Expression explicite de suites

Expression explicite de suites	QUIZZ
Expression explicite de u telle que : $u_0 = -2\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 7 - 2u_n$	Indication : suite arithmético-géométrique Réponse : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = \frac{7}{3} - \frac{13}{3}(-2)^{n}$
Expression explicite de u telle que : $u_0 = -1, u_1 = 2\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - 2u_n$	Indication : suite récurrente d'ordre 2 avec $\Delta_{e.c} < 0$. Réponse : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = \left(sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$
Expression explicite de u telle que : $u_1 = -1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n + 5u_{n+1} = 0$	Indication : suite géométrique. Réponse : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = 5\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}$
Expression explicite de u telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = n^2 - 3n - 4$	Indication : $Si\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\ alors\ S_n - S_{n-1} = u_n$. Réponse : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = 2n - 4$
Expression explicite de u telle que : $u_0 = 1, u_1 = -1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$	Indication : suite récurrente d'ordre 2 avec $\Delta_{e.c} = 0$. Réponse : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = \left(\frac{3}{2}n + 1\right)2^{n}$
Expression explicite de u telle que : $u_0 = -1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n^2 + n$	Indication : $u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k$ Réponse : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = -1 + \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$
Expression explicite de u telle que : $u_2 = -1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 + u_{n+1}$	Indication : suite arithmétique. Réponse : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} = 3 - 2n$

Expression explicite de u telle que : $$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \prod_{k=1}^{n} u_k = n^2 + n$$	Indication : $Si\ P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k \neq 0\ alors\ \frac{P_n}{P_{n-1}} = u_n.$ Réponse : $$\boldsymbol{u_1 = 2\ et\ \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, u_n = \frac{n+1}{n-1}}$$
Expression explicite de u telle que : $$u_0 = -1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)2^n$$	Indication : $\frac{u_n}{u_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$ Réponse : $$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -(n!) \times 2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$
Expression explicite de u telle que : $$u_0 = -1\ et\ u_1 = 1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2 + 3u_n$$	Indication : suite récurrente d'ordre 2 avec $\Delta_{e.c} > 0$ avec second membre. Réponse : $$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -1 + 3^{\frac{n-1}{2}} - (-1)^n 3^{\frac{n-1}{2}}}$$
Expression explicite à l'aide de factorielle de $u_{2n}\ et\ u_{2n+1}$ lorsque u vérifie : $$u_0 = \frac{\pi}{2}\ et\ u_1 = 1 \quad et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$	Indication : par itération (Cf intégrale de Wallis) Réponse : $$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}\ et\ u_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$$
Expression explicite de u telle que : $$u_0 = 1\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 = u_n^2 + n$$	Indication : télescopage pour obtenir u_n^2 (calculer $\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2$) Réponse : $$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{\frac{n^2 - n + 2}{2}}}$$
Expression explicite de u telle que : $$u_0 = -1 \quad et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 {u_n}^4 = e$$	Indication : introduire $v_n = \ln(-u_n)$+arithmético-géométrique Réponse : $$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -e^{\frac{1-(-2)^n}{6}}}$$
Expression explicite de u telle que : $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\ où\ x\ réel$$	**Indication** : formule d'angle double et suite géométrique **Réponse :** soit n un entier naturel. $u_{n+1} = \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ $= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2}u_n.$ Donc u est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. $$\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, u_n} = \frac{1}{2^n}u_0 = \frac{1}{2^n}sin(x)cos(x) = \boldsymbol{\frac{sin(2x)}{2^{n+1}}}$$

Suites numériques	
Donner la définition d'une suite réelle ou complexe admettant une limite finie L .	
Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, \qquad -10^{-10} < \frac{(-1)^n}{n} < 10^{-10}.$	
Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que : $\forall n \geq N, \qquad \frac{27}{10} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{14}{5}.$	
Donner la définition d'une suite réelle qui tend vers $+\infty$.	
Donner la définition d'une suite réelle qui tend vers $-\infty$.	
Donner la définition de deux suites adjacentes et la propriété fondamentale de deux telles suites.	
Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ et $u_0 = 0.$ Justifier que u est monotone et tend vers 2 ou $+\infty$.	

Soit u la suite définie par : $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \quad \text{et} \quad u_0 = 0.$$ Justifier que $(u_{2n})\ et\ (u_{2n+1})$ sont monotones de monotonie contraire et (u_n) tend vers $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.	
Reconnaitre une somme de Riemann pour calculer la limite de la suite u telle que : $$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}.$$	