Exercices d'entraînement facultatifs

Exercice 72

Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une fraction irréductible.

$$F_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{11}{9} \qquad F_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{2}{15} \qquad F_3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right)$$

$$F_4 = \left(-\frac{13}{20} - \left(\frac{12}{15} - \frac{3}{4}\right)\right) - \left(\frac{7}{20} + \left(\frac{9}{4} - \frac{15}{21}\right)\right) \qquad F_5 = \frac{7}{48} - \frac{5}{42} \qquad F_6 = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}$$

$$F_7 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \qquad F_8 = \frac{1 + \frac{3}{32} + \frac{1}{3} \times \frac{15}{8}}{\frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{8}} \qquad F_9 = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{51}}{\frac{4}{9}}$$

Exercice 73

Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une unique fraction dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas eux-mêmes constitués de fractions. On développera et on réduira les numérateurs et les dénominateurs. Dans ces calculs, on suppose avoir choisi les deux complexes a et b de telle sorte que les dénominateurs apparaissant soient non nuls.

$$F_1 = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{a+b} \qquad F_2 = \frac{b + \frac{1}{a}}{a + \frac{1}{b}} \qquad F_3 = \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \qquad F_4 = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}$$

$$F_5 = \frac{\frac{a}{b} - 2}{\frac{b}{a} + \frac{1}{2}} \qquad F_6 = \frac{1}{a + \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}} \qquad F_7 = 1 - \frac{1 - \frac{a}{a+b}}{\frac{a+b}{a} - 1}$$

Exercice 74 

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-3/2\}$, $\dfrac{2x}{3+2x} = \dfrac{? \times x}{x+?}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{3/4\}$, $\dfrac{3+4x}{3-4x} = ? \times \dfrac{x+?}{x+?}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{2x+1}{3x-3} = ? \times \dfrac{x+?}{x+?}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{-1/3, 0\}$, $\dfrac{2x+1}{3x+1} = ? \times \dfrac{1 + \frac{?}{x}}{1 + \frac{?}{x}}$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{3/2\}$, $\dfrac{3x-1}{2x-3} = \dfrac{? \times (2x-3) + ?}{2x-3}$.

Exercice 75

Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une puissance de 10.

$$A_1 = \frac{10^{-2} \times 10^{-5}}{(10^3)^2} \qquad A_2 = \frac{\left((10^3)^{-2} \times (10^4)^3\right)^2}{(10^2)^5} \qquad A_3 = \frac{1000 \times 100^2}{(10^{-2})^{-3}} \qquad A_4 = \frac{(0.1 \times 10^3)^2 \times 100}{(100 \times 10^{-3})^3 \times 1000}$$

Exercice 76

Écrire chacun des nombres qui suit sous forme d'une fraction irréductible.

$$A_1 = \frac{(2^5)^3 \times 8^{-2}}{(4 \times 3)^3} \qquad A_2 = \frac{6^{-5} \times (12^3)^2}{9 \times 4^3} \qquad A_3 = \frac{(-5)^4 \times 10^{-5}}{(-2)^{-7}}$$

$$A_4 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 + 2\left(\frac{-3}{4}\right)^3 \qquad A_5 = \frac{10^{-5} \times (10^3)^7}{2^{-4} \times (2^5)^2}$$

Exercice 77

Soit m et n deux entiers, et a et b deux complexes. Trouver une écriture plus simple de chacun des nombres qui suit. Dans ces calculs, on suppose avoir choisi les deux complexes a et b de telle sorte que les dénominateurs apparaissant soient non nuls.

$$A_1 = \frac{(a^n)^3 + (a^2)^n}{1 + a^n} \qquad A_2 = \frac{a}{b^{1-n}} \times \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^n \times \left(\frac{a}{a-b}\right)^{n+1} \qquad A_3 = \frac{a^{m+n} \times (ab^n)^m}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^m \times (ab^m)^n}$$

$$A_4 = (a^2)^n \times \frac{\left(1 + \frac{1}{b}\right)^n}{(a + ab)^n}$$

Exercice 78

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$, $\dfrac{2}{(3x+2)^2} = \dfrac{?}{(x+?)^2}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2/3\}$, $\dfrac{2}{(3x+2)^2} = \dfrac{?}{(?x+1)^2}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{(2x+1)^2}{(3x^2+1)^3} =? \times \dfrac{(x+?)^2}{(x^2+?)^3}$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + x^3)^3 = x^?(1+x)^?$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{1-2x}{3}\right)^3 =? \times (x-?)^3$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\left(\dfrac{x-2}{x^2+2}\right)^3 = x^? \times \left(\dfrac{1-2x^{-1}}{1+2x^{-2}}\right)^3$.

Exercice 79

Soit x, y et z trois complexes. Développer et réduire les expressions qui suivent.

$$A_1 = (2x-y)(x+2y) \qquad A_2 = (2x+1)(3-x)(x+2) \qquad A_3 = (x+2y)^2 - (2xy-1)^2 + 4x(x-2y)$$

$$A_4 = (x+y+z)^2 \qquad A_5 = (-x+y-1)(x-y-1) \qquad A_6 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + \frac{(1+2y)^2}{4} - (x-y)^2$$

Exercice 80

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout complexe x variant dans l'ensemble précisé. Les rationnels placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $2x(? \times x - 1) + 3x(x-?) + x = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{2x+1}{x-1} =? + \dfrac{?}{x-1}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1/2, -1\}$, $\dfrac{1}{(x+1)(2x-1)} = \dfrac{?}{x+1} + \dfrac{?}{2x-1}$.

Exercice 81

Dans chacune des questions qui suit, x, y et z sont des complexes. On ne demande pas d'effectuer des développements complets des expressions considérées. L'objectif est de ne déterminer que le terme demandé sans écrire le développement complet.

1. Déterminer le terme en x de $(2x-3)(4-x)$.
2. Déterminer le terme en x de $(2x+1)(x-3)(3x-1)$.
3. Déterminer le terme en x^3 de $(x+1)(x^2+2x+1)(4x^2+1)$.
4. En notant a un complexe, déterminer le terme en x^2 de $(2x-1)(3x^2+ax+1)$; il dépend évidemment de a.
5. Déterminer le terme en xyz de $(x+y+z)^3$

Exercice 82

Soit x un complexe. Mettre sous forme canonique les expressions qui suivent.

$$A_1 = x^2+4x+1 \qquad A_2 = 4x^2+5x-2 \qquad A_3 = 3-x-9x^2$$
$$A_4 = 2x^2-5 \qquad A_5 = 4x^2+x \qquad A_6 = 3x^2-6x-2$$

Exercice 83

Déterminer les points d'annulation de chacune des fonctions polynomiales de degré 2 qui suit.

$$f_1 : x \mapsto 2x^2+2x-3 \qquad f_2 : x \mapsto 4x^2+4x-3 \qquad f_3 : x \mapsto 2x^2-x-1$$
$$f_4 : x \mapsto 36x^2-1 \qquad f_5 : x \mapsto 3x^2+2x-1 \qquad f_6 : x \mapsto 2-x-6x^2$$

Exercice 84

Soit x et y deux complexes. Factoriser chacune des expressions qui suit.

$$A_1 = 4x-4-x^2 \qquad A_2 = 6x^3-x^2-9x^4$$
$$A_3 = 48yx^6-75yx^2 \qquad A_4 = 16(x+1)^2-25$$
$$A_5 = x^2-14x+49 \qquad A_6 = 4x^2y^4-4xy^2+1$$
$$A_7 = xy-x-y+1 \qquad A_8 = -10x^4-5x^3-25x^2$$
$$A_9 = 16(2x+1)^2-y^2+2y-1 \qquad A_{10} = y^2+x+y+xy$$
$$A_{11} = (x^2-9)(x+2)-9+(x+1)(x-3)+x^2 \qquad A_{12} = (4x^2-1)^2-(4x^2+4x+1)(x+1)^2$$
$$A_{13} = 9x^2+4y^2-12xy+9x-6y \qquad A_{14} = (x-y)^2+4xy-x-y$$
$$A_{15} = (5-2x)(3+4x)+6+8x-(4x+3)(2x-5)$$

Exercice 85

Soit x et y deux complexes. Écrire chacun des nombres qui suit sous la forme d'une unique fraction dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas eux-mêmes constitués de fractions et sont factorisés. Dans ces calculs, on suppose avoir choisi les complexes x et y de telle sorte que les dénominateurs apparaissant soient non nuls.

$$F_1 = \frac{3}{2x+1} - \frac{1}{2x^2+7x+3} \qquad F_2 = \frac{(x-1)^2 + \dfrac{1-x}{1+x}}{x^2-4x+3} \qquad F_3 = \frac{x+1}{y+1} - \frac{y}{x}$$
$$F_4 = \frac{x-y}{x+y} - \frac{x-y}{2xy+x^2+y^2}$$

Exercice 86

1. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|2x-3| \leqslant 4$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant $|1-x| \geqslant 1$.

Exercice 87

Dans un repère orthonormé, tracer les graphes respectifs des applications

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-1| \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2|x-1|-|x-2| \end{array}$$

Exercice 88

Remplacer chaque ? des identités qui suivent par un rationnel ou la racine carrée d'un rationnel explicite de telle sorte que les égalités soient vraies pour tout réel x variant dans l'ensemble précisé. Les nombres placés n'ont pas à être égaux et peuvent être négatifs.

1. Pour tout $x \in [-9/5\,;+\infty[$, $\sqrt{5x+9} = ?\sqrt{1+?x}$.
2. Pour tout réel x appartenant à $[-1/4\,;+\infty[$, $\sqrt{12x+3} = ?\sqrt{x+?}$.
3. Pour tout réel x appartenant à $]-3/4\,;+\infty[$, $\sqrt{\dfrac{2}{4x+3}} = \dfrac{?}{\sqrt{x+?}}$.
4. Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{x^3+2} = x^?\sqrt{x+\dfrac{2}{x^?}}$.
5. Pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$, $\sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$.
6. Pour tout réel x appartenant à $]-1/2\,;0]$, $\sqrt{\dfrac{2x^2}{2x+1}} = \dfrac{?\times x^?}{\sqrt{x+?}}$.

Exercice 89

Simplifier au plus l'écriture des réels qui suivent; en particulier aucune racine ne doit apparaître dans un dénominateur.

$$A = \sqrt{18}+\sqrt{8} \qquad B = \sqrt{45}-3\sqrt{20} \qquad C = \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{2}-3$$

$$D = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{20}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-1}$$

Exercice 90

Soit x un réel strictement plus grand que 1. Donner une écriture plus simple des réels qui suivent.

$$A = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} \qquad B = \frac{2x^2-x-1}{\sqrt{x}-1} \qquad C = \sqrt{\frac{x+1}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

Exercice 91

1. Pour tout réel positif x, développer $(x-1)(x^2+x+1)$.
2. Pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, déduire de la question précédente une écriture simplifiée du réel $A = \dfrac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Exercice 92

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $xy = \dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}$.

Exercice 93

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, $\dfrac{x^4-y^4}{x-y} = x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

Exercice 94

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x(2y-3x) \leqslant \dfrac{y^2}{3}$.

Exercice 95

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x+y \neq 0$, $\dfrac{x^3+y^3}{x+y} \geqslant xy$.

Exercice 96

1. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Développer et réduire $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{x+y}\right)^2$
2. Déduire de la première question que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

Exercice 97

Simplifier l'écriture des réels $A = \dfrac{\ln(4)}{2} + \ln(64) - 3\ln(2)$ et $B = \ln\left(\sqrt{\sqrt{17}+4}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{17}-4}\right)$.

