# Applications, injections , surjections et bijections

## I Applications .

1 **Def :** Soit $E$ et $F$ deux ensembles.

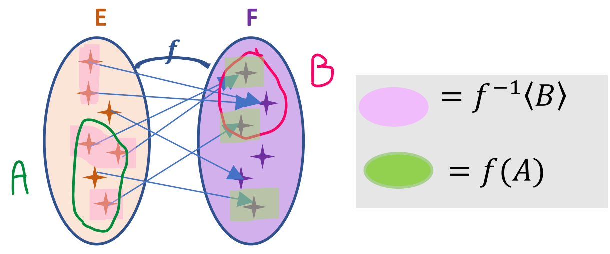
- Une **application** de $E$ dans $F$ (ou vers $F$) est une relation dépendant des objets de $E$ qui à chaque élément de $E$ associe un seul élément de $F$ . Une **fonction** de $E$ dans $F$ (ou vers $F$) est une relation dépendant des objets de $E$ qui à chaque élément de $E$ associe au plus un seul élément de $F$. On note $F^E$ ou $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$ .
- Soit $x$ un élément de $E$ et $y$ un élément de $F$ . Lorsque $y$ est l'objet de $F$ associé à $x$ par $f$ , on note $f(x) = y$ et on dit que $y$ est **l'image** de $x$ par $f$ et $x$ est **un antécédent** de $y$ par $f$ .
- **Le domaine de définition d'une fonction** de $E$ dans $F$ est alors le sous-ensemble de $E$ constitué des éléments de $E$ qui ont une image par $f$.
- Lorsque $f$ est une application , on a, par unicité de l'image : $\forall(x_1,x_2) \in E^2,\ (x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$ . L'implication réciproque est fausse en général. Elle sera vraie uniquement lorsque l'application sera injective.
- Deux applications sont **égales** lorsqu'elles ont le même domaine de définition et attribuent la même image en chaque point de ce domaine de définition.
- Soit $\alpha \in F$ . Résoudre l'équation $f(x) = \alpha$ , d'inconnue $x$, signifie chercher tous les réels $x$ de $E$ tels que $f(x) = \alpha$ c'est à dire chercher tous les antécédents de $\alpha$ par $f$.
- Soit $A$ un sous ensemble de $E$. **La restriction de $f$ à $A$** est l'application $f_{/A}$ de $A$ dans $F$ telle que: $\forall x \in A, f_{/A}(x) = f(x)$

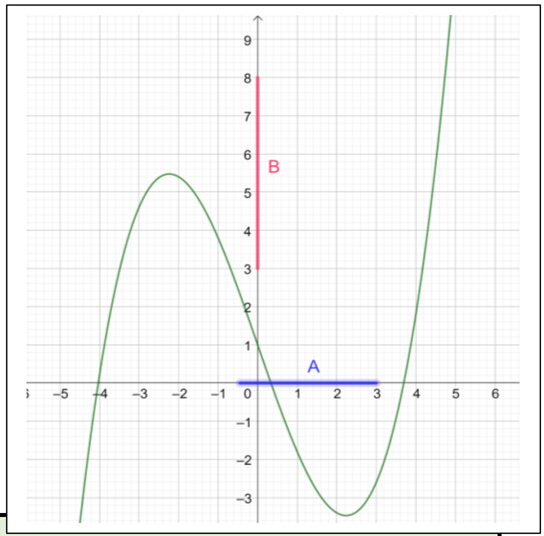
2
- Soit $A$ un sous ensemble de $E$ . **L'image directe de $A$ par $f$** , notée $f(A)$, est l'ensemble des images par $f$ de tous les éléments de $A$ . $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$ est un sous-ensemble (ou partie) de $F$.
- $f(E)$, note aussi $Im(f)$, est le sous- ensemble de $F$ contenant toutes les images par $f$ .
- Soit $B$ un sous ensemble de $F$ . **L'image réciproque de $B$ par $f$**, noté $f^{-1}\langle B\rangle$ , est l'ensemble des éléments de $E$ qui ont leur image dans $B$ ie l'ensemble des antécédents des éléments de $B$ .

$f^{-1}\langle B\rangle = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\} = \{x \in E / \exists\, y \in F , y = f(x)\}$ est un sous ensemble (ou partie) de $E$.

3 **NB :** Si $\alpha \in F \backslash Im(f)$ alors l'équation $f(x) = \alpha$ , d'inconnue $x$, n'a pas de solution.

