Sommes et produits finis.	[Sommes et produits finis PCSI (genially.com)](genially.com)
Enoncer la formule des sommes des entiers de 0 à n.	Soit n un entier naturel. $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.$
Enoncer la formule des sommes des carées de entiers de 1 à n.	Soit n un entier naturel. $\sum_{j=0}^{n} j^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$
Enoncer la formule générale des sommes géométriques.	Soit x un réel et n un entier naturel. $si\ x \neq 1\ alors\ \sum_{j=p}^{n} x^{j} = \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1} x^{p}.$ $si\ x = 1\ alors\ \sum_{j=p}^{n} x^{j} = n - p +. 1$
Enoncer la formule de Pascal.	Pour tous entiers naturels n et p, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$
Enoncer la formule du binôme de Newton.	Pour tout entier naturel n et tous réels x et y, $(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}.$
Enoncer la formule d'interversion des sommes doubles.	Pour tous entiers naturels n et p et tous réels a_{ij}, $\sum_{\substack{i \in \{0,,\dots,,n\} \\ j \in \{0,,\dots,p\}}} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{p} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{p} \left(\sum_{i=0}^{n} a_{ij} \right)$ $\sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^{p} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=0}^{j-1} a_{ij} \right)$

Enoncer la formule de somme télescopique.	Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$ et tous réels a_i, $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} a_i - a_{i+1} = a_p - a_{n+1}.$ Ou encore $\sum_{i=p}^{n} a_i - a_{i-1} = a_n - a_{p-1}.$
Calculer $\displaystyle\sum_{i=6}^{99} (-1)^k k.$	$\displaystyle\sum_{i=6}^{99} (-1)^k k = \underbrace{6-7}_{=-1} + \underbrace{8-9}_{=-1} + \underbrace{10-11}_{=-1} + \cdots + \underbrace{98-99}_{=-1}$ $= \underbrace{-1-1-\cdots-1}_{\frac{99-6+1}{2}=47\ termes}$ $= -47.$
Calculer $\displaystyle\sum_{i=6}^{99} 4.$	$\displaystyle\sum_{i=6}^{99} 4 = 4 \times (99-6+1) = 4 \times 94 = 376.$
Calculer $\prod_{i=6}^{99} 4.$	$\prod_{i=6}^{99} 4 = 4^{99-6+1} = 4^{94}$
Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{34} \frac{1}{2^{i+1}}.$	$\displaystyle\sum_{i=0}^{34} \frac{1}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{34} \frac{1}{2^i} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{34} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{35}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{35}.$
Soit n un entier naturel non nul. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2k} 3^{k+2}.$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{2k} 3^{k+2} = \sum_{i=1}^{n} 4^k \times 3^k \times 9 = 9 \times \sum_{i=1}^{n} (4 \times 3)^k$ $\displaystyle = 9 \times \sum_{i=1}^{n} 12^k \stackrel{somme\ géométrique}{=} 9 \times \frac{12^n - 1}{12 - 1} \times 12$ $\displaystyle = \frac{108}{11}(12^n - 1).$
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k-2).$	$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k-2) = \sum_{i=0}^{n-2} i \stackrel{somme\ des\ entiers}{=} \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$

Soit n un entier naturel. Calculer $$\sum_{k=0}^{n}(k+3)^2.$$	$$\sum_{k=0}^{n}(k+3)^2=\sum_{j=3}^{n+3}j^2=\left(\sum_{j=1}^{n+3}j^2\right)-1-4 \underset{\substack{\text{somme des carrées}\\ \text{des entiers}}}{\widehat{=}} \frac{(n+3)(n+4)(2(n+3)+1)}{6}-5 = \frac{(n+3)(n+4)(2n+7)}{6}-5.$$
Soit n un entier naturel. Calculer $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^k.$$	$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^k1^{n-k}\overset{FBN}{\widehat{=}}(5+1)^n=6^n.$$
Soit n un entier naturel. Calculer $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}5^{2k+1}.$$	$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}5^{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}25^k\times 5 = 5\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-25)^k1^{n-k} \overset{FBN}{\widehat{=}} 5\times(-25+1)^n=5\times(-24)^n.$$
Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$. Calculer $$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}3^k.$$	$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}3^k=\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\right]-\binom{n}{0}3^0-\binom{n}{1}3^1-\binom{n}{n}3^n = \left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k1^{n-k}\right]-1-3n-3^n \overset{FBN}{\widehat{=}} (3+1)^n-1-3n-3^n=4^n-1-3n-3^n.$$
Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$. Calculer $$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k-1}3^k.$$	$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k-1}3^k \underbrace{=}_{\substack{\text{chgt}\\ \text{d'indice}\\ j=k-1\\ k=j+1\\ k=2\Leftrightarrow j=1\\ k=n\Leftrightarrow j=n-1}} \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}3^{j+1}=\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}3^j\times 3 = 3\times\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}3^j=3\times\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}3^j1^{n-j}\right)-\binom{n}{0}3^0-\binom{n}{n}3^n\right]= \overset{FBN}{\widehat{=}} 3\times[(3+1)^n-1-3^n]=3\times[4^n-1-3^n].$$
Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$. Calculer $$\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}3^k.$$	$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}3^k=\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}3^k\right]-\binom{n+1}{0}3^0-\binom{n+1}{n+1}3^{n+1} = \left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}3^k1^{n+1-k}\right]-1-3^{n+1} \overset{FBN}{\widehat{=}} (3+1)^{n+1}-1-3^{n+1}=4^{n+1}-1-3^{n+1}$$
Soit n un entier naturel. Calculer $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$	$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}\overset{FBN}{\widehat{=}}(1+1)^n=2^n.$$