Exercice 98

Soit x et y deux réels. Pour chacun des nombres qui suit, déterminer les contraintes que doivent vérifier x et y pour que le nombre considéré soit correctement défini et en simplifier l'écriture.

$$A_1 = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{x+2y}}}{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y} \qquad A_2 = \ln\left(\frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}\right) \qquad A_3 = \mathrm{e}^{3\ln(x)} \qquad A_4 = \ln\left(\sqrt{x}-1\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

Exercice 99

1. Déterminer l'ensemble D des réels positifs x tels que $x^2+x>0$ et $3x^2+2x-1>0$.
2. Pour tout $x \in D$ tel que $x>0$, déterminer une écriture plus simple de $A = \ln(3x^2+2x-1) + 2\ln(x) - \ln(x^2+x)$.

Exercice 100

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;2]$, $1 \leqslant \dfrac{4x-3}{2x-1} \leqslant \dfrac{5}{3}$.
2. Déduire de la première question que pour tout $x \in [1\,;2]$, $0 \leqslant \ln(4x-3) - \ln(2x-1) \leqslant \ln(5) - \ln(3)$.

Exercice 101

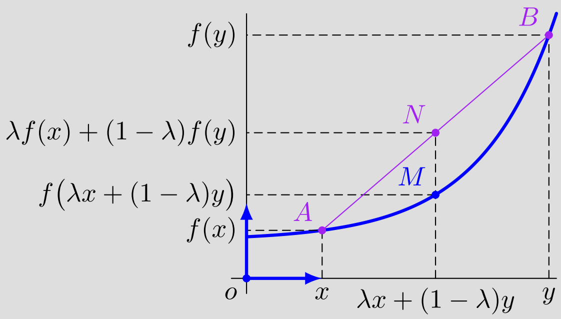
1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $x^2+2x \geqslant 3$.
2. Déduire de la première question que pour tout $x \in [\mathrm{e}\,;+\infty[$, $\left(\ln(x)\right)^2 + \ln(x^2) \geqslant 3$.

Exercice 102

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.
2. Déduire de la première question que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2} \leqslant \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.
3. Déduire de la première question que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si et seulement si pour tout $\lambda \in [0\,;1]$ et tout $(x, y) \in I^2$ vérifiant $x < y$,

$$(1)\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$$



Géométriquement, cela signifie que dès que l'on fixe deux points A et B du graphe de f d'abscisse respective x et y, le segment $[A, B]$ est situé au dessus du graphe Γ de f. En effet, lorsque λ parcourt $[0\,;1]$, le point M de Γ d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ parcourt la partie de Γ comprise entre A et B tandis que le point N de Γ d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ et d'ordonnée $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ parcourt le segment $[A, B]$; étudier le schéma ci-contre précise cette assertion. Les fonctions $x \mapsto -\ln(x)$ et exponentielle sont convexes; les questions 2 et 3 de l'exercice précédent proposent une preuve de l'estimation (1) dans ces deux cas, lorsque $\lambda = 1/2$.

Exercice 103

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1 + 2f(x) + f(x)^2}{1 - f(x)^2} = \mathrm{e}^{2x}$.
3. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$.

Exercice 104

1. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer x^2, $-4x$ puis $x^2 - 4x + 3$.
2. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer $(x-2)^2$ puis trouver un nouvel encadrement de $x^2 - 4x + 3$.
3. Reprendre les deux questions lorsque x appartient à $[-4\,;-2]$ puis à $[-2\,;1]$.

Exercice 105

1. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer x et $x^2 + 1$ puis $\dfrac{x}{x^2+1}$.
2. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer $x + \dfrac{1}{x}$ puis trouver un nouvel encadrement de $\dfrac{x}{x^2+1}$.
3. Reprendre les deux questions lorsque x appartient à $[-4\,;-2]$.
4. Soit $x \in [-2\,;1]$. Encadrer au mieux $\dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 106

La présence du pictogramme «pingouin qui réfléchit» est liée à la seule transformation demandée dans la question 2, que l'on peut donc faire «de tête».

1. Soit $x \in [1\,;3]$. Encadrer $2x + 3$ et $4x - 1$ puis $\dfrac{2x+3}{4x-1}$.
2. Soit $x \in [1\,;3]$. Écrire $\dfrac{2x+3}{4x-1}$ sous la forme $? + \dfrac{?}{4x-1}$. Proposer alors un autre encadrement de $\dfrac{2x+3}{4x-1}$.
3. Reprendre les deux questions lorsque x appartient à $[-4\,;-2]$.

Exercice 107

Soit $x \in [5\,;7]$. Déterminer un encadrement de $\ln(x-4)-\ln(2x+1)$.

Exercice 108

1. Soit $x \in [0\,;3]$. Donner un encadrement le plus précis possible des réels $|x-1|$ et $|x^2-1|$.
2. Reprendre la question précédente lorsque $x \in \left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$.

Exercice 109

Dans chaque question de cet exercice, on considère deux réels dont on précise le classement et l'objectif est de classer des expressions construites à partir de ces réels comme dans les deux premiers exemples du cours. Lorsqu'il n'est pas possible de classer les réels en question, on peut chercher des hypothèses sur ces réels (placement des réels par rapport à 0 ou à un autre nombre explicitement connu) de telle sorte que le classement soit possible. On pourra encore une fois relire les deux exemples du cours dans lesquels on a dû préciser les positions des nombres manipulés par rapport à 0 pour pouvoir conclure... dans presque tous les cas.

1. Soit x et y deux réels distincts de 1 tels que $x \leqslant y$. Classer $\dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{1}{y-1}$.
2. Soit x et y deux réels tels que $x<1<y$. Classer $\big(\ln(x)\big)^{-3}$ et $\big(\ln(x)\big)^{-3}$, puis $\big(\ln(x)\big)^{2}$ et $\big(\ln(x)\big)^{2}$.

Exercice 110

Dans cet exercice, k désigne un entier relatif quelconque. Donner la valeur exacte de

$$A=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \qquad B=\cos\left(-\frac{39\pi}{4}\right) \qquad C=\sin\left(\frac{39\pi}{2}-\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$D=\cos\left(\frac{8\pi}{15}-\frac{11\pi}{5}\right) \qquad E=-8\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{6}\right) \qquad F=2\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)-7\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right)$$

$$G=\cos\left(\frac{11\pi}{2}+15\pi\right) \qquad H=\sin\left(-\frac{138\pi}{3}\right) \qquad I=\sin\left(\frac{38\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$J=\cos\left(k\pi\right) \qquad K=\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \qquad L=\cos\left(\frac{39\pi}{4}+k\pi\right)$$

Exercice 111

Dans cet exercice, k désigne un entier relatif quelconque et α est un réel. En utilisant les formules (T2) à (T13), simplifier les expressions qui suivent. Chacune d'entre elle est de la forme $A\,\sin(\alpha)+B\cos(\alpha)$ où A et B sont deux entiers relatifs.

$$A=\sin(13\pi-\alpha) \qquad B=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(-\alpha) \qquad C=\sin(17\pi-\alpha)-\sin\left(-\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$D=\cos\left(\alpha+\frac{11\pi}{2}\right) \qquad E=\sin\left(-\pi+\alpha\right)+\cos(-\pi+\alpha) \qquad F=\sin(12\pi+\alpha)-2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$G=\sin\left(\pi-\frac{9\pi}{2}-\alpha\right) \qquad H=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(-\alpha) \qquad I=\sin(7\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$J=\cos(\alpha+k\pi) \qquad K=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-k\pi\right)$$

Exercice 112

Dans cet exercice, x est désigne un réel. En utilisant les formules (T14) à (T17), écrire chacune des expressions qui suit sous la forme $A\,\sin(x)+B\cos(x)$ où A et B sont deux réels.

$$A=\sqrt{2}\,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad B=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+\cos\left(x-\frac{27\pi}{4}\right) \qquad C=\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)\times\cos\left(-x+\frac{51\pi}{4}\right)$$

$$D=\cos\left(7\pi-x+\frac{4\pi}{3}\right) \qquad E=\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{7\pi}{3}+x\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(x-\frac{23\pi}{6}\right)$$

Exercice 113

Soit x un réel. Écrire chacune des expressions qui suit sous la forme d'une **expression polynomiale** développée en $\sin(x)$.

$$A = 2\big(\sin(x)\big)^3 - \sin(x)\big(\cos(x)\big)^2 \qquad B = \big(\cos(x)\big)^4 + 3\big(\sin(x)\big)^2 \qquad C = \big(\cos(x)\big)^4 + \big(\sin(x)\big)^4 - 2\big(\cos(x)\big)^2$$

Exercice 114

Soit x et y deux réels.

1. En utilisant les formules (T14) et (T15), réécrire les réels $\cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$.
2. Écrire l'expression $\cos(x) + \cos(y)$ sous la forme du produit de deux cosinus et d'un entier explicitement connu.

Exercice 115

1. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-7\pi\,;-5\pi]$ tels que $\cos(t) = -\frac{1}{2}$.
2. Déterminer tous les réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-\pi\,;2\pi]$ tels que $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
4. Déterminer tous les réels t appartenant à $[11\pi\,;12\pi]$ tels que $\sin(t) = \frac{1}{2}$.
5. Déterminer tous les réels t appartenant à $[\pi\,;2\pi]$ tels que $\cos(t) \leqslant \frac{1}{2}$.
6. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-\pi/2\,;\pi/2]$ tels que $\sin(t) \geqslant \frac{1}{2}$.
7. Déterminer tous les réels t appartenant à $[-6\pi\,;-2\pi]$ tels que $\cos(t) \geqslant 0$.
8. Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;5\pi]$ tels que $\cos(t) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
9. Déterminer tous les réels t appartenant à $[2\pi\,;4\pi]$ tels que $\left|\sin(t)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.
10. Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
11. Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;\pi]$ tels que $\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 116

Donner la forme algébrique de chacun des complexes qui suit.

$$z_1 = (3\mathrm{i}+4)(\mathrm{i}-8) \qquad z_2 = (-\mathrm{i}+4)(-2\mathrm{i}-3) \qquad z_3 = (2\mathrm{i}+1)^3 \qquad z_4 = (3-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})^2$$

$$z_5 = (-1-2\mathrm{i})^2 \qquad z_6 = \frac{2\mathrm{i}-1}{2\mathrm{i}-3} \qquad z_7 = \frac{1-4\mathrm{i}}{(5+\mathrm{i})(3-6\mathrm{i})} \qquad z_8 = \frac{(3-2\mathrm{i})^2}{(2-2\mathrm{i})^2}$$

$$z_9 = \big(\sqrt{3}+2\mathrm{i}\big)^3 \qquad z_{10} = (4+\mathrm{i})^2 - (-\mathrm{i}+1)^2 \qquad z_{11} = 12\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 \qquad z_{12} = 4\mathrm{i} - \frac{-\mathrm{i}+1}{-2\mathrm{i}+3}$$

$$z_{13} = \frac{(1+\mathrm{i})^{20}}{(1-\mathrm{i})^{19}} \qquad z_{14} = \frac{2}{\mathrm{i}+3} - \frac{4\mathrm{i}}{(\mathrm{i}+3)^2} \qquad z_{15} = -\mathrm{i}\big((\mathrm{i}+2)^2 - 4\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)\big) \qquad z_{16} = \frac{3+\mathrm{i}}{(3+6\mathrm{i})^3}$$

Exercice 117

1. Déterminer la forme algébrique des complexes z tels que $-\mathrm{i}z + 4 = -2\mathrm{i}$.
2. Déterminer la forme algébrique des complexes z tels que $(3-\mathrm{i})z + 7 = -2 + 4\mathrm{i}z$.
3. Déterminer la forme algébrique des complexes z tels que $(3-\mathrm{i})(z-2\mathrm{i}) + 7 = -2 + 4\mathrm{i}(1+\mathrm{i})(z+1)$.
4. Déterminer la forme algébrique des complexes z distincts de $4\mathrm{i}$ tels que $\dfrac{(3-\mathrm{i})z+7}{4+\mathrm{i}z} = 2 - \mathrm{i}$.