4 **Illustrations :**




5 **Exemple :** Soit $f: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \theta \mapsto e^{i\theta} \end{pmatrix}$ .

Alors $Im(f)$ est l'ensemble des complexes de module 1.

De plus, $Im(f) = f([0,2\pi[)$ et $f^{-1}\langle\mathbb{R}\rangle = f^{-1}\langle\{-1;1\}\rangle = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

6 **Def :** Soit $E$ , $F$ et $G$ trois ensembles .
Soit $f$ une application de $E$ dans $F$ et $g$ une application de $F$ dans $G$ . Alors pour tout élément $x$ de $E$ , on pose $g \circ f(x) = g(f(x))$. On définit ainsi l'application composée $g \circ f$ de $E$ dans $G$. **$g \circ f$ est la composée de $f$ par $g$ .**

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
$$\underbrace{x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))}_{g\circ f}$$

7 **Prop :** La composition est associative mais pas commutative .

8 **Def. et prop. :** $id_E: \begin{pmatrix} E \to E \\ x \mapsto x \end{pmatrix}$ est appelé l'identité sur $E$ . Pour toute fonction $f: E \to F$ , on a : $\begin{cases} id_F \circ f = f \\ f \circ id_E = f \end{cases}$

# II Applications injectives, surjectives et bijectives

## 1. Injections

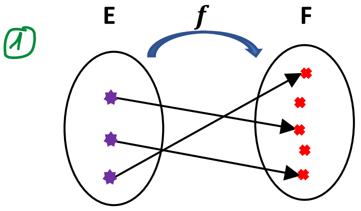
9 **Déf.** Soit $f$ une application de $E\ vers\ F$ .
$f$ est **injective** (sur $E$) lorsque deux éléments distincts de $E$ ont des images (par $f$) distinctes.
**De manière équivalente :**

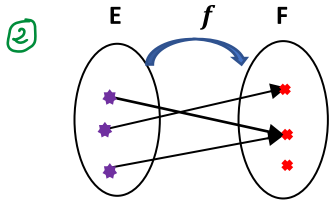
- $f$ est injective si et seulement si tous les éléments de $E$ ayant la même image par $f$ sont nécessairement égaux .
$$f\ est\ injective\ de\ E\ dans\ F\ \Leftrightarrow \forall(x_1,x_2)\in E^2,(x_1\neq x_2 \underset{ou\ \Leftrightarrow}{\Longrightarrow} f(x_1)\neq f(x_2))$$
- $f$ est injective si et seulement si tout élément de $F$ a au plus un antécédent dans $E$ par $f$ .

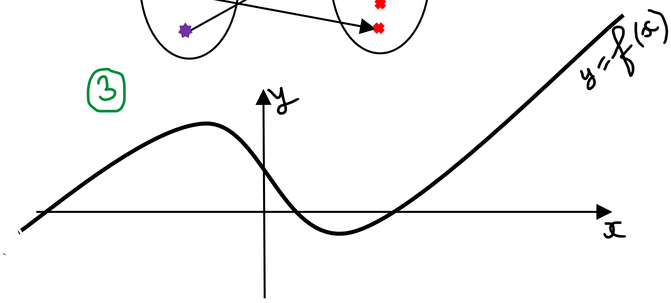
$f\ est\ injective\ de\ E\ dans\ F\ \Leftrightarrow\ pour\ chaque\ y\ de\ F\ ,l'équation\ f(x)=y\ d'inconnue\ x\ a\ au\ plus\ une\ solution\ dans$

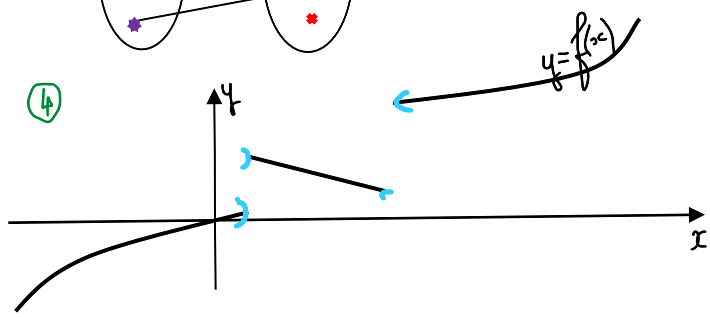
- $f\ est\ injective\ de\ E\ dans\ F\ \Leftrightarrow \forall(x_1,x_2)\in E^2,(f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1=x_2)$ .