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k-1}$.	$\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k-1} \underbrace{=}_{\substack{\text{cgt d'indice}\\ j=k-1 \text{ i.e. } k=j+1\\ [k=2\Leftrightarrow j=1] \text{ et } [k=n\Leftrightarrow j=n-1]}} \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n+1}{j} = \left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\right] - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{n} - \binom{n+1}{n+1} = \left[\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}1^{j}1^{n+1-j}\right] - 1 - (n+1) - 1 \overset{FBN}{\triangleq} (1+1)^{n+1} - n - 3 = 2^{n+1}-n-3.$
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n}$.	$\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{2n}\underbrace{\binom{k+1}{n+1}}_{u_{k+1}} - \underbrace{\binom{k}{n+1}}_{u_k} \underbrace{=}_{\substack{\text{en posant}\\ u_k=\binom{k}{n+1}}} \sum_{k=n}^{2n} u_{k+1}-u_k \underbrace{=}_{\text{télescopage}} u_{2n+1}-u_n = \binom{2n+1}{n+1} - \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0} = \binom{2n+1}{n+1}.$
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \underbrace{=}_{\substack{\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}\\ =\frac{(k+1)}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}}} \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{k}}_{u_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{u_{k+1}} \underbrace{=}_{\substack{\text{en posant}\\ u_k=\frac{1}{k}}} \sum_{k=1}^{n} u_k-u_{k+1} \underbrace{=}_{\text{télescopage}} u_1-u_{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$
Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \underbrace{=}_{\substack{\text{quantité}\\ \text{conjuguée}\\ \sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}}} \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k} \underbrace{=}_{\substack{\text{en posant}\\ u_k=\sqrt{k}}} \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}-u_k \underbrace{=}_{\text{télescopage}} u_{n+1}-u_0 = \sqrt{n+1}.$
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$. Calculer $\sum_{1\leq k\leq j\leq n}\frac{k}{j}$	$\sum_{1\leq k\leq j\leq n}\frac{k}{j} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{j}\frac{k}{j}\right] = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left[\sum_{k=1}^{j}k\right] = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left[\frac{j(j+1)}{2}\right] = \sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}k = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n+1}k\right)-1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] = \frac{(n+3)n}{4}$
Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{j+k}$.	$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{j+k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{j}\times 2^{k} = \left[\sum_{k=0}^{n}2^{k}\right]\times\left[\sum_{j=0}^{n}2^{j}\right] = \frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = (2^{n+1}-1)^{2}.$
Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{0\leq j\leq k\leq n}\binom{k}{j}e^{j+k}$.	$\sum_{0\leq j\leq k\leq n}\binom{k}{j}e^{j+k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{j+k} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{k}e^{j} = \sum_{k=0}^{n}e^{k}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{j}\right] = \sum_{k=0}^{n}e^{k}\left[\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{j}1^{k-j}\right] = \sum_{k=0}^{n}e^{k}[1+e]^{k} = \sum_{k=0}^{n}[e(1+e)]^{k} \overset{\text{somme géométrique}}{\triangleq} \frac{[e(1+e)]^{n+1}-1}{e(1+e)-1}.$

