n = 10$. On tape alors (*numpy* est importé en prévision de l'apparition de cos dans l'exemple) :

```
>>> import numpy as np
>>> def f(x, t) : return (np.cos(t) − x)/(t + 1)
>>> Euler(f, 0, 10, 10, 1)
array([1. , 1. , 0.77015115 , 0.37471849 , 0.03354074 ,
−0.10389613 , −0.03930308 , 0.10347883 , 0.1847176 , 0.1480808378, 0.04216238])
```

Procédure affichant les courbes intégrales demandées par la méthode d'Euler

L'idée est d'écrire une fonction *Euler_Affich* de mêmes arguments qu'Euler et qui doit renvoyer l'affichage de la courbe reliant les points calculés.

On commence par taper les packages utiles. Puis la fonction *EulerAffich* et enfin on tape f (issue de l'équation différentielle de l'énoncé).

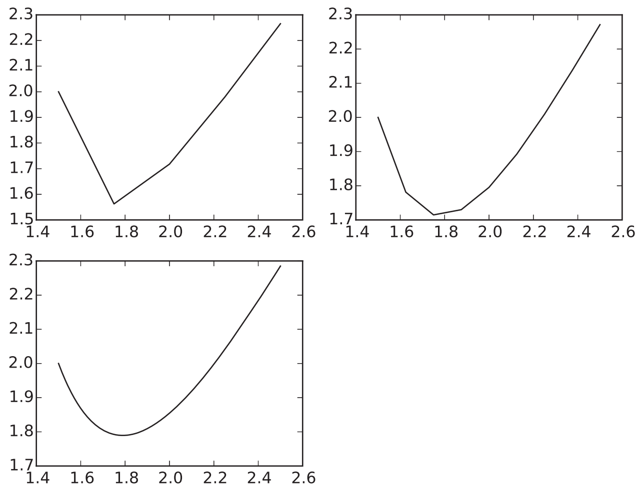
```
>>> import numpy as np ; import matplotlib.pyplot as plt
>>> import scipy.integrate as integr
>>> def EulerAffich(f, t0, tn, n, y0) :
        h = (tn − t0)/float(n) ; t = t0 ; y = y0
        T = [t0] ; Y = [y0]
        for k in range(n) :
            y = y + h ∗ f(y, t) ; t = t + h
            T.append(t) ; Y.append(y)
        plt.plot(T, Y, color =' 0' )
>>> def f(x, t) : return(t ∗ ∗2 − x ∗ ∗2)

>>> TT = np.arange(1.5, 2.5, 0.00001) ; YY = integr.odeint(f, 2, TT)
```

Par commodité, pour gagner de la place, on utilise *plt.subplot*.
Ce n'est absolument pas obligatoire pour vous.

$>>>$ $plt.subplot(221)$; $EulerAffich(f, 1.5, 2.5, 4, 2)$; $plt.subplot(222)$; $EulerAffich(f, 1.5, 2.5, 8, 2)$; $plt.subplot(223)$; $plt.plot(TT, YY)$

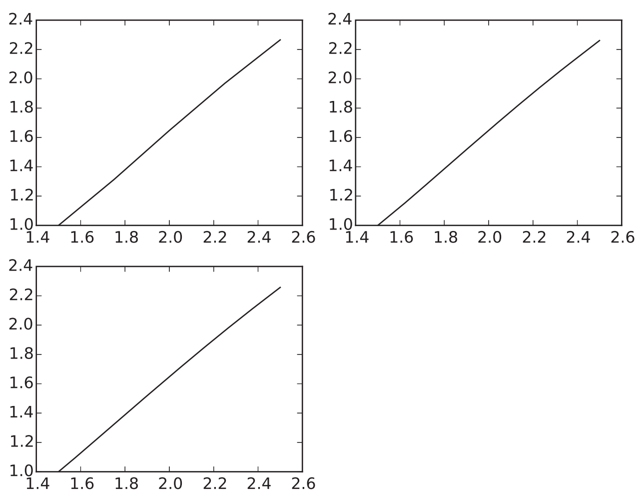
Le premier graphe en haut à gauche est *Euler* avec $h = 1/4$, puis le second en haut à droite est *Euler* avec $h = 1/8$ et celui du bas à gauche est *odeint* avec $h = 0,00001$.