Exercice 118

Soit t un réel. On pose $z = t + 1 - \mathrm{i}t$. Écrire sous forme algébrique les nombres qui suivent; dans chaque calcul, on déterminera puis on écartera les valeurs de t pour lesquelles le calcul considéré n'a aucun sens.

$$z_1 = \frac{1}{z - \mathrm{i}}, \quad z_2 = \overline{z}^2, \quad z_3 = \frac{z}{\overline{z}} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{1}{(2+\mathrm{i})z + \mathrm{i} - 8}$$

Exercice 119

Dans cet exercice, t désigne un réel. Pour chaque complexe qui suit, trouver les valeurs de t pour lesquelles le complexe considéré est réel; dans chaque calcul, on déterminera puis on écartera les valeurs de t pour lesquelles le calcul considéré n'a aucun sens.

$$z_1 = \mathrm{i}(t+1)(\mathrm{i}+t) - (t+2\mathrm{i}) \qquad z_2 = (t-1)^3(1+\mathrm{i}) - (1-\mathrm{i})(t-3)^2 - 2(t-2)(t+2)(3-\mathrm{i}) \qquad z_3 = \frac{t+1-\mathrm{i}}{t+1+\mathrm{i}}$$

$$z_4 = (1+2\mathrm{i})\sin(t) - (\mathrm{i}-1) \qquad z_5 = \big((t+1)^2 + 2t(2t-1)\mathrm{i}\big)^2 \qquad z_6 = \frac{2\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}(\mathrm{i}t+1)^2 + 2}$$

Exercice 120

Tracer un cercle trigonométrique, y placer les images des complexes qui suivent et donner leur écriture algébrique.

$$z_1 = \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4} \qquad z_2 = \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/6} \qquad z_3 = \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2} \qquad z_4 = \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi}$$

$$z_5 = \mathrm{e}^{47\mathrm{i}\pi/3} \qquad z_6 = \mathrm{e}^{-23\mathrm{i}\pi/4} \qquad z_7 = \mathrm{e}^{-11\mathrm{i}\pi}$$

Exercice 121

Donner la forme trigonométrique des complexes qui suivent.

$$z_1 = -4 \qquad z_2 = 2\mathrm{i} \qquad z_3 = 1 - \mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i}}{3}$$

$$z_5 = -2 - 2\mathrm{i} \qquad z_6 = \sqrt{3} + 3\mathrm{i} \qquad z_7 = \sqrt{8} + \frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \qquad z_8 = -\sqrt{6} + 3\mathrm{i}\sqrt{2}$$

Exercice 122

Donner la forme trigonométrique des complexes qui suivent.

$$z_1 = (3+4\mathrm{i})(3+\mathrm{i})^2 \qquad z_2 = (2+3\mathrm{i})^3\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{5}\right)^3 \qquad z_3 = (\sqrt{3} - \mathrm{i})\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$z_4 = \mathrm{i}(3-3\mathrm{i})^3 \qquad z_5 = \frac{\big(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2}{\big(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2} \qquad z_6 = \frac{\big(5+11\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2}{\big(7-4\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^2}$$

Exercice 123

Donner la forme algébrique chacun des complexes qui suivent.

$$z_1 = 3 + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} \qquad z_2 = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} + \mathrm{i}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} - \mathrm{i}} \qquad z_3 = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/9}\big)^6$$

$$z_4 = \frac{2+2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} \times \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}} \qquad z_5 = (2+2\mathrm{i})^4(\sqrt{3} - \mathrm{i})^5 \qquad z_6 = (1-3\mathrm{i})^7(2-\mathrm{i})^{-6}$$

Exercice 124

Soit x un réel. Mettre sous forme trigonométrique le complexe $z = \left(1 + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right) \times \dfrac{\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)}{\cos(x) - \mathrm{i}\,\sin(x)}$.

Exercice 125

Donner la forme algébrique du complexe $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$.

Exercice 126

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, exprimer $|x+y|^2$ sous la forme d'une **expression algébrique** en x, y et leur conjugué.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Re}\big(x\,\overline{y}\big) = \dfrac{|x+y|^2 - |x-y|^2}{4}$.

Exercice 127

Soit n, m deux entiers naturels et a un complexe. Donner une expression sans symbole de sommation de

$$S_1 = \sum_{k=0}^{2n+1} (ak + n) \qquad S_2 = \sum_{k=n}^{2n} ak + n, \qquad S_3 = \sum_{k=m}^{n+m-1} \frac{k+1}{2} \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n} 3k - 9 + \sum_{k=0}^{n} (k-1)$$

Les résultats devront être mise sous la forme d'une fraction dont le numérateur est une expression polynomiale en n entièrement factorisée et le dénominateur est un entier numériquement connu.

Exercice 128

Soit n un entier naturel et x, y et z trois réels. On suppose que y est non nul dans les sommes S_2, S_6 et S_8, et que ce réel est strictement positif dans S_9. Donner une expression sans symbole de sommation des sommes qui suivent; on prendra garde à bien distinguer plusieurs cas lors de l'usage de la formule (S5) du cours sur les sommes.

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{7 \times x^{k+1}}{3 \times 2^k}, \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{y^{2nk}}, \qquad S_3 = \sum_{k=1}^{2n} x^k y^{k+1} z^{k+2} \qquad S_4 = \sum_{k=n}^{2n} \left(x^k + y^k\right)$$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} \left(x^k + y^k\right)^2 \qquad S_6 = \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{x}{y^k}\right)^3, \qquad S_7 = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{(2k+1)x}\right)^n, \qquad S_8 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{3k+2}+1}{2y^k}$$

$$S_9 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(3y^k\right), \qquad S_{10} = \sum_{k=-n}^{n} 3(x^k + k)$$

Exercice 129

1. Soit n un entier naturel et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des complexes. Exprimer sans symbole de sommation le réel $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \big(a_k - a_{k-1}\big)$.
2. Pour tout entier naturel non nul k, simplifier l'expression $2^k - 2^{k-1}$. En déduire, sans utiliser la formule (S5) de la leçon sur les sommes, une expression sans symbole de sommation du réel
$$\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$
3. En exploitant la première question, donner une expression sans symbole de sommation de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

Exercice 130

Donner l'expression explicite de la dérivée de chacune des fonctions qui suit.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (3x^2+1)\cos(2x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x-1}{x+3} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(x\mathrm{e}^x\right)^2 \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc}]-\pi/2\,;\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\mathrm{e}^{2x}}{x+1} \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+x+1} \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln\left(\sqrt{x}\right) \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(2x+1)^4} \end{array} \qquad f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array}$$

$$f_{10} : \begin{array}{ccc}]0\,;\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\sin(2x)} \end{array} \qquad f_{11} : \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+2x}{1-x^2} \end{array} \qquad f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) \end{array}$$

$$f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+1}{x^2+1} \end{array} \qquad f_{14} : \begin{array}{ccc}]-1/2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\sqrt{2x+1}\right) \end{array} \qquad f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} \end{array}$$

$$f_{16} : \begin{array}{ccc}]-\pi\,;\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3\sin(x)}{\cos(x)+1} \end{array} \qquad f_{17} : \begin{array}{ccc}]-\pi/2\,;\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\left(\sin(x)\right)^2}{\left(\cos(x)\right)^2} \end{array} \qquad f_{18} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

Exercice 131

Donner l'expression explicite d'une primitive de chacune des fonctions qui suit. Il sera nécessaire de transformer l'écriture de certaines fonctions pour faire apparaître des modèles connus de primitives.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (2x+1)^3 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(3x-1)}{2} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc}]1/4\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-4x} \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2x^3} \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\mathrm{e}^x\right)^3 \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{ccc}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x^2}{1-x^3} \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{ccc}]2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{3\sqrt{2x-4}} \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{x} \end{array} \qquad f_9 : \begin{array}{ccc}]-1/3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{3x+1} \end{array}$$

$$f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4x}{(x^2+1)^3} \end{array} \qquad f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{x} \end{array} \qquad f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\mathrm{e}^x+1\right)^2 \end{array}$$

$$f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} \end{array} \qquad f_{14} : \begin{array}{ccc}]-3/2\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(2x+3)^2} \end{array} \qquad f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+1} \end{array}$$

$$f_{16} : \begin{array}{ccc}]-2/3\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+3}{3x+2} \end{array} \qquad f_{17} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\exp\left(3x^2\right) \end{array} \qquad f_{18} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x\left(2\mathrm{e}^x+1\right)^4 \end{array}$$

$$f_{19} : \begin{array}{ccc}]0\,;\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2\left(\cos(x)\right)^2-1}{\sqrt{\sin(2x)}} \end{array} \qquad f_{20} : \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{4}{x^2-1} \end{array} \qquad f_{21} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(\sin(x)\right)^2 \end{array}$$

Exercice 132

1. Déterminer la dérivée de $x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Déterminer la dérivée de $x \mapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $]0\,;\pi[$. En déduire une primitive de $x \mapsto \left(\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)^2$ sur $]0\,;\pi[$.

Exercices de recherche facultatifs

Exercice 133

Soit x un rationnel appartenant à $]0\,;1[$. On appelle n_1 le plus petit entier naturel non nul tel que $x - \dfrac{1}{n_1} \geqslant 0$.
Si $x - \dfrac{1}{n_1} > 0$, on appelle n_2 le plus petit entier naturel non nul tel que $x - \dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2} \geqslant 0$.
Si $x - \dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2} > 0$, on appelle n_3 le plus petit entier naturel non nul tel que $x - \dfrac{1}{n_1} - \dfrac{1}{n_2} - \dfrac{1}{n_3} \geqslant 0$...
On réitère le processus jusqu'à ce que ce soit impossible. Par exemple pour $x = \dfrac{7}{11}$, on note successivement que

$\dfrac{7}{11} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{22}$ donc $n_1 = 2$

puis $\dfrac{3}{22} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{88}$ et $\dfrac{3}{22} - \dfrac{1}{7} < 0$ donc $n_2 = 8$

puis $\dfrac{1}{88} - \dfrac{1}{88} = 0$ et $\dfrac{1}{88} - \dfrac{1}{87} < 0$ donc $n_3 = 88$

et le processus s'arrête. On sait alors que $\dfrac{7}{11} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{88}$.

1. Appliquer l'algorithme à $\dfrac{9}{13}$
2. Appliquer l'algorithme à $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}$
3. En s'aidant d'une machine, appliquer l'algorithme à $\dfrac{15}{61}$

L'écriture d'un rationnel comme somme de rationnels deux à deux distincts dont les numérateurs valent 1 s'appelle un développement égyptien du rationnel; on pourra consulter https://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction_égyptienne. On peut montrer que tout rationnel admet un développement égyptien mais que ce dernier n'est en général pas unique. L'algorithme précédent permet de construire effectivement un tel développement. Notons que le même algorithme s'applique aux réels x appartenant à $]0\,;1[$, mais conduit à construire une suite infinie $(n_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de dénominateurs. On peut alors montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant x - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots + \frac{1}{n_p}\right) \leqslant \frac{1}{n_p(n_p-1)}$$

ce qui permet de trouver de bonnes approximations rationnelles de réels. Par exemple

- $0 \leqslant \pi - 3 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{61} \leqslant \dfrac{1}{3660}$ donc $\dfrac{1533}{488}$ approche π par défaut avec une précision meilleure que 3×10^{-4}.
- $0 \leqslant \pi - 3 - \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{61} - \dfrac{1}{5020} \leqslant \dfrac{1}{25195380}$ donc $\dfrac{1924037}{612440}$ approche π par défaut avec une précision meilleure que 4×10^{-8}.

Exercice 134

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 6}{u_n + 1}$.

1. Vérifier que les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.
2. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n - 3}{u_n + 2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** et en déterminer la raison.
3. Déterminer l'expression explicite des termes de la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

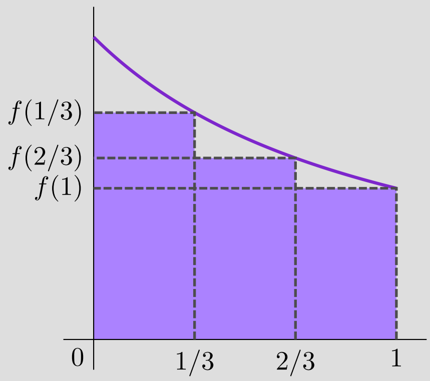
Exercice 135

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, écrivez le réel $u_{n+1} - u_n$ sous la forme d'une fraction. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y-a-t-il de termes dans la somme définissant u_n? Quel est le plus grand d'entre eux? En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.
3. Que peut-on dire d'une suite croissante et majorée?