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^{n} ln(k+3) - ln(k-1).$	$\sum_{k=2}^{n} ln(k+3) - ln(k-1) = \sum_{k=2}^{n} ln(k+3) - \sum_{k=2}^{n} ln(k-1)$ $\overset{\text{réécriture des 2 sommes}}{\triangleq} \sum_{j=5}^{n+3} ln(j) - \sum_{j=1}^{n-1} ln(j) = \sum_{j=n}^{n+3} ln(j) - \sum_{j=1}^{4} ln(j)$ $= ln(n+3) + ln(n+2) + ln(n+1) + ln(n) - ln(4) - ln(3) - ln(2) - ln(1)$ $= ln(n+3) + ln(n+2) + ln(n+1) + ln(n) - 3ln(2) - ln(3)$
Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k^2+2k}{k^2+4k+3}\right).$	$\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k^2+k}{k^2+4k+3}\right) = \sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)(k+3)}\right)$ $= \sum_{k=1}^{n} ln(k) + ln(k+2) - ln(k+1) - \ln(k+3)$ $= \sum_{k=1}^{n} [ln(k) - ln(k+1)] + \sum_{k=1}^{n} [ln(k+2) - \ln(k+3)]$ $\overset{\text{téléscopage}}{\triangleq} ln(1) - ln(n+1) + ln(3) - ln(n+3)$
Calculer $\prod_{i=0}^{34} 2^{i+1}.$	$\prod_{i=0}^{34} 2^{i+1} = \prod_{i=0}^{34} 2^{i} \times 2 = \left[\prod_{i=0}^{34} 2^{i}\right] \times \left[\prod_{i=0}^{34} 2\right] = 2^{\sum_{i=0}^{34} i} \times 2^{35}$ $= 2^{\frac{34\times 35}{2}} \times 2^{35} = 2^{17\times 35+35} = 2^{18\times 35}.$ Ou $\prod_{i=0}^{34} 2^{i+1} = \prod_{j=1}^{35} 2^{j} = 2^{\sum_{i=1}^{35} i} = \cdots$
Soit N un entier naturel non nul. Calculer $\prod_{k=0}^{N} e^{k^2}.$	$\prod_{k=0}^{N} e^{k^2} = e^{\sum_{k=0}^{N} k^2} = e^{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}$
Calculer $\prod_{i=2}^{34} \frac{i+3}{i-1}.$	$\prod_{i=2}^{34} \frac{i+3}{i-1} = \frac{\prod_{i=2}^{34} i+3}{\prod_{i=2}^{34} i-1} \overset{\text{réécriture des deux produits}}{\triangleq} \frac{\prod_{k=5}^{37} k}{\prod_{k=1}^{33} k} = \frac{37\times 36\times 35\times 34}{1\times 2\times 3\times 4}$ $= \frac{37\times 36\times 35\times 34}{1\times 2\times 3\times 4} = 37\times 3\times 35\times 17.$
Soit N un eniter naturel non nul. Calculer $\prod_{i=1}^{N} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$	$\prod_{i=1}^{N} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$ $= \prod_{i=1}^{N} \frac{k(k+1)+1}{k(k-1)+1} \underbrace{=}_{\substack{\text{en posoant} \\ u_k = k(k-1)+1}} \prod_{i=1}^{N} \frac{u_{k+1}}{u_k} \overset{\text{télescopage}}{\triangleq} \frac{u_{N+1}}{u_1}$ $= \frac{N(N+1)+1}{1} = N^2+N+1.$
Soit N un eniter naturel supérieur à 2. Ecrire à l'aide de factorielles, $\prod_{k=2}^{N} (2k).$	$\prod_{k=2}^{N} (2k) = \left[\prod_{k=2}^{N} 2\right] \times \left[\prod_{k=2}^{N} k\right] = 2^{N-1} \times (N!)$

<table>
<tr>
<td>

Soit N un eniter naturel supérieur à 2. Ecrire à l'aide de factorielles,

$$\prod_{k=2}^{N} \frac{2k}{2k+1}.$$

</td>
<td>

$$\prod_{k=2}^{N} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2N-2) \times 2N}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2N-1) \times (2N+1)}$$

$$= \frac{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times \ldots \times (2N-2)^2 \times (2N)^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times \ldots \times (2N-1) \times 2N \times (2N+1)}$$

$$= \frac{\left(2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2N-2) \times (2N)\right)^2}{(2N+1)!}$$

$$= \frac{\left[(2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \ldots \times (2 \times (N-1)) \times (2 \times N)\right)^2}{(2N+1)!}$$

$$= \frac{\left[2^N \times 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (N-1) \times N\right]^2}{(2N+1)!} = \frac{[2^N \times N!]^2}{(2N+1)!} = \frac{2^{2N}[N!]^2}{(2N+1)!}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. Calculer

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1-2k}{k(k-2)(k+1)}$$

puis sa limite quand $n \to +\infty$.