2) Le cas $a = 1$ se fait sans problème car on a déjà fait le code. On remarquera que la courbe semble ici linéaire. Attention, on remplace YY par YYY (pour changer a dans *odeint*). On tape :

$>>>$ $TT = np.arange(1.5, 2.5, 0.00001)$; $YYY = integr.odeint(f, 1, TT)$
$>>>$ $plt.subplot(221)$; $EulerAffich(f, 1.5, 2.5, 4, 1)$; $plt.subplot(222)$; $EulerAffich(f, 1.5, 2.5, 8, 1)$; $plt.subplot(223)$; $plt.plot(TT, YYY)$

Le premier graphe en haut à gauche est *Euler* avec $h = 1/4$, puis le second en haut à droite est *Euler* avec $h = 1/8$ et celui du bas à gauche est *odeint* avec $h = 0,00001$.



Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la manière d'utiliser la fonction *odeint* du sous-module *scipy.integrate*.
Cette fonction nécessite une liste de valeurs de t, commençant en t_0 et une condition initiale y_0. La fonction *odeint* renvoie des valeurs approchées (aux points contenus dans la liste des valeurs de t) de la solution y de l'équation différentielle qui vérifie $y(t_0) = y_0$. Plus précisément, si l'on désire les solutions pour $t \in [t_0, t_n]$ avec un pas h, on tape :

$>>>$ *import scipy.integrate as integr* ; *def* $f(y, t)$: *return expression*
$>>>$ $T = np.arange(t0, tn, h)$; $Y = integr.odeint(f, y0, T)$

Y renvoyé est un tableau dont chaque ligne correspond à la valeur d'une fonction à un instant donné. Ainsi $Y[0]$ renvoie y_0 et $Y[-1]$ renvoie $y(t_1)$. On tape alors :
$>>>$ $plt.plot(T, Y)$; $plt.show(\,)$
On a le tracé de la courbe intégrale.

♡ Il faut se souvenir que si l'on choisit une subdivision $(t_0, t_1, ..., t_n)$ de l'intervalle $[t_0, t_n]$ à pas constant h, alors on a l'égalité $h = (t_n - t_0)/n$.

Formulaire

• *Équation de la tangente en a au graphe d'une fonction dérivable*
Soit f une fonction dérivable en a, alors la tangente au graphe représentant f au point de composantes $(a, f(a))$ a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Énoncé

Dans cet exercice, on pourra écrire des programmes en langage Python. On rappelle qu'un nombre est premier si et seulement s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. *On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.*

1) Écrire une fonction $divise(p, q)$ d'arguments deux entiers naturels non nuls p et q, renvoyant $True$ si p divise q et $False$ sinon.

2) Écrire une fonction $estpremier(p)$ d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.

3) Déterminer à la main le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p pour tout entier p compris entre 1 et 20.
Écrire une fonction $phi(p)$ d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\phi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Pour la suite de l'exercice, on admettra le résultat suivant : $\phi(n) \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\phi(n)\ln n}{n} - 1\right|$.

a) Calculer $\Theta(n)$ pour $n \in [\![1, 20]\!]$.

b) Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).

c) Avec le résultat admis, prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers.

d) Écrire une fonction $test(epsilon)$ d'argument un réel $\epsilon > 0$, renvoyant le premier entier naturel $N \geqslant 50$ tel que $\Theta(N) \leqslant \epsilon$.

e) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50, 5000]\!]$.

Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici d'un exercice pur Python posé à l'écrit du Concours Arts et Métiers Paris Tech-ESTP-POLYTECH à la filière PC en 2017.
On étudie ici les nombres premiers, on commence par créer des fonctions Python permettant de les détecter, puis de les compter. Enfin, à l'aide d'un résultat admis, on va s'intéresser à la fréquence d'apparition des nombres premiers. Et on va visualiser tout cela grâce à Python.

1) On commence par créer une fonction *divise* qui permet de tester si deux nombres entiers sont multiples l'un de l'autre ou non.
Cette fonction aidera pour créer celle de la question **2)**.

$\hookrightarrow$ On peut utiliser la fonction prédéfinie %

2) On crée maintenant une fonction *estpremier* qui teste si un nombre est premier ou non. Encore une fois cette procédure sera utilisée dans la création de celle de la question suivante.

$\hookrightarrow$ La commande principale pourra être : « $if\ divise(d,p)\ ==\ True$ » avec d la variable de la boucle de 2 à p.

3) On commence à s'intéresser dans cette question au nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à un entier donné. On commence à faire cela à la main (ce sera juste pour contrôler ce que vous allez faire avec Python) puis on crée encore une fonction Python (sous forme d'un compteur) pour faire ce calcul.

$\hookrightarrow$ On utilise dans phi la procédure $estpremier$.
On rappelle que la commande « $if\ estpremier(n)\ ==\ 1$ » signifie que n est premier.

4) L'idée de la question est de tracer une fonction notée Θ qui permet de mesurer l'erreur commise en assimilant le nombre $\phi(n)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à n et la quantité $\ln n/n$, qui donne (admis) un équivalent de $\phi(n)$ quand n tend vers $+\infty$. Bien entendu, $\Theta(n)$ doit tendre vers 0 mais l'idée est de le visualiser en utilisant les valeurs de $\Theta(n)$ sur un intervalle d'entiers.

> Rapport du jury ENSAM 2017
>
> Pour le tracé des termes d'une suite, les candidats ont souvent du mal à retrouver comment ne pas relier les points. Il y a aussi parfois des difficultés pour le tracé d'une courbe (construction de la liste des ordonnées). La construction de listes par compréhension peut faire gagner du temps.

a) On commence par calculer $\Theta(n)$ jusqu'à $n = 20$.
On utilise la procédure phi construite à la question **3)**.

$\hookrightarrow$ On rappelle que abs fournit la valeur absolue et que $np.log$ est le logarithme népérien si l'on a introduit $numpy\ as\ np$.

b) On demande ici la définition de deux suites équivalentes, c'est un prétexte pour faire un peu de cours mais aussi pour comprendre le lien entre Θ et ϕ.

$\hookrightarrow$ On ne doit pas hésiter sur ce type de question.

c) On veut montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. Plusieurs pistes sont envisageables (c'est une question de cours dans beaucoup de MPSI) mais ici, on vous propose d'utiliser le fait que $\phi(n) \sim \frac{\ln n}{n}$ quand n est grand.

$\hookrightarrow$ On peut penser à un raisonnement par l'absurde.

d) On a remarqué que $\Theta(n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On sait d'après la définition d'une limite d'une suite que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel $\Theta(n) < \epsilon$. On crée une procédure Python qui détermine ce rang N (en le prenant supérieur ou égal à 50).

$\hookrightarrow$ On pourra faire une boucle $while$.

e) Il reste à visualiser Θ sur un ensemble de valeurs de n. Il faut créer une liste X des abscisses et Y des ordonnées avec $range$. Allez voir dans la partie « Techniques à mémoriser » comment on trace des courbes.

$\hookrightarrow$ Dans le corrigé, on a utilisé l'option pas à pas de $range$. Vous n'étes pas obligés de faire de même.

Corrigé

1) Écrivons une fonction $divise(p, q)$ d'arguments deux entiers naturels non nuls p et q, renvoyant $True$ si p divise q et $False$ sinon.

```
>>> def divise(p,q) :
        if q % p == 0 :
            return True
        return False
```

Remarque

Attention à ne pas écrire $p\,\%\,q$ à la place de $q\,\%\,p$ dans la procédure.