On pose

$$f: \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x} \end{array}$$



On note que

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+1/3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+2/3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{3} \times f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times f\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \times f(1) \end{aligned}$$

Donc u_3 apparaît comme la somme des aires de trois rectangles de base de même longueur égale à $1/3$ et dont les hauteurs respectives sont $f(1/3)$, $f(2/3)$ et $f(1)$; Cette zone est teintée en violet sur le diagramme ci-dessus. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \times f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n} \times f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{n} \times f(1)$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n apparaît comme la somme des aires de n rectangles de base de même longueur égale à $1/n$ et dont les hauteurs respectives sont $f(1/n)$, $f(2/n), \ldots, f(1)$. On peut donc espérer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'aire délimitée par l'axe des abscisses, le graphe de la fonction f et les deux droites verticales d'équation respective $x = 0$ et $x = 1$. Autrement dit, on peut espérer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'intégrale de f c'est à dire vers $\ln(2)$. Ce résultat sera rigoureusement démontré pendant votre année de sup.

Exercice 136

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

1. On pose $S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$. Simplifier $(a-1)S$. En déduire une expression explicite de S.
2. En vous inspirant de ce qui précède, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$
3. Quel est le plus grand entier naturel que l'on peut écrire en binaire avec 10 bits?

Exercice 137

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels telle que $p_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} \leqslant 1 + p_1 \times \cdots \times p_n$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant 2^{(2^{n-1})}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, appelons p_n le n^{e} nombre premier positif par ordre croissant. Ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$,... Soit alors n un entier naturel non nul. L'entier naturel $N = 1 + p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ est strictement plus grand que 1 donc admet forcément un diviseur premier positif. Il existe donc un entier naturel non nul k tel que $p_k \mid N$. Si on suppose que $k \leqslant n$ alors p_k divise N et divise $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ donc divise 1, ce qui est absurde. On en déduit que $k \geqslant n+1$. Sachant qu'on a classé les nombres premiers par ordre croissant, $p_k \geqslant p_{n+1}$. Enfin, comme p_k divise N, on sait que $p_k \leqslant N$. Finalement, pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} \leqslant 1 + p_1 \times \cdots \times p_n$. On peut alors utiliser le résultat de l'exercice et trouver une estimation du n^{e} nombre premier... qui est très grossière.

Exercice 138

Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$, $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \dfrac{a}{x^2+1} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$.

Exercice 139

Soit x et y deux complexes. On pose $s = x + y$ et $p = xy$.

1. Développer s^2, s^3
2. Écrire $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ en fonction de s et p.
3. On suppose x et y non nuls. Écrire $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$ en fonction de s et p.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on suppose que $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}$. En utilisant la deuxième identité trouvée dans la question 2, trouver une expression de $\cos(3\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$.

Exercice 140

Soit x, y et z trois complexes. On pose $s = x + y + z$, $t = xy + yz + xz$ et $p = xyz$.

1. Développer s^2, s^3, t^2
2. Écrire $x^2 + y^2 + z^2$, $x^3 + y^3 + z^3$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$ en fonction de s, t et p.

Les calculs de l'exercice précédent, très semblables à ceux de l'exercice 139, peuvent paraître gratuits. Mais ils fondent une partie de la théorie des polynômes. On peut par exemple trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux fonctions polynomiales aient une racine commune sans jamais calculer lesdites racines. On fixe par exemple $a \in \mathbb{R}$ et on considère les fonctions polynomiales

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - ax + 1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + (a+1)x + 2a \end{array}$$

La fonction f étant polynomiale de degré 2, on sait qu'elle admet deux points d'annulation x_1 et x_2 dans $\mathbb{C}$. Mais les expressions explicites de ces nombres complexes ne sont pas élémentaires et surtout leur forme dépend de a. Ceci étant, f et g ont un point d'annulation commun si et seulement si x_1 ou x_2 est un point d'annulation de g ce qui équivaut à $g(x_1)g(x_2) = 0$. On pose $s = x_1 + x_2$ et $p = x_1x_2$ et on exploite les formules de l'exercice 139.

$$\begin{aligned} g(x_1)g(x_2) &= \left(x_1^2 + (a+1)x_1 + 2a\right)\left(x_2^2 + (a+1)x_2 + 2a\right) \\ &= (x_1x_2)^2 + (a+1)x_1x_2(x_1+x_2) + 2a(x_1^2 + x_2^2) + (a+1)^2x_1x_2 + 2a(a+1)(x_1+x_2) + 4a^2 \\ &= p^2 + (a+1)ps + 2a(s^2 - 2p) + (a+1)^2p + 2a(a+1)s + 4a^2 \end{aligned}$$

Il reste à noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme développée $f(x)$ est celle de $(x - x_1)(x - x_2)$ soit $x^2 - sx + p$. En identifiant les deux formes développées de de la fonction polynomiale f, on en déduit que $s = a$ et $p = 1$. Finalement, $g(x_1)g(x_2) = 4a^3 + 8a^2 - a + 2$. Les deux fonctions polynomiales f et g ont donc un point d'annulation commun si et seulement si $4a^3 + 8a^2 - a + 2 = 0$. La technique de calcul exposée se généralise à tous les degrés. Même si elle est assez technique, les algorithmes de calcul sont systématiques et ont été automatisés.

Exercice 141

Soit n un entier naturel non nul. Calculer $S = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{n \times (n+1)}$.

Exercice 142

Soit n un entier naturel distinct de 0 et 1. Calculer $S = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + \cdots + \dfrac{1}{n^2 - 1}$.

Exercice 143

Soit n un entier naturel. On pose $p = n(n+1)(n+2)(n+3)$.

1. Factoriser $n(n+3)+2$
2. On pose $q = (n+1)(n+2)$. Exprimer p en fonction de q; la lettre n ne doit plus apparaître.
3. Montrer que $p+1$ est le carré d'un entier naturel.

Exercice 144

Soit x et y deux complexes. Factoriser $x^2 + xy - 2y^2$.

Exercice 145

Développer l'expression qui suit en utilisant autant que possible des identités remarquables pour réduire la quantité de calculs.

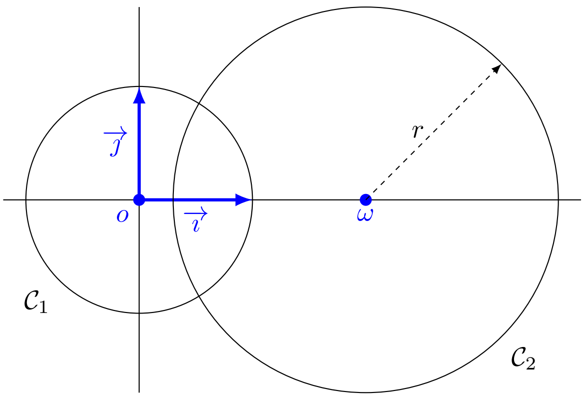
$$A = (x+y+z+t)(x+y-z-t)(x-y+z-t)(x-y-z+t)$$

Exercice 146

On considère une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n^2 - u_n + 1$.

1. Déterminer explicitement un réel c strictement positif tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 - x + 1 \geqslant x + c$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant cn + u_0$.
3. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 147



Soit d un réel strictement positif et r un réel supérieur ou égal à 1. On travaille dans un plan muni d'un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On considère le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre o et de rayon 1 et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre le point ω de coordonnées $(d, 0)$ et de rayon r. Une étude géométrique assure que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$ et $(x-d)^2 + y^2 = r^2$. Or pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-d)^2 + y^2 = r^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2dx = d^2 - r^2 + 1 \\ 4d^2y^2 = 4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 \end{array}\right.$$

Finalement les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont au moins un point commun si et seulement si $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2 \geqslant 0$.

1. Factoriser l'expression $4d^2 - (d^2 - r^2 + 1)^2$.
2. Montrer que les cercles considérés ont au moins un point d'intersection si et seulement si $r - 1 \leqslant d \leqslant r + 1$.

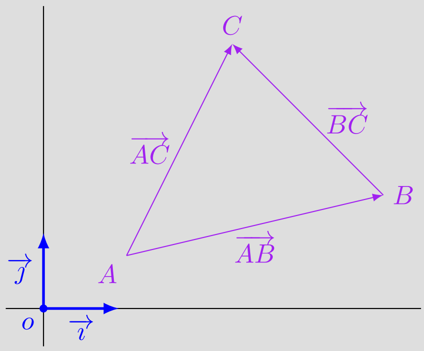
Exercice 148

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que le plus grand élément de l'ensemble $\{x, y\}$ est $\dfrac{x - y + |x - y|}{2}$.
2. Proposer une formule analogue à celle de la question précédente pour le plus petit élément de $\{x, y\}$

Exercice 149

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.



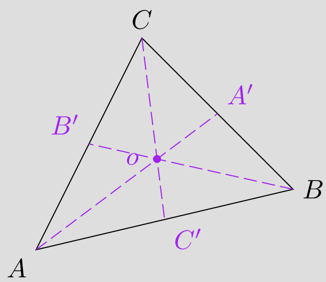
L'inégalité précédente est toujours valable si x et y sont des complexes, en travaillant bien évidemment avec des modules au lieu de valeurs absolues. À ce sujet, on pourra résoudre l'exercice de recherche 173. Sous la forme complexe, cette inégalité a une interprétation géométrique. En effet, travaillons dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(o, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ permettant d'identifier ce plan et $\mathbb{C}$; autrement dit, on associe à chaque point et à chaque vecteur de $\mathcal{P}$ son affixe. On considère alors trois points A, B et C de $\mathcal{P}$ dont on note a, b et c les affixes. On sait que les affixes respectives de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont $b - a$, $c - b$ et $c - a$. L'inégalité prouvée assure en particulier que

$$\begin{aligned} & |(c-b)+(b-a)| \leqslant |c-b|+|b-a| \\ \text{donc} \quad & |c-a| \leqslant |c-b|+|b-a| \\ \text{donc} \quad & AC \leqslant BC + AB \end{aligned}$$

puisque le module de l'affixe d'un vecteur liant deux points est la distance entre ces deux points. L'inégalité prouvée dans l'exercice 149 porte naturellement le nom d'«inégalité triangulaire» même quand elle met en jeu des réels. Dans le cas des complexes, elle illustre un cas très particulier d'un résultat géométrique bien connu: la plus courte distance entre deux points A et C est la longueur du segment AC. En effet, on vient de montrer que toute ligne brisée reliant A à C est plus longue que AC.

Exercice 150

1. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a + b + c = 0$, $3|a| \leqslant |a - b| + |a - c|$.
   On pourra utiliser le résultat de l'exercice 149.
2. Déduire de la question 1 que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a+b+c = 0$, $|a|+|b|+|c| \leqslant \dfrac{2}{3}\big(|a-b|+|b-c|+|a-c|\big)$.