</td>
<td>

Il existe des réels $a, b\ et\ c$ tq : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,2,-1\}$,

$$F(x) = \frac{1-2x}{x(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1}.$$

Alors $a = \lim\limits_{x\to 0} xF(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-2x}{(x-2)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

et $b = \lim\limits_{x\to -1} (x+1)F(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{1-2x}{x(x-2)} = \frac{3}{3} = 1$

et $c = \lim\limits_{x\to 2} (x-2)F(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1-2x}{x(x+1)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,2,-1\}, \frac{1-2x}{x(x-2)(x+1)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+1}.$

Alors, $\sum_{k=3}^{n} \frac{1-2k}{k(k-2)(k+1)} = -\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+1}$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{3} + \sum_{k=4}^{n-2} \frac{1}{k}\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{k=4}^{n-2} \frac{1}{k}\right] + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \sum_{k=4}^{n-2} \frac{1}{k}\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right)\left(\sum_{k=4}^{n-2} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n+1}\right] - \frac{13}{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{2}{n+1}\right] - \frac{13}{12}.$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=3}^{n} \frac{1-2k}{k(k-2)(k+1)} = -\frac{13}{12}.$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Soit n un entier naturel et x un réel. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

</td>
<td>

$$\boldsymbol{Posons\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.}$$

Alors f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et la FBN assure que $f(x) = (1+x)^n$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Soit n un entier naturel et x un réel distinct de 1. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}.$$

</td>
<td>

$$\boldsymbol{Posons\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.}$$

Alors f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et la formule de somme géométrique assure que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}\ f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1)}{(x-1)^2}.$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Soit n un entier naturel. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k.$$

</td>
<td>

$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k = x\left[\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}\right] = xf'(x)$ où $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Comme f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(x) = (1+x)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$.

Donc, $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k = nx(1+x)^{n-1}$.

</td>
</tr>
</table>

Soit n un entier naturel. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.	$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = f'(1)$ **où** $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$**. Comme f est polynomiale donc dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et** $f(x) = (1+x)^n$, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$. **Donc,** $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
Soit n un entier naturel et x un réel distinct de 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} kx^k$.	$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = xf'(x)$ où $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. **Alors f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et la formule de somme géométrique assure que :** $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}\ f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. **Donc** $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}$ $= \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$. **Donc** $\sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}\, b_n$.	**Premier méthode : par récurrence :** **Init° :** $(1+\sqrt{3})^0 = 1 \underbrace{=}_{a_0=1 \text{ et } b_0=0} a_0 + \sqrt{3}\, b_0$. **Propag° : Soit $n \in \mathbb{N}$ tq : il existe deux entiers a_n et b_n tels que** $(1+\sqrt{3})^n = a_n + \sqrt{3}\, b_n$**.Alors,** $(1+\sqrt{3})^{n+1} = (1+\sqrt{3}).(1+\sqrt{3})^n = (1+\sqrt{3})(a_n + \sqrt{3}\, b_n)$ $= a_n + 3\, b_n + \sqrt{3}(a_n + b_n)$ **Posons** $a_{n+1} = a_n + 3\, b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$. **Comme a_n et b_n sont entiers, a_{n+1} et b_{n+1} sont entiers et par conséquent, conviennent.** **CCL° : le théorème de récurrence simple permet de conclure.** **Deuxième méthode par la FBN :** $(1+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k 1^{n-k}$ $= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k$ $= \sum_{0\leq 2p\leq n} \binom{n}{2p} (\sqrt{3})^{2P} + \sum_{0\leq 2p+1\leq n} \binom{n}{2p+1} (\sqrt{3})^{2p+1}$ $= \sum_{0\leq 2p\leq n} \binom{n}{2p} 3^P + \sum_{0\leq 2p+1\leq n} \binom{n}{2p+1} 3^p\sqrt{3}$ $= \underbrace{\left[\sum_{0\leq 2p\leq n} \binom{n}{2p} 3^P\right]}_{=a_n} + \sqrt{3}\underbrace{\left[\sum_{0\leq 2p+1\leq n} \binom{n}{2p+1} 3^p\right]}_{=b_n}$ $= a_n + \sqrt{3}\, b_n$ **avec a_n et b_n entiers (car ils s'écrivent à l'aide de sommes et produits d'entiers)**
Soit n un entier naturel supérieur à 3. Calculer : $\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-2}$.	$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-2} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2}$ $= \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ $= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 1$.