2) Écrivons une fonction *estpremier*(p) d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon. On tape :

```
>>> def estpremier(p) :
        if p == 1 :
            return 0
        if p == 2 :
            return 1
        for d in range(2,p) :
            if divise(d,p) == True :
                return 0
        return 1
```

Un essai nous démange !

```
>>> estpremier(217), estpremier(223)
0 1
```

3) Déterminons à la main (donc à l'ancienne !) le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p pour tout entier p compris entre 1 et 20. On commence par rappeler tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 20.

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\,,17,\ 19$$

Si l'on note ϕ la fonction qui à un entier associe le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à cet entier, alors :

$$\phi(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 1 \\ 1 & \text{si} \quad n = 2 \\ 2 & \text{si} \quad n \in [\![3,4]\!] \\ 3 & \text{si} \quad n \in [\![5,6]\!] \\ 4 & \text{si} \quad n \in [\![7,10]\!] \\ 5 & \text{si} \quad n \in [\![11,12]\!] \\ 6 & \text{si} \quad n \in [\![13,16]\!] \\ 7 & \text{si} \quad n \in [\![17,18]\!] \\ 8 & \text{si} \quad n \in [\![19,20]\!] \end{cases}$$

Écrivons maintenant en Python une fonction *phi*(p) d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p. On tape :

```
>>> def phi(p) :
        compt = 0
        for n in range(1,p+1) :
            if estpremier(n) == 1 :
                compt = compt + 1
        return compt
```

Donnons quelques valeurs :

$>>>$ $phi(20),\ phi(100),\ phi(1000),\ phi(10000),\ phi(30000)$

8 25 168 1229 3245

4) a) On veut calculer $\Theta(n)$ pour $n \in [\![1, 20]\!]$. On tape :

```
>>> import numpy as np
>>> def theta(n) :
        return abs(phi(n) * np.log(n)/n - 1)
```

On tape alors :

```
[theta(n) for n in range(1,21)]
```

[1.0, 0.6534264097200273, 0.267591807554593344,
... 0.23976378070165905, 0.19829290942159639]

(On a affiché par commodité pour $n = 1, 2, 3$ puis $n = 19$ et $n = 20$.)

Comme on est curieux, on tape aussi :

$>>>$ $theta(100),\ theta(1000),\ theta(5000)$

0.15129254649702295 0.16050288686899999905 0.1396004490114926

b) Rappelons la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul). On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Remarque

On peut aussi dire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$.

c) Le résultat admis dit que : $\phi(n) \sim \dfrac{n}{\ln(n)}$ quand n tend vers $+\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty$, $\phi(n)$ tend aussi vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Si le nombre de nombres premiers était fini, ϕ aurait une limite finie. Ce n'est pas le cas.

$$\boxed{\text{Ainsi, il existe une infinité de nombres premiers.}}$$

d) Écrivons une fonction $test(epsilon)$ d'argument un réel $epsilon$ strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geqslant 50$ tel que $\Theta(N) \leqslant \epsilon$.
On tape :

```
>>> def test(epsilon) :
        N = 50
        while theta(N) > epsilon :
            N = N + 1
        return(N)
```

Faisons quelques tests (c'est le cas de le dire !) :