10 **Illustrations : Ces applications sont-elles injectives sur $E$ ou $\mathbb{R}$ ?**




11 **Exemples :** 1) $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ x\mapsto e^{ix}\end{pmatrix}$ n'est pas injective puisque $f(0)=f(2\pi)=1$ $(deux\ réels\ ont\ la\ même\ image\ par\ f\ )$.

2) $g:\begin{pmatrix}\mathbb{C}\backslash\{i\}\to\mathbb{C}\\ z\mapsto\frac{2i-3z}{iz+1}\end{pmatrix}$ est injective .

En effet, soit $y\in\mathbb{C}$ . $g(z)=y\Leftrightarrow\frac{2i-3z}{iz+1}=y\Leftrightarrow 2i-3z=y(iz+1)\Leftrightarrow(iy+3)z=2i-y\Leftrightarrow\begin{cases}impossible\ si\ \ y=3i\\ z=\frac{2i-y}{iy+3}\ sinon\end{cases}$ .

Donc tout complexe $y$ a au plus un antécédent par $g$ : zéro antécédent si $y=3i$ et un unique antécédent qui est $\frac{2i-y}{iy+3}$ si $y\neq 3i$

3) $\varphi:\begin{pmatrix}D(\mathbb{R},\mathbb{R})\to F(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ f\mapsto f'\end{pmatrix}$ n'est pas injective car deux fonctions constantes distinctes ont la même image nulle par $\varphi$.

12 **Propriété :** Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone sur $D$ est injective sur $D$ .
Toute fonction réelle paire ou périodique n'est jamais injective.

NB : Toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone est injective . On s'est énormément servi de cette dernière caractérisation dans les résolutions d'équation : Dès que l'on sait que $f$ est injective alors $f(b)=f(a)\Leftrightarrow a=b$.

13 **Exemple:** $b^3=-\frac{1}{8}\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}$.

14 **Remarque** : on peut « rendre une application injective » en retirant de son domaine de définition les antécédents en trop .

15 **Exemples :** 1) $f:\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ x\mapsto e^{ix}\end{pmatrix}$ n'est pas injective mais $f_{/[0,2\pi[}:\begin{pmatrix}[0,2\pi[\to\mathbb{C}\\ x\mapsto e^{ix}\end{pmatrix}$ est injective.

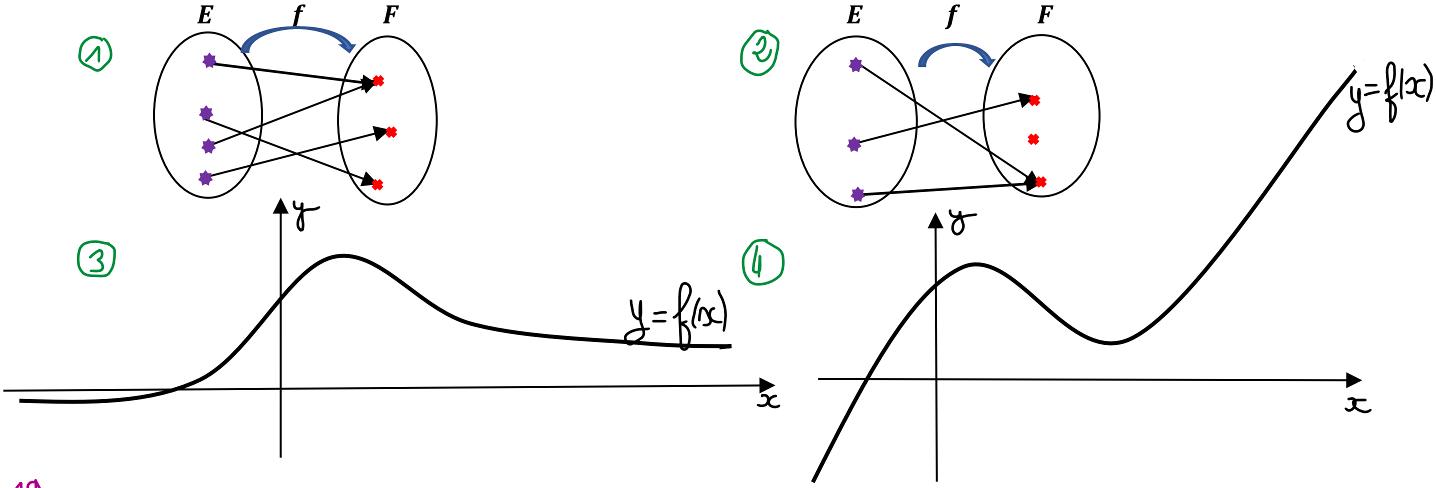
2) $g:\begin{pmatrix}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{pmatrix}$ n'est pas injective . Mais $g_{/\mathbb{R}^+}:\begin{pmatrix}\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\\ x\mapsto x^2\end{pmatrix}$ est injective.

