Nombres complexes

Terminale S

N. Daval

Forme algébrique

$$z = a + ib$$

- ✧ $i^2 = -1$
- ✧ $a = \mathfrak{Re}(z) \rightarrow$ partie réelle
  $b = \mathfrak{Im}(z) \rightarrow$ partie imaginaire
- ✧ Conjugué : $\overline{z} = a - ib$
- ✧ $\mathbb{C}$ = {nombres complexes}

Forme trigonométrique

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

- ✧ Module :
  $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$
- ✧ Argument :
  $\arg(z) = \theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[\,2\pi]$
  $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$

Forme exponentielle

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

- ✧ $r = |z| > 0$
- ✧ $\theta = \arg(z)$
- ✧ $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- ✧ $\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

i et $-i$ sont les deux solutions de l'équation $z^2+1=0$ d'inconnue z complexe.

Représentation graphique

$1 = e^{i0}$

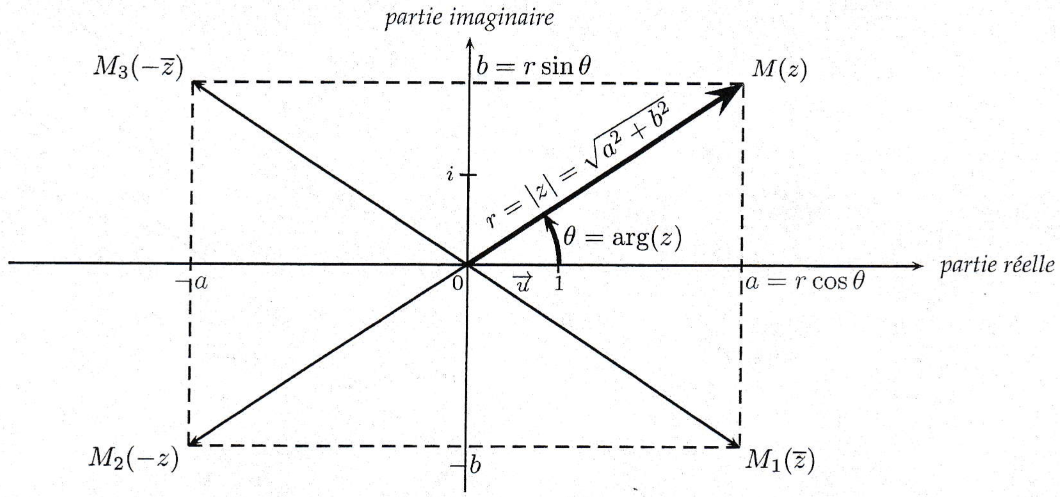
$-1 = e^{i\pi}$

$i = e^{i\pi/2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\pi/4}$

$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) = e^{i\frac{\pi}{3}}$



Propriétés du conjugué

- ✧ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- ✧ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- ✧ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- ✧ $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- ✧ $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- ✧ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- ✧ $z = 0 \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$

Propriétés du module/argument

- ✧ $|-z| = |\overline{z}| = |z|$
- ✧ $|zz'| = |z|\,|z'|$
- ✧ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- ✧ $|z^n| = |z|^n$
- ✧ $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- ✧ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- ✧ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

Propriété de l'exponentielle

- ✧ $r\mathrm{e}^{i\theta} \times r\mathrm{e}^{i\theta'} = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$
- ✧ $\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$
- ✧ $\dfrac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$
- ✧ $\dfrac{r\mathrm{e}^{i\theta}}{r'\mathrm{e}^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$
- ✧ $\overline{r\mathrm{e}^{i\theta}} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$

Lien complexes-géométrie

- ✧ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$
- ✧ $|z - z_A| = r$: cercle de centre A de rayon r
- ✧ $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$
- ✧ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- ✧ $\arg(z - z_A) = \theta\,[2\pi]$: demi-droite d'origine A d'angle θ
- ✧ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- ✧ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- ✧ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Lien complexes-trigonométrie

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$

Lien complexes-second degré

$az^2 + bz + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$

- ✧ $\Delta > 0$: 2 racines réelles $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- ✧ $\Delta = 0$: 1 racine double $\dfrac{-b}{2a}$
- ✧ $\Delta < 0$: 2 racines conjuguées $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$