Les preuves des résultats de cet exercice ne sont fondées que sur l'inégalité triangulaire et les propriétés de l'addition, qui sont aussi valables dans $\mathbb{C}$. Ces résultats ont donc des interprétations géométriques. Détaillons celle du résultat de la troisième question. Soit A, B et C trois points du plan non alignés. On appelle A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[B, C]$, $[A, C]$ et $[A, B]$. Appelons o l'unique point du plan vérifiant $\overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC} = \overrightarrow{0}$. Comme A' est le milieu de $[B, C]$, on sait que $2\overrightarrow{oA'} = \overrightarrow{oB} + \overrightarrow{oC}$. Par définition de o, on en déduit que $\overrightarrow{oA} + 2\overrightarrow{oA'} = \overrightarrow{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{oA}$ et $\overrightarrow{oA'}$ sont donc colinéaires. Autrement dit, o appartient à la droite (AA'). On montre de manière analogue que o appartient à (BB') et (CC'). Ce point est donc l'intersection des trois médianes du triangle (ABC). On choisit alors un repère orthonormé du plan dont l'origine est o. Ce repère permet d'identifier le plan et $\mathbb{C}$. On appelle alors a, b et c les affixes respectives de A, B et C. Par construction de o, on sait que $a + b + c = 0$. On peut donc appliquer le résultat de la question 3. En notant que les affixes respectives de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont $b - a$, $c - b$ et $c - a$, ce résultat assure que

$$OA + OB + OC \leqslant \frac{2}{3}\big(AB + AC + BC\big)$$

En réutilisant la relation $\overrightarrow{oA} + 2\overrightarrow{oA'} = \overrightarrow{0}$ pour comparer les distances entre o, A et A', on note que $oA = 2\,oA'$. On en déduit que

$$AA' = oA + oA' = \frac{3\,oA}{2}$$

On a des estimations analogues pour les deux dernières médianes. En réinjectant ces formules dans l'inégalité précédente, on en déduit que $AA' + BB' + CC' \leqslant AB + AC + BC$. Autrement dit, la somme des longueurs des médianes d'un triangle est plus petite que le périmètre dudit triangle.

Exercice 151

Si f est une fonction et x, y sont deux réels distincts de son domaine de définition, on appelle taux d'accroissement de f entre x et y le réel

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

1. Écrire et simplifier le taux d'accroissement de $f : t \mapsto t^2+3t-4$ entre deux réels x et y distincts.
2. Écrire et simplifier le taux d'accroissement de $f : t \mapsto \dfrac{2t+3}{t-5}$ entre deux réels x et y distincts et différents de 5.
3. Écrire et simplifier le taux d'accroissement de $f : t \mapsto \sqrt{4t-1}$ entre deux réels x et y plus grands que $\dfrac{1}{4}$ et distincts.

On reprend les notations de l'exercice précédent en notant de plus D le domaine de définition de f. On fixe alors le réel y et on considère la fonction

$$T : \begin{array}{ccc} D\setminus\{y\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \end{array}$$

Vous savez que si la fonction T admet une limite finie en y alors le graphe de la fonction f admet une tangente au point d'abscisse y; on pourra lire le préambule de la douzième leçon pour des rappels plus précis. Un problème est que, par construction même, la limite à calculer pour la fonction T est une forme indéterminée. Les calculs de l'exercice précédent ont dû vous permettre de «lever l'indétermination» dans les trois cas étudiés, c'est à dire de trouver une expression de T avec laquelle le calcul de la limite voulue est immédiat.

Exercice 152

Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$?

Exercice 153

1. Montrer que pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$.
2. Soit a,b,c,a',b',c' des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\right)(aa'+bb'+cc')\geqslant(a+b+c)^2$$

En déduire que si $(a+b+c)^2\geqslant\dfrac{3}{2}(aa'+bb'+cc')$ alors $\dfrac{a}{a'}+\dfrac{b}{b'}+\dfrac{c}{c'}\geqslant\dfrac{3}{2}$.
En déduire que $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

3. Soit a,b,c,d,a',b',c',d' des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}+\frac{d}{d'}\right)(aa'+bb'+cc'+dd')\geqslant(a+b+c+d)^2$$

En déduire que si $(a+b+c+d)^2\geqslant 2(aa'+bb'+cc'+dd')$ alors $\dfrac{a}{a'}+\dfrac{b}{b'}+\dfrac{c}{c'}+\dfrac{d}{d'}\geqslant 2$.
En déduire que $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{d+a}+\dfrac{d}{a+b}\geqslant 2$.

En 1954, Harold Seymour Shapiro s'est posé le problème suivant: Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $x_1,\dots,x_n$ des réels strictement positifs. La relation suivante est-elle vraie?

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2}$$

L'exercice précédent montre que la réponse est positive lorsque $n=3$ ou $n=4$. Des calculs utilisant la même technique permettent de répondre de même lorsque $n\leqslant 6$. Pour des valeurs plus grandes de n, il faut utiliser d'autres techniques. Malheureusement, on peut trouver un contre exemple pour $n=14$.

Exercice 154

Soit a, b et c trois réels de l'intervalle $]0\,;1]$.

1. Quel est le signe de $(ab-1)(ac-1)(bc-1)$?
2. Montrer que $a+b+c+\dfrac{1}{abc} \geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+abc$.
3. Soit a, b, c et d quatre réels tels que $0<a<b<c<d$. Montrer que $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a} \geqslant \dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{d}{c}+\dfrac{a}{d}$.

Exercice 155

Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geqslant 2$. Quand a-t-on égalité?

Exercice 156

Soit x, y et z trois réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right) \geqslant \dfrac{3}{x+y+z}$. Quand a-t-on égalité?

Exercice 157

Montrer que pour tout réel x et y positifs, $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$.

Exercice 158

On considère une suite vérifiant $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-3}{u_n+1}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\,]1\,;3[$, $\dfrac{5x-3}{x+1}\in\,]1\,;3[$.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\,]1\,;3[$.
3. Montrer que pour tout $x\in\,]1\,;3[$, $\dfrac{5x-3}{x+1}>x$. Préciser alors les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
6. On veut reprendre l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une autre méthode. Pour tout entier naturel n, on pose
$$v_n=\frac{u_n-1}{u_n-3}$$
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique**. Trouver alors l'expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver les résultats des questions 4 et 5.

Exercice 159

Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{6x}-\mathrm{e}^{3x}+1 \geqslant 0$.

Exercice 160

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f\big(\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)\big)=x$.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\ln\big(f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}\big)=x$.

Exercice 161

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $f\big(\ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)\big) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln\big(f(x)+\sqrt{f(x)^2-1}\big) = x$.

On pose

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & [1\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad b : \begin{array}{ccc} [1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big) \end{array}$$

On a vérifié dans l'exercice 161 que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $a\big(b(x)\big) = x$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $b\big(a(x)\big) = x$. On dit alors que a et b sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Du point de vue intuitif, si l'on considère la donné d'une fonction comme celle d'un algorithme permettant de construire un nombre à partir d'un autre nombre, alors l'algorithme b est celui qui permet de retrouver la donnée fournie à l'algorithme a lorsque l'on connaît le résultat de ce dernier. Les rôles de a et b sont naturellement interchangeables. L'exercice 160 propose deux autres bijections réciproques l'une de l'autre, à savoir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big) \end{array}$$

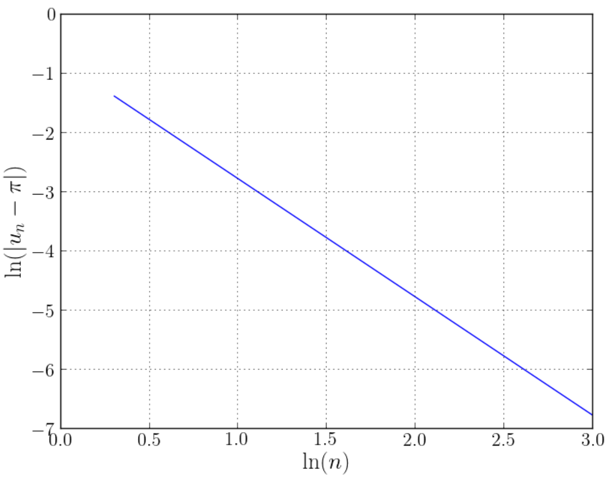
Cette notion importante sera travaillée en sup mais vous en avez déjà rencontré plusieurs exemples: les fonctions ln et exp sont des bijections réciproques l'une de l'autre, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et la fonction $x \mapsto x^2$ toutes les deux considérées de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre...

Exercice 162

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{4n}{k^2+n^2} - \frac{1}{n}$.

On peut démontrer qu'il existe deux constantes α et C strictement positives telles que la suite $\big(n^\alpha |u_n - \pi|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers C. Un expérimentateur écrit un programme, qui associe à chaque entier naturel non nul n une valeur approchée t_n de $|u_n - \pi|$. Il trace alors le graphe de $\ln(t_n)$ en fonction de $\ln(n)$ et obtient le graphe ci-contre.

1. Le graphe obtenu est-il cohérent avec le résultat admis?
2. Peut-on déterminer graphiquement les constantes α et C?



Exercice 163

Trouver la limite de la suite $\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 164

Soit $x \in [-2\,;1]$. En utilisant simplement des encadrements, donc sans utiliser d'étude de variations, encadrer le plus précisément possible le réel

$$A = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$$

Exercice 165

En utilisant simplement des encadrements, donc sans utiliser d'étude de variations, montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$0 \leqslant 1 - \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} \leqslant \frac{1}{2t^4}$$

Exercice 166

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer les réels $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ et $2\sqrt{n}$. En déduire que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. En travaillant comme dans la première question, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ appartient à $]99\,;100]$.

Exercice 167

L'objectif de cet exercice est de déterminer la précision des calculs faits par Neper lorsqu'il a construit et tabulé «sa» fonction, comme présenté dans la remarque située page 21 du document principal. Pour ce faire, on introduit la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x)-x+1 \end{array}$$

1. Étudier les variations de la fonction f. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \leqslant x-1$.
2. Déduire de la question précédente que pour tout $x \in]0\,;1]$, $\dfrac{x}{x-1} \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$.
3. Déduire de la question précédente que $-10^{-7}-10^{-13} \leqslant \ln(1-10^{-7}) \leqslant -10^{-7}$.

La suite $\big((1-10^{-7})^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $(1-10^{-7})^{p+1} \leqslant 0{,}99 \leqslant (1-10^{-7})^p$. Trouver la valeur de p correcte à la main est plus que laborieux! Mais une machine à calculer permet de vérifier que la valeur $p = 100503$ convient. Si votre machine ne permet pas de faire un tel calcul, essayez de travailler avec le logiciel sage, qui fait du calcul numérique en précision arbitraire et du calcul formel. Rendez-vous sur la page https://sagecell.sagemath.org/. On peut aussi vérifier que la valeur q telle que $(1-10^{-7})^{q+1} \leqslant 0{,}9995 \leqslant (1-10^{-7})^q$ est $q = 5001$.

4. Montrer que $-5\times10^{-8}-(p+1)10^{-13} \leqslant \ln(0{,}99)+\dfrac{2p+1}{2}10^{-7} \leqslant 5\times10^{-8}$.
   En utilisant la valeur de p, en déduire que $\left|\ln(0{,}99)+\dfrac{2p+1}{2}10^{-7}\right| \leqslant 7\times10^{-8}$.
   On peut montrer de même, et on admet ici, que $\left|\ln(0{,}9995)+\dfrac{2q+1}{2}10^{-7}\right| \leqslant 7\times10^{-8}$.
5. Montrer que pour tous les entiers naturels m et n plus petits que 69,
$$\left|\ln(0{,}9995^m\times0{,}99^n)+5\big(m(2q+1)+n(2p+1)\big)10^{-8}\right| \leqslant 10^{-5}$$

Pour tous les entiers naturels m et n plus petits que 69, Neper a estimé la valeur du logarithme de $0{,}9995^m\times0{,}99^n$ par le rationnel $-5\big(m(2q+1)+n(2p+1)\big)10^{-8}$. En effectuant ces approximations pour obtenir la table «radicale» de la page 21 du document principal, Neper a donc déterminé des valeurs des logarithmes qui lui étaient utiles avec une précision meilleure que 10^{-5}, ce qui est un tour de force au XVIe siècle.

Exercice 168

Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;3\pi]$ tels que $\big(\cos(t)\big)^2+3\big(\sin(t)\big)^2=2$.

Exercice 169

Déterminer tous les réels t appartenant à $]-\pi/2\,;\pi/2[$ tels que $\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}=\sqrt{3}$.

Exercice 170

Déterminer tous les réels t appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin(t)-\cos(t)=\sqrt{2}$.

