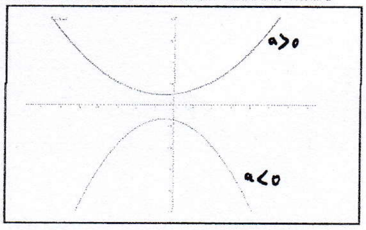
IDENTITES REMARQUABLES ET FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRE 2

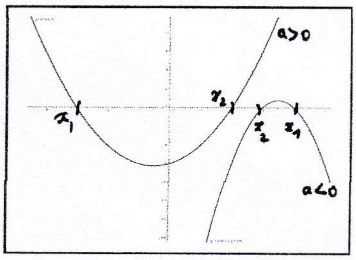
Identités remarquables (<u>valables dans $\mathbb{C}$</u>): Pour tous réels (resp. complexes) a et b et c ,
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (pas de formule simple pour développer $(a+b+c)^3$)
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Conséquences : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$1 - a^3 = (1-a)(a^2 + a + 1)$

Fonction polynomiale de degré 2 : Factorisation , signe et représentation .
Soient a, b et c trois réels tels que a non nul.
On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$ (fonction polynomiale de degré 2 à coefficients réels).
On note (E) l'équation $P(x) = 0$. Par définition , les solutions de (E) sont les racines de P.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé le discriminant de P et de (E). Alors ,
pour tout réel x , $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ $(forme\ canonique\ de\ P)$. P admet un extremum qui est atteint en $-\frac{b}{2a}$ $(= \frac{x_1+x_2}{2}$ = la moyenne des racines de P) et la courbe de P est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$. De plus,

<u>**Si $\Delta < 0$**</u> , alors $\Delta = \delta^2$ tel que $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ et (E) n'admet aucune solution réelle .(E) admet deux solutions qui sont complexes conjuguées et qui valent $x_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ .Pour tout réel x , $P(x)$ est du signe strict de a . La fonction P a pour graphe :



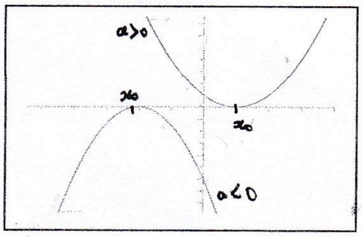
<u>**Si $\Delta > 0$**</u> , alors $\Delta = \delta^2$ tel que $\delta = \sqrt{\Delta}$ et(E) admet deux solutions distinctes qui sont réelles et qui valent : $x_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ .Pour tout réel x , $P(x)$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$$(forme\ scindée\ de\ P)$ et P est du signe de a en dehors du segment d'extrémités x_1 et x_2. La fonction P a pour graphe :



<u>**Si $\Delta = 0$**</u> , alors $\Delta = \delta^2$ tel que $\delta = 0$ et (E) admet une unique solution (dite solution double) qui est réelle et qui vaut :

$$x_0 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{-b}{2a} = x_1 = x_2.$$

Pour tout réel x , $P(x) = a(x-x_0)^2$ $(forme\ scindée\ de\ P)$ et $P(x)$ est du signe de a . La fonction P a pour graphe :



Enfin , dans les trois cas, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.