$>>>$ $test(0.20),\ test(0.13),$

50 58

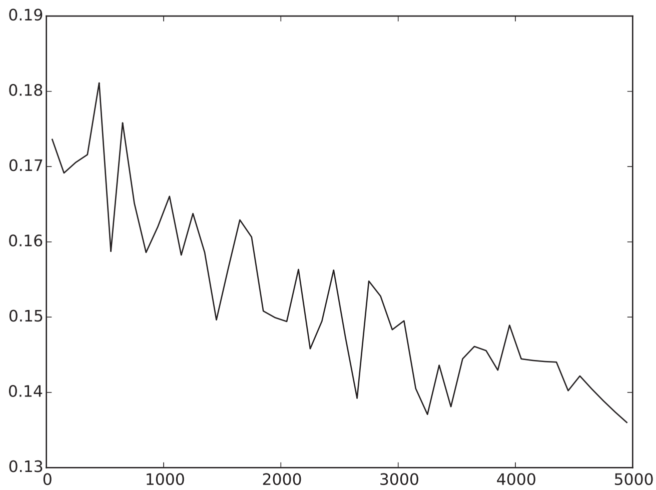
Comme on commence au seuil de $N = 50$ (c'est l'énoncé qui décide), $test(0.20)$ donne 50 mais on atteint cette précision bien avant. Par contre, si l'on tape $test(0.1)$ par exemple, on a du mal à aboutir car la valeur de N est très grande.

En fait, θ tend vers 0 lentement.

e) Donnons une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50, 5000]\!]$. On ne peut pas utiliser *linspace* pour la liste X des abscisses et poser ensuite $Y = theta(X)$. Cela ne fonctionne pas. On peut créer alors une liste X et une liste Y avec une boucle for. On pourrait taper :

$>>>\ X\ =\ [n\ for\ n\ in\ range(50, 5001)]$
$>>>\ Y\ =\ [theta(n)\ for\ n\ in\ range(50, 5001)]$
Sur le papier, c'est très bien. Le problème se trouve dans la longueur des calculs des différents $\theta(n)$. On va « arranger » X et Y avec l'option pas à pas de *range*. Un pas de 100 permet un calcul de Y en moins d'une minute. Cela devient raisonnable.
On tape alors :

$>>>$ *import matplotlib.pyplot as plt*
$>>>\ X\ =\ [n\ for\ n\ in\ range(50, 5001, 100)]$
$>>>\ Y\ =\ [theta(n)\ for\ n\ in\ range(50, 5001, 100)]$
$>>>\ plt.plot(X, Y, color =' \ 0')\ ;\ plt.show(\,)$



Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on manipule des entiers avec Python.

1) $range(n)$ donne les entiers de 0 à $n-1$, $range(a, b)$ donne les entiers compris entre a (compris) et b (non compris), $range(a, b, p)$ donne les entiers compris entre a et b avec un pas de p et $range(n, i, -1)$ pour $i < n$, donne les entiers de $i+1$ à n dans l'ordre décroissant.

2) $a\,//\,b$ donne le quotient dans la division euclidienne de a par b.
Ainsi $a\,//\,n$ donne $\frac{a}{n}$.

3) $a\,\%\,b$ donne le reste dans la division euclidienne de a par b.
Ainsi $a\,\%\,b\ ==\ 0$ signifie que a est un multiple de b.

4) Pour écrire $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, on peut utiliser une boucle.
Par exemple, traitons le cas $n = 5$ et $a_k = k^2$, pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$.

$>>> \ S = 1**2$
$>>> \ for\ k\ in\ range(2, 6)$:
$\qquad S \ += \ k**2$
$>>> \ S$
Ou alors on utilise la fonction prédéfinie *sum*. Dans ce cas, on tape :
$>>> \ S = sum(k**2\ for\ k\ in\ range(1, 6))$; S
Rappelons au passage que si les a_k sont directement donnés sous forme d'une liste L, la commande $sum(L)$ donne S.