Exercice 171

Déterminer tous les réels x appartenant à $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin(x) \geqslant \cos(2x)$.

Exercice 172

Montrer que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos\left(\frac{x}{2^0}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^1}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \dfrac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

Exercice 173

Soit z et z' deux complexes.

1. Montrer que $|z+z'|^2 - \big(|z|+|z'|\big)^2 = 2\big(\mathrm{Re}(\overline{z}\,z') - |\overline{z}\,z'|\big)$.
2. Montrer que pour tout complexe u, $\mathrm{Re}(u) \leqslant |u|$.
3. Déduire des deux questions précédentes que $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Le résultat de la question 3 est connu sous le nom d'inégalité triangulaire. Il a une interprétation géométrique essentielle, qui est développée dans la remarque qui suit l'exercice 149. L'exercice 150 se généralise aussi au cadre des complexes puisqu'il se fonde uniquement sur l'inégalité triangulaire.

Exercice 174

Soit z un complexe qui n'est pas un réel négatif. On pose $v = z + |z|$.

1. Montrer que $\mathrm{Re}(v) > 0$. On peut alors poser $w = \dfrac{v}{\sqrt{2\,\mathrm{Re}(v)}}$.
2. Montrer que $w^2 = z$.

L'exercice 174 assure que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, il existe $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = z$. Vous savez que la même propriété est vraie pour les réels négatifs; en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $\left(\mathrm{i}\sqrt{-x}\right)^2 = x$. Finalement, pour tout complexe z, on peut trouver un complexe dont le carré est z. Autrement dit, tout complexe admet une «racine carrée». Notons de plus que si w et w' sont deux racines carrées de z alors $w^2 = w'^2$ donc $w^2 - w'^2 = 0$ donc, en utilisant [IR3], $w = w'$ ou $w = -w'$. Finalement, tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées distinctes, opposées l'une de l'autre. Une des différences essentielles avec le cas des réels positifs est que l'on ne peut pas distinguer une des deux racines carrées. En effet, si x est un réel positif, on a appelé racine carrée de x l'unique réel **positif** dont le carré est x. Mais dans $\mathbb{C}$, la notion de signe perd son sens. Vous verrez en sup que l'on ne peut pas trouver un autre critère permettant de choisir de manière systématique entre les deux racines carrées d'un complexe. Mais cette difficulté n'empêche pas que l'on utilise la notion, par exemple pour généraliser les formules de résolution des équations du second degré au cas des équations à coefficients complexes.

Exercice 175

On pose $z = 1 + \mathrm{i}$ et $z' = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

1. Donner l'écriture algébrique de $\dfrac{z'}{z}$.
2. Donner l'écriture trigonométrique de z, de z' puis de $\dfrac{z'}{z}$.
3. Déduire de la question précédente la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 176

Soit n un entier naturel.

1. Donner la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^n$ en fonction du reste de la **division euclidienne** de n par 4.
2. Donner la forme algébrique de $(1+\mathrm{i})^{-n}$ en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.

Exercice 177

Soit θ et θ' deux réels.

1. Montrer que pour tout réel t, $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. En déduire que $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\dfrac{\theta - \theta'}{2}\right) e^{i(\theta+\theta')/2}$.
2. Montrer que pour tout réel t, $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$. Déterminer alors une forme exponentielle de $e^{i\theta} - e^{i\theta'}$.
3. Déterminer une forme exponentielle des complexes $1 + e^{i\theta}$, $1 - \left(e^{i\theta}\right)^3$ et $\left(i - e^{i\theta}\right)^3$.

Exercice 178

L'objectif de cet exercice est de trouver tous les complexes z non nuls tels que $z^2 + \overline{z}^2 + z^3 = 0$, relation que l'on note (R). Pour ce faire, on introduit un complexe non nul z vérifiant (R) que l'on écrit sous forme trigonométrique. Il existe donc un réel strictement positif r et un réel θ appartenant à $[-\pi\,;\pi[$ tel que $z = re^{i\theta}$.

1. Montrer que $2\cos(2\theta) + re^{3i\theta} = 0$
2. Montrer que θ appartient à l'ensemble $\left\{-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}, 0, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.
3. Montrer que z appartient à $\left\{-2, e^{2i\pi/3}, e^{-2i\pi/3}\right\}$.
4. Réciproquement, les éléments de l'ensemble décrit dans la question précédente vérifient-ils bien la relation (R)?

Exercice 179

L'objectif de cet exercice consiste à mettre en pratique la méthode inventée par Cardan, Tartaglia et Bombelli, rapidement décrite dans la remarque du cours principal page 31. On considère deux réels p et q et on appelle (E) l'équation $x^3 = px + q$, d'inconnue complexe x.

1. Soit $u \in \mathbb{C}^*$. On pose $x = u + \dfrac{p}{3u}$. Montrer que si x est une solution de (E) alors $(u^3)^2 - qu^3 + \dfrac{p^3}{27} = 0$.

La question précédente assure que pour résoudre (E), il suffit de résoudre l'équation du second degré (F) $y^2 - qy + \dfrac{p^3}{27} = 0$, d'inconnue complexe y, de déterminer les complexes u dont le cube est une des solutions de (F), puis de construire les complexes x correspondants. Comme on a raisonné par **condition nécessaires**, il faut aussi vérifier que les complexes ainsi construits sont bien des solutions de (E). Un des problèmes posé par l'algorithme de résolution décrit est la nécessité de chercher des complexes dont le cube est connu. Il n'existe pas de méthode générale pour résoudre ce problème. On peut seulement trouver des complexes dont le cube est connu lorsqu'on connaît déjà un tel complexe; ce résultat est prouvé dans la question qui suit.

2. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.
   a. Donner la forme trigonométrique de j.
   b. Montrer que si a est un complexe non nul, a, aj et aj^2 sont trois complexes deux à deux distincts ayant le même cube.

L'objectif de l'exercice est à présent de résoudre (E) dans plusieurs cas particuliers.

3. Dans cette question, on suppose que $(p, q) = (6, 9)$, c'est à dire que l'on considère l'équation (E) $x^3 = 6x + 9$ d'inconnue complexe x.
   a. Résoudre l'équation (F) et en déduire une solution potentielle de (E).
   b. Déterminer trois solutions de (E).
4. Dans cette question, on suppose que $(p, q) = (51, 104)$, c'est à dire que l'on considère l'équation (E) $x^3 = 51x + 104$ d'inconnue complexe x.
   a. Résoudre l'équation (F).
   b. Mettre sous forme algébrique $(4 + i)^3$.
   c. Déterminer trois solutions de (E).

Vous démontrerez en sup qu'une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions. On est donc sûr d'avoir déterminé toutes les solutions des équations étudiées dans les questions 3 et 4. Vous démontrerez aussi en sup que pour tout réel x, il existe un unique réel y vérifiant $y^3 = x$; ce réel y est souvent noté $\sqrt[3]{x}$. C'est pourquoi lorsque le discriminant de l'équation (F) est positif, on est sûr que (E) admet une solution réelle et on peut en donner une expression explicite. Cardan a déjà souligné ce résultat dans son ouvrage *Ars Magna* en 1547. Il écrit ainsi que si $27q^2 - 4p^3 \geqslant 0$ alors l'équation $x^3 = px + q$ d'inconnue réelle x admet une solution

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

En 1545, l'ensemble des nombres complexes n'était pas encore construit. C'est d'ailleurs pour généraliser la formule de Cardan que Bombelli introduit de nouvelles notions qui conduiront ensuite à la construction propre de l'ensemble $\mathbb{C}$, débarrassé de tous les paradoxes qui ont entouré sa naissance.

Exercice 180

Trouver la limite de la suite $\left(\prod_{k=0}^{n} \exp\left(2^{-k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 181

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

1. Étudier les variations de la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - x + 1 \end{array}$$

   En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln(p) \leqslant \frac{1}{p}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{1}{n} \leqslant u_n - \ln(n) \leqslant 1$.

4. Montrer que la suite $\big(u_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel appartenant à $[0\,;1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{u_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{u_n - \ln(n)}{\ln(n)}$

Comme la suite $\big(u_n - \ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et comme la suite $\big(\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, on en déduit que la suite $\big(u_n/\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1. Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ à la même «vitesse» que la suite $\big(\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cette notion intuitive de «vitesse» de divergence ou de convergence sera formalisée et étudiée en sup. Notez pour finir que le réel

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n)\right)$$

est connu sous le nom de constante d'Euler-Mascheroni. On sait très peu de choses sur elle; on ne sait même pas si ce réel est un rationnel. La dernière question assure juste que $\gamma \in [0\,;1]$.

Exercice 182

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $u_n \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel appartenant à $[1\,;2]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \mathrm{e}^{-x\ln(p)}$$

Les exercices 181 et 182 sont deux études de convergence de la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque x vaut 1 ou 2. Vous généraliserez en sup les résultats obtenus dans ces exercices en montrant que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $x > 1$. Pour chaque valeur de x appartenant à $]1\,;+\infty[$, on appelle $\zeta(x)$ la limite de cette suite. On construit ainsi une fonction $x \mapsto \zeta(x)$, connue sous le nom de fonction «zéta» de Riemann, qui joue un rôle important en mathématiques, en particulier en théorie des nombres. Il existe des dizaines de formules liées à cette fonction. Vous montrez par exemple en sup le surprenant résultat suivant

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{c'est à dire} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 183

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à $n-1$ et pour tout $k \in \mathcal{A}$, on pose

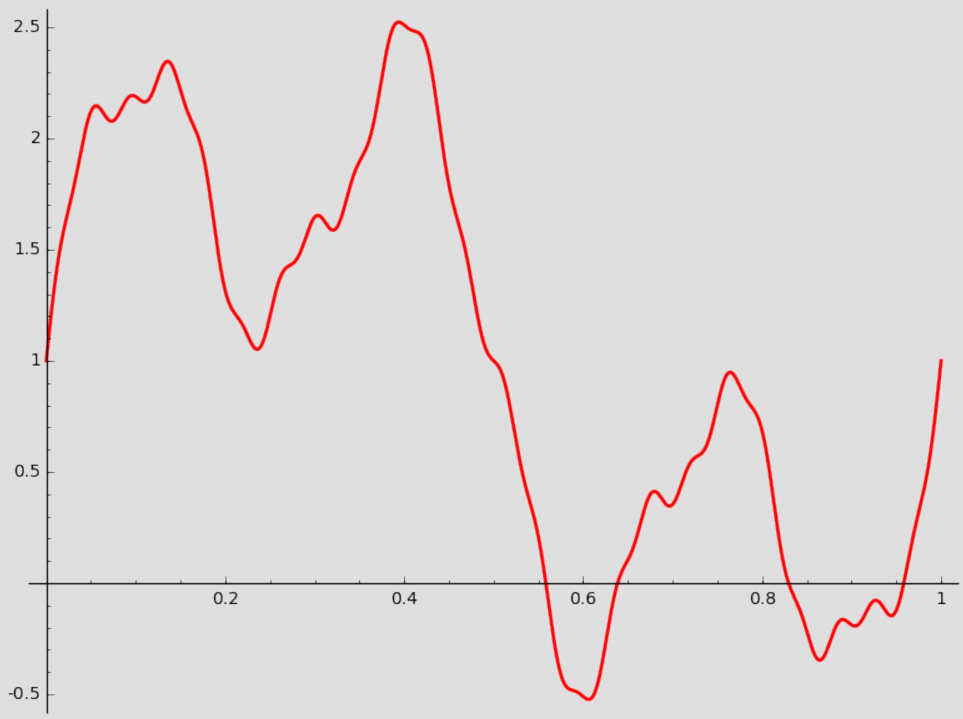
$$b_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=0}^{n-1} a_p \exp\left(\frac{2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right)$$

Montrer que pour tout $k \in \mathcal{A}$, $a_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} b_p \exp\left(\frac{-2\mathrm{i}pk\pi}{n}\right)$.