16 **Prop.** Soit $f$ une application de $E\ dans\ F$ et $g$ une application de $F\ dans\ G$ .
1. Si $f\ et\ g$ sont injectives alors $g\circ f$ est injective .
2. Si $g\circ f$ est injective alors $f$ est injective .

## 2. Surjections

17 **Déf .** Soit $f$ une application de $E$ vers $F$ .
**$f$ est surjective de $E\ sur\ F$** lorsque tout élément $y$ de $F$ a au moins un antécédent dans $E$ par $f$ , c'est-à-dire lorsque pour tout élément $y$ de $F$ , l'équation $f(x)=y$ ,d'inconnue $x$ , a au moins une solution dans $E$ .
De manière équivalente : **$f$ est surjective de $E\ sur\ F$ $f$ est surjective de $E\ sur\ F$** lorsque $f(E)=F$.

18 **Illustration : Ces applications sont-elles surjectives le cas échéant de $E$ sur $F$ ou de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ?**




19 **Remarque :** $f$ est toujours surjective de $I$ sur $f(I)$ puisque par définition , tout élément de $f(I)$ est une image par $f$ d'un élément de $I$ . Donc on peut toujours « rendre une application surjective » en enlevant de $F$ les éléments qui n'ont pas d'antécédents par $f$ . **Par exemple** , sinus est surjective de $\mathbb{R}$ sur [-1,1] mais ne l'est pas de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

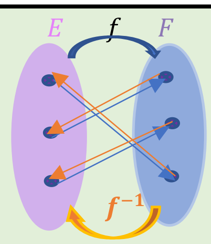
20 **Prop .** Soit $f$ une application de $E$ *dans* $F$ et $g$ une application de $F$ *dans* $G$ .
**1.** Si $f$ *et* $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective
**2.** Si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective .

## 3. <u>Bijections</u>

21 **Déf.** Soit $f$ une application de $E$ *vers* $F$ .
***f* est bijective( de *E sur F*)** ou est une bijection de $E$ *sur* $F$ lorsque $f$ est injective et surjective (de $E$ *sur* $F$) .
Autrement dit, ***f* est bijective** lorsque tout élément de $F$ a un et un seul antécédent dans $E$ par $f$ c'est-à-dire lorsque pour tout élément $y$ de F , l'équation $f\,(x) = y$, d'inconnue $x$, une unique solution dans $E$.

22 **NB :** On précisera « de $E$ sur $F$ » lorsque l'on réduit le domaine de départ ou d'arrivée pour « rendre $f$ bijective » . Dans ce cas , on dira plutôt que $f$ réalise une bijection de $E$ *sur* $F$ ou **$f$ induit une bijection de $E$ sur $F$** . Cette bijection induite est :
$f_|:\begin{pmatrix} E \to F \\ x \mapsto f(x)\end{pmatrix}$ .Par exemple, la fonction sinus n'est pas bijective (de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$) mais la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1{,}1]$.On note $sin_|:\begin{pmatrix}\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1{,}1] \\ x \mapsto sin(x)\end{pmatrix}$ cette bijection.

23 **Déf. :** Soit ***f* une application bijective** de $E$ *sur* $F$ .
On définit alors $f^{-1}$ l'application de $F$ *dans* $E$ par :
$\forall y \in F\,,\, f^{-1}(y)$ = l'unique antécédent de $y$ *par* $f$ .
=l'unique élément de $E$ dont l'image par $f$ vaut $y$
= l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x$ .




Autrement dit : $f^{-1}$ est définie par l'équivalence : $\begin{cases} y = f(x) \\ x \in E\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in F\end{cases}$.
$f^{-1}$ est appelée **la bijection réciproque de *f*** .

24 **Exemples :** 1) Si $a$ et $b$ sont réels tq $