5) Pour écrire $P = \prod_{k=1}^{n} a_k$, on peut utiliser encore une boucle comparable à celle de la somme mais on remplace $S+=$ par $P*=$

♡ Il faut se souvenir de la façon dont on trace une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ avec Python. On rentre préalablement *numpy* (d'alias *np*) et *matplotlib.pyplot* d'alias *plt*.
1) Si l'on a besoin de $+\infty$, $(-\infty)$, on tape $np.inf\ (-np.inf)$.
2)Pour ***tracer une ligne de segments brisés***, par exemple on veut relier les points $A0(x0, y0)$ à $An(xn, yn)$, on tape :
$>>> \ plt.axis('equal')$; $plt.plot([x0, ..., xn], [y0, ..., yn])$
$>>> \ plt.grid(\,)$; $plt.show(\,)$
3) Pour ***tracer le graphe de*** f ***pour*** $x \in [a, b]$ ***définie explicitement***, on définit d'abord une liste d'abscisses X avec *np.arange* en rentrant les deux extrémités a et b et le pas h ou avec *np.linspace* en rentrant a, b et le nombre de points p. Puis, on rentre la liste Y des images des éléments de X. Et on utilise *plot* et *show* du sous module *matplotlib.pyplot*. On tape
$>>> \ X = np.arange(a, b, h)$; $Y = [\,f(x)\ for\ x\ in\ X\,]$
$>>> \ plt.plot(X, Y)$; $plt.show(\,)$
Remarque : on peut taper $Y = f(X)$ à la place de $Y = [\,f(x)\ for\ x\ in\ X\,]$.
4) Si la liste des abscisses est constituée des entiers entre p et n, pour tracer $y = f(x)$, on peut utiliser la syntaxe $X = list(range(p, n+1))$ et $Y = [f(j)\ for\ j\ in\ X]$.

Formulaire

• *Définition d'un nombre premier et propriétés*

On appelle **nombre premier** tout entier naturel $p \geqslant 2$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$ sont 1 et p lui-même. Un entier naturel $n \geqslant 2$ qui n'est pas premier est dit **composé**. Dans ce cas, il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ avec $1 < k < n$ tel que k divise n.
Tout entier $n \geqslant 2$ admet au moins un diviseur premier.
Décomposition primaire d'un entier : soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Il existe un entier $N \geqslant 1$, des nombres premiers $p_1 < ... < p_N$, des entiers naturels non nuls α_1, ..., α_N **uniques** tels que : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_N^{\alpha_N}$.

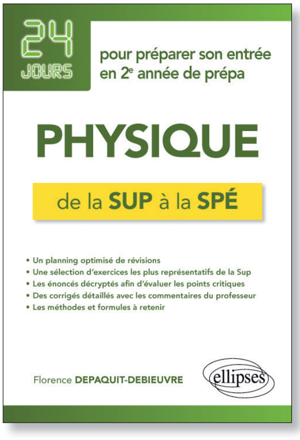
• *Définition de suites équivalentes*

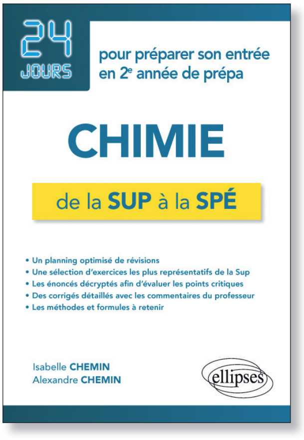
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels, telles que les termes v_n sont non nuls à partir d'un certain rang n_0. On dit que u est **équivalente** à v, et on note $u_n \sim v_n$, si la suite (u_n/v_n) est convergente, de limite 1.
On a l'équivalence : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.

La collection « 24 jours pour préparer son entrée en 2e année de prépa » vous assure des révisions solides entre la Sup et la Spé grâce au planning de travail fourni par les auteurs expérimentés. Ce planning est fondé sur 24 séances de travail permettant de balayer le programme de Sup. Durant chaque séance, vous vous exercez sur un sujet puis vous vous consacrez à une analyse minutieuse de tout l'ensemble du corrigé (analyse de l'énoncé, corrigé détaillé, techniques à mémoriser, formulaire et nombreux extraits des rapports de jurys).

Cette collection vous permet donc, dès la fin de la Sup, de vous préparer efficacement aux concours d'entrée dans les Grandes Écoles.

Dans la même collection





www.editions-ellipses.fr
9 782340 030916