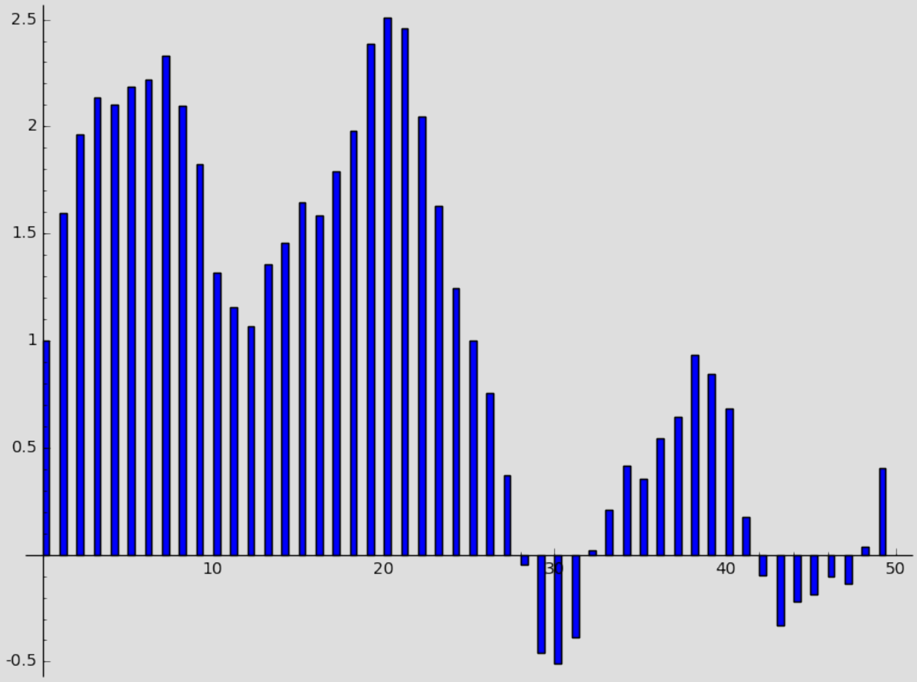
On considère une fonction périodique f précisant l'évolution en fonction du temps d'une grandeur périodique quelconque: tension au bornes d'un dipôle électrique dans un circuit alimenté par un courant périodique, élongation d'un ressort soumis à une force périodique... On échantillonne le signal étudié, c'est à dire que l'on mesure la valeur prise par f en des temps $t_0, t_1, \dots, t_n$ régulièrement espacés sur un intervalle de la période T du signal. On construit ainsi un échantillon $(a_0, \dots, a_{n-1})$ du signal. La suite finie $(b_0, \dots, b_n)$ définie dans l'exercice 183 permet alors de déterminer la fréquence dominante f du signal et ses harmoniques. Pour préciser cette idée, considérons la fonction suivante, dont une période est 1.

$$f : t \mapsto 1 + \sin(2\pi t) + 0{,}8\,\sin(6\pi t) + 0{,}2\,\sin(16\pi t) + 0{,}05\,\sin(48\pi t)$$

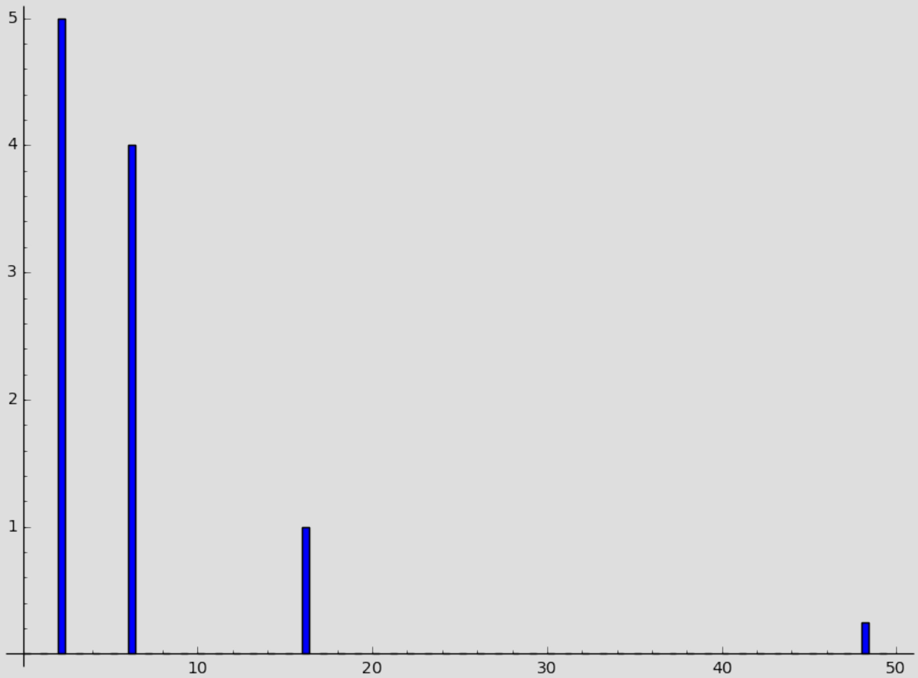
On a tracé ci-dessous le graphe de la fonction f sur $[0\,;1]$, que l'on échantillonne en 50 points.



On peut alors représenter notre échantillon à l'aide d'un diagramme en bâtons en traçant, pour tout entier naturel p plus petit que 49, un bâton à l'abscisse p de hauteur a_p. On on obtient ainsi



On peut alors représenter les termes de la suite $big(|b_0|, \ldots, |b_{n-1}|\big)$ sous la même forme que ceux de l'échantillon étudié pour obtenir le diagramme suivant.



Chaque module d'un terme de la suite $(b_0, \ldots, b_p)$ donne des renseignements sur une composantes sinusoïdales du signal initial. On observe ainsi que le signal initial est en effet la superposition de quatre composantes sinusoïdales. On sait que la fréquence de la deuxième composante est le triple de celle de la première puisque l'abscisse du deuxième bâton est le triple de celle du premier. De plus, l'amplitude de la deuxième composante 80% de celle de la première puisque la hauteur du deuxième bâton est $4/5$ de celle du premier. Le troisième bâton correspond de même à une troisième composante du signal de fréquence 8 fois supérieure à celle de la première composante et d'amplitude 5 fois plus faible. Enfin, le quatrième bâton correspond à une quatrième composante du signal de fréquence 24 fois supérieure à celle de la première composante et d'amplitude 20 fois plus faible. Bien entendu, l'exemple est artificiel puisque l'on connaissait une expression analytique du signal initial. Et cette brève remarque passe sur les difficultés liées au choix de l'intervalle et la fréquence d'échantillonnage d'un signal que l'on ne peut que mesurer. Ceci étant, l'idée générale est correcte et la transformation de l'échantillon $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ d'un signal en la suite $(b_0, \ldots, b_{n-1})$, appelée transformation de Fourier discrète, est très utile en physique et en informatique. Dans ce cadre, l'exercice 183 montre que l'on peut reconstruire un signal à partir de la donnée de sa transformée de Fourier discrète. Notez que la donnée du diagramme précédent est insuffisant puisqu'il ne donne que les modules des complexes $b_0, \ldots, b_p$.

Exercice 184

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3(x-1)^3$.

1. Dériver trois fois la fonction f; on appelle g la fonction obtenue.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Vous en chercherez une racine rationnelle x_0 puis déterminerez trois réels a, b et c tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$; ces trois réels peuvent être déterminés «de tête» en effectuant des développements partiels, ce qui justifie la présence de l'icône «pingouin qui réfléchit».

Soit a, b, et c trois réels tels que $0 \leqslant a < b < c \leqslant 1$. On considère les fonctions polynomiales

$$P_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} \end{array}, \quad P_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} \end{array} \quad \text{et} \quad P_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \end{array}$$

Vous démontrerez en sup sans faire aucun calcul, que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 2, et pour tout réel x, $P(x) = P(a)P_1(x) + P(b)P_2(x) + P(c)P_3(x)$. Une fois généralisée, cette écriture est souvent utile en mathématiques; elle est due au mathématicien italien Joseph-Louis Lagrange. Si on appelle a_1, a_2 et a_3 les intégrales respective de P_1, P_2 et P_3 sur $[0\,;1]$, on obtient alors par simple intégration de la formule précédente que pour tout fonction polynomiale P de degré au plus 2,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = a_1P(a) + a_2P(b) + a_3P(c)$$

On peut même montrer que si on choisit $b = 1/2$ et a et c tels que $a + c = 1$, la formule précédente est valable aussi pour les fonctions polynomiale de degré au plus 3. En choisissant par exemple $a = 0$, $b = 1/2$ et $c = 1$, on obtient la formule dite «des trois niveaux». Pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 3,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}P(0) + \frac{2}{3}P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}P(1)$$

Cette formule permet par exemple aux terrassiers de calculer rapidement le volume de terre que l'on peut stocker sur une surface donnée. Mais si les formules ainsi obtenues en faisant varier a, b et c sont exactes pour calculer des intégrales de fonctions polynomiales de degré au plus 2 voire 3, on peut trouver des polynômes de degré au moins 4 pour lesquels elles ne sont plus valides a priori. La question s'est donc posée de savoir s'il existait des choix pour a, b et c qui permettent d'obtenir des formules exactes pour des fonctions polynomiales de degré plus élevé. Étrangement, si vous utilisez pour valeurs de a, b et c les trois solutions de l'équation étudiée dans l'exercice 184, vous obtenez une formule valable pour toutes les fonctions polynomiales jusqu'au degré 5. Plus précisément, pour toute fonction polynomiale P de degré au plus 5,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{18}P\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}}\right) + \frac{4}{9}P\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{18}P\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}\right)$$

Vous pourrez généraliser cette formule surprenante en sup. En effet, si n est un entier naturel non nul et si on dérive n fois la fonction $x \mapsto x^n(x-1)^n$, on obtient une fonction polynomiale g de degré n qui s'annule exactement n fois, tous les points d'annulation étant situés dans $]-1\,;1[$. Si on note $x_1, \ldots, x_n$ les points d'annulation de g, que l'on classe par ordre croissant, on peut calculer explicitement n réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que pour toute fonction polynomiale P de degré au plus $2n - 1$,

$$\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} a_kP(x_k)$$

Les fonctions construites pour chaque valeur de n sont liées à des polynômes célèbres, les polynômes de Tchebychev, ainsi nommés en l'honneur du mathématicien russe Pafnouti Lvovitch Tchebychev. Ces polynômes apparaissent dans beaucoup de domaines des mathématiques.

Exercice 185

Pour toute fonction f, on note $f^{(1)}$ la dérivée de f, $f^{(2)}$ la dérivée de $f^{(1)}$, $f^{(3)}$ la dérivée de $f^{(2)}$... et de proche en proche on note $f^{(k+1)}$ la dérivée de $f^{(k)}$ pour tout entier naturel non nul k tant que les calculs ont un sens.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+a} \end{array}$$

   a. Déterminer les expressions explicites de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.

   b. En vous inspirant des expressions de la question précédente, déterminer l'expression explicite de $f^{(k)}$ pour tout entier naturel non nul k et prouver la formule proposée.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'expression explicite de $g^{(k)}$ lorsque

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x+3}{3x-2} \end{array}$$

Exercice 186

Soit a et b deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

On suppose que la fonction a admet une primitive A et que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{A(x)}b(x)$ admet une primitive B.

1. Montrer que la dérivée de la fonction $U : x \mapsto \mathrm{e}^{A(x)}f(x) - B(x)$ est nulle.
2. Montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = \big(B(x) + K\big)\mathrm{e}^{-A(x)}$.
3. Dans les deux questions qui précèdent, on a vérifié que si f est une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, alors il existe une constante K telle que f soit la fonction $x \mapsto \big(B(x)+K\big)\mathrm{e}^{-A(x)}$. On considère réciproquement un réel K. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \big(B(x)+K\big)\mathrm{e}^{-A(x)}$ est telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g'(x) + a(x)g(x) = b(x)$.

