

Exponentielle et logarithme

Terminale S



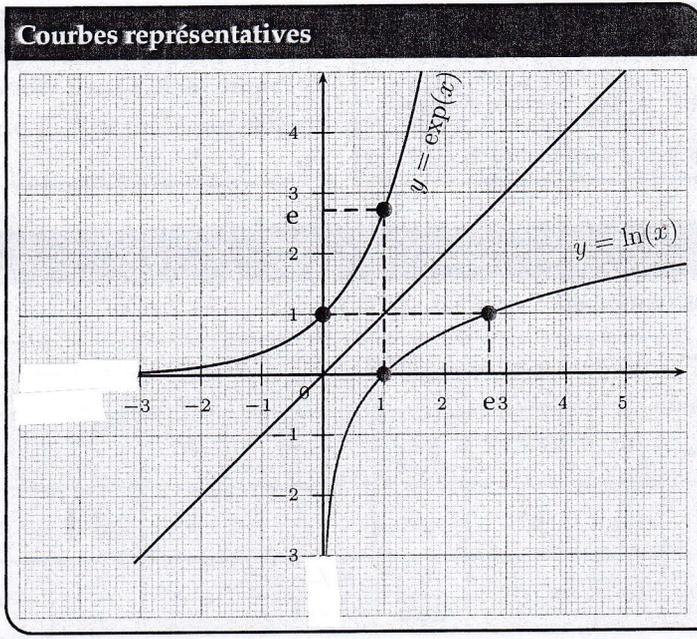
Fonction exponentielle

$f(x) = \exp(x) = e^x$
 définie sur \mathbb{R}
 à valeurs dans $]0; +\infty[$

$e^0 = 1$
 $e^1 = e \approx 2,718$

$(e^x)' = e^x$
 $(e^u)' = u'e^u$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$



Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$
 définie sur $]0; +\infty[$
 à valeurs dans \mathbb{R}

$\ln(1) = 0$
 $\ln(e) = 1$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
 $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

Propriétés des exponentielles

a, b et n sont des réels :

- ◇ Produit : $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- ◇ Inverse : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- ◇ Quotient : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- ◇ Puissance : $(e^a)^n = e^{an}$
- ◇ Racine carrée : $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Propriétés des logarithmes

a et b sont des réels strictement positifs, n est un réel :

- ◇ Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- ◇ Inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ◇ Quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ◇ Puissance : $\ln(a^n) = n \ln(a)$
- ◇ Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Lien exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle (de base e) et la fonction logarithme (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

- ◇ $\ln(\exp x) = x$ $\ln(e^x) = x$
- ◇ $\exp(\ln x) = x$ $e^{\ln(x)} = x$
- ◇ $\exp x = y \iff x = \ln(y)$ $e^x = y \iff x = \ln(y)$
- ◇ $x^y = \exp(y \ln(x))$ $x^y = e^{y \ln(x)}$

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

u, v sont des réels, λ est un réel strictement positif :

- ◇ $e^u = e^v \iff u = v$ $e^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$
- ◇ $e^u > e^v \iff u > v$ $e^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$
- ◇ $e^u \leq e^v \iff u \leq v$ $e^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$
- ◇ $e^u \leq 0$ impossible et $e^u > 0$ toujours vrai

Équations et d'inéquations avec des logarithmes

u, v sont des réels strictement positifs, λ est un réel :

- ◇ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$ $\ln(u) = \lambda \iff u = e^\lambda$
- ◇ $\ln(u) > \ln(v) \iff u > v$ $\ln(u) > \lambda \iff u > e^\lambda$
- ◇ $\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v$ $\ln(u) \leq \lambda \iff u \leq e^\lambda$
- ◇ $\ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1$ et $\ln(u) > 0 \iff u > 1$

Croissance comparée et limites particulières

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$