Finalement, on a montré que l'ensemble des fonctions réelles f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ est l'ensemble

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \big(B(x)+K\big)\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array} , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$. $xf'(x) - (x+1)f(x) = x\mathrm{e}^x$

Dans cette exercice, on étudie des équations différentielles, qui sont des équations dont les solutions sont des fonctions. L'étude de telles équations est fondamentale car la plupart des phénomènes physiques sont modélisés par des grandeurs qui vérifient des équations différentielles, et que l'on doit expliciter ou dont il faut au moins déterminer des propriétés. L'algorithme proposé dans l'exercice 186 sera revu et complété en sup. En sup seront aussi mis en place énormément d'outils permettant de préciser les propriétés des solutions des équations différentielles que l'on ne sait pas résoudre explicitement.

Lexique

Condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante

Une assertion logique est une phrase mathématique vraie ou fausse, qui peut dépendre de variables. Si A et B sont deux assertions logiques telles que la véracité de A entraîne celle de B, on dit que

- B est une condition nécessaire pour A.
- A est une condition suffisante pour B.

Considérons par exemple les assertions suivantes, dépendant de trois variables réelles x et y.

$$\text{(A)} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. , \qquad \text{(B)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. , \qquad \text{(C)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right. ,$$

Si l'assertion (A) est vraie alors (B) l'est. Autrement dit (A) est une condition suffisante pour (B) et (B) est une condition nécessaire pour (A). Mais si $x = -3$, $y = 2$ et $z = 1$ alors les relations de (B) sont vraies et celles de (A) sont fausses. Autrement dit lorsque (B) est vraie, (A) ne l'est pas forcément. L'assertion (A) n'est donc pas une condition nécessaire pour (B).

De manière analogue, si l'assertion (B) est vraie alors (C) l'est; il suffit d'ajouter les deux relations de (B) pour trouver la deuxième relation de (C). L'assertion (B) est donc une condition suffisante pour (C). De plus lorsque (C) est vraie, (B) l'est; il suffit de soustraire la première relation de (C) à la deuxième pour trouver la deuxième relation de (B). L'assertion (B) est donc une condition nécessaire pour (C). On dit alors que (B) est une condition nécessaire et suffisante pour (C), ou que les assertions (B) et (C) sont équivalentes.

On revient au cas général de deux assertions (A) et (B).

- Pour montrer que A est une condition nécessaire pour B, on suppose que (A) est vraie et on essaye d'en déduire (B); on dit que l'on raisonne par conditions nécessaires. Montrons par exemple que pour tout $x \in [-3/2\,;+\infty[$, si $\sqrt{2x+3} - x = 0$ alors $x = 3$ ou $x = -1$. Autrement dit, montrons que lorsque x est un réel plus grand que $-3/2$, l'assertion $x \in \{-1, 3\}$ est une condition nécessaire pour que $\sqrt{2x+3} - x = 0$. Soit donc $x \in [-3/2\,;+\infty[$ tel que $\sqrt{2x+3} - x = 0$.
  $$\begin{array}{ll} & \sqrt{2x+3} = x \\ \text{donc} & \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = x^2 \\ \text{donc} & 2x + 3 = x^2 \\ \text{donc} & x^2 - 2x - 3 = 0 \end{array}$$
  On note que -1 est un point d'annulation de la fonction $x \mapsto x^2 - 2x - 3$, ce qui permet de trouver l'autre point d'annulation de cette fonction de manière classique. Finalement, on déduit de notre contrainte sur x que $x \in \{-1, 3\}$. Notez pour conclure que l'assertion $x \in \{-1, 3\}$ n'est pas une condition suffisante pour que $\sqrt{2x+3} - x = 0$ puisque $\sqrt{2 \times (-1) + 3} - (-1) = 2$.
- Pour montrer que A et B sont équivalentes, on peut travailler en deux temps en suivant le plan de preuve du point précédent: on montre que (A) est une condition nécessaire pour (B) puis que (B) est une condition nécessaire pour (A). On peut aussi travailler par équivalences ou par conditions nécessaires et suffisantes, c'est à dire montrer que (A) et (B) ont la même valeur logique pour tous les jeux de variables possibles. Ce genre de preuve est beaucoup plus délicat car on manipule alors des assertions logiques de valeurs inconnues; on travaillera ce problème de manière approfondie en sup.

Une équation est une assertion dépendant d'une ou plusieurs variables appartenant à un domaine fixé D, vraie lorsque ces variables prennent des valeurs précises inconnues à priori; ces variables sont appelées les inconnues. Les solutions d'une équation sont les valeurs que peuvent prendre les inconnues pour que l'égalité considérée soit vraie. Résoudre une équation consiste à trouver toutes ses solutions, c'est à dire à déterminer une partie S de D telle que l'assertion «$x \in S$» soit une condition nécessaire et suffisante pour que l'assertion (E) soit vraie en x. Lorsque l'on ne veut ou ne peut pas résoudre une équation par équivalences, on peut chercher une condition nécessaire sur l'inconnue pour qu'elle soit solution, puis faire une réciproque. Considérons par exemple l'équation

$$(E)\ \sqrt{2x+3} - x = 0,$$

d'inconnue $x \in [-3/2\,;+\infty[$ dont on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions. On a vérifié que tout élément de $\mathcal{S}$ appartient forcément à $\{-1, 3\}$, autrement dit que $\mathcal{S} \subset \{-1, 3\}$. Pour conclure il suffit de tester les solutions potentielles trouvée, à savoir -1 et 3. On a déjà noté que -1 ne vérifie pas l'équation (E). En revanche $\sqrt{2 \times 3 + 3} - 3 = 0$ donc 3 est une solution de (E). Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \{3\}$.

Division euclidienne

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times Z^*$. On peut montrer qu'il existe un unique $(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant |b| - 1$. On dit qu'on a effectué la division euclidienne du dividende a par le diviseur b pour obtenir le quotient q et le reste r. Notez que dans ce cadre a et r sont en relation pour la congruence modulo b. Donc une fois fixé un entier naturel n non nul, tout entier a est congru à un unique entier appartenant à $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ modulo n, à savoir le reste de la division euclidienne de a par n. Fixons par exemple $n = 7$. Comme $74 = 7 \times 10 + 4$ on sait que $74 \equiv 4\,[7]$. Comme $-58 = 7 \times (-9) + 5$ on sait que $-58 \equiv 5\,[7]$.

Expression algébrique

Une expression algébrique est une expression construite à partir de nombres et de variables en n'utilisant que des additions et des produits. C'est donc une **expression polynomiale** en toutes ses variables.

Expression polynomiale

Une expression polynomiale en une variable x est une expression obtenue en n'effectuant que les sommes et des produits de x et d'objets indépendants de x. Par exemple, si x est un réel, $3(x+1)^2 - 4x$ est une expression polynomiale en x, alors que $x - 4x^2 \sin(x)$ n'en est pas une à cause de la présence de $\sin(x)$. Il faut prendre garde que la notion d'expression polynomiale est relative à une variable. Par exemple si x, y et z sont trois complexes, l'expression

$$\frac{x^2 y + 2z(x+y)}{z+4} - \frac{xy}{z} - 7x^4$$

est polynomiale en x et en y mais pas en z. La notion d'expression polynomiale est en fait très formelle; on ne s'intéresse pas réellement à la nature de la variable relativement à laquelle on regarde si l'expression étudiée est polynomiale, mais plutôt aux opérations effectuées avec cette variable. Vous rencontrez donc aussi la notion d'expression polynomiale en un objet. Par exemple, si x est un complexe, l'expression

$$7x^6 - 4x^4 + 3$$

est polynomiale en x mais aussi «en x^2». Cela signifie que si on substitue une lettre y à x^2, on obtient une expression construite à l'aide de sommes et de produits de y et d'objets indépendants de y, à savoir $7y^3 - 4y^2 + 3$. De manière analogue, si x est un réel, l'expression

$$3\big(\sin(x)\big)^4 - \sin(x)\big(5\sin(x) + 4\big)$$

est polynomiale «en $\sin(x)$». Cela signifie que si on substitue une lettre y à $\sin(x)$, on obtient une expression construite à l'aide de sommes et de produits de y et d'objets indépendants de y, à savoir $3y^4 - y(5y+4)$.

Expression rationnelle

Une expression rationnelle en une variable x est une expression obtenue en n'effectuant que les sommes, des produits et des quotients de x et d'objets indépendants de x. Par exemple, si x est un réel, $\dfrac{3(x+1)^2}{4x^2+1}$ est une expression rationnelle en x, alors que $x - 4x^2 \sin(x)$ n'en est pas une à cause de la présence de $\sin(x)$. Il faut prendre garde que la notion d'expression rationnelle est relative à une variable. Par exemple si x, y et z sont trois réels, l'expression

$$\frac{x^2 \sin(y) + 2xz}{3x^3 y + z^2 + 1}$$

est rationnelle en x et en z mais pas en y. La notion d'expression rationnelle est en fait très formelle; on ne s'intéresse pas réellement à la nature de la variable relativement à laquelle on regarde si l'expression étudiée est rationnelle, mais plutôt aux opérations effectuées avec cette variable. Vous rencontrez donc aussi la notion d'expression rationnelle en un objet. Par exemple, si x est un réel, l'expression

$$\frac{3\big(\mathrm{e}^x + 1\big)^4}{\mathrm{e}^{2x} + 1} - 4\mathrm{e}^x$$

est polynomiale «en e^x». Cela signifie que si on substitue une lettre y à e^x, on obtient une expression construite à l'aide de sommes, de produits et de quotients de y et d'objets indépendants de y, à savoir $\dfrac{3(y+1)^4}{y^2+1} - 4y$.

Identification

Certain objets mathématiques sont uniquement définis. Lorsque l'on dispose de deux expressions pour ce type d'objet, on sait que ces deux expressions sont les mêmes. Faire une identification consiste alors à écrire l'égalité entre les deux expressions. On peut par exemple montrer que les coefficients d'une expression polynomiale écrite sous forme développée sont uniques. Donc si on trouve deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(a+1)x^2 + (a+b)x = 4x^2 + 5x$, on peut identifier les coefficients de ces expressions développées et écrire que $a+1 = 4$ et $a+b = 5$; Autrement dit, on est sûr que $a = 3$ et $b = 2$.

Récurrence

Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à m, on introduit une assertion logique H_n, c'est à dire une phrase mathématique pouvant être vraie ou fausse, dépendant de n. On démontre que si

(1) L'assertion H_m est vraie,

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et H_n est vraie, l'assertion H_{n+1} est vraie,

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant m$, l'assertion H_n est vrai. Cela semble intuitif: H_m est vraie par hypothèse. On applique alors la contrainte (2), qui assure que H_{m+1} est vraie. On applique encore la contrainte (2), qui assure que H_{m+2} est vraie... et on continue ainsi. Nous verrons en sup que cette idée n'est pas du tout intuitive et a posé d'énormes problème tant mathématiques que philosophique. Ceci étant, elle est valide et est la source du raisonnement par récurrence. pour montrer que toutes les assertions de la famille $(H_n)_{n \geqslant m}$ sont vraies, on vérifie les contraintes (1) et (2). Une récurrence de base se fait donc en quatre étapes, en suivant le schéma ci-dessous dans lequel le symbole «. . . » remplace les preuves adaptées aux assertions manipulées, qui sont représentées par un trait gras.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$, on pose H_n :	*Introduction de la famille d'assertions*
$\cdots$ donc H_m est vraie.	*Initialisation*
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$ et H_n soit vraie.	*Hérédité*
$\vdots$	
Donc H_{n+1} est vraie.	
Le principe de récurrence assure que pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant m$, H_n est vraie.	*Conclusion*

Suite géométrique

Soit a un complexe non nul et b un complexe. On appelle suite géométrique de premier terme b et de raison a la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = b$ et par la relation de récurrence: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a \times u_n$. On démontre que cette suite est $\left(b \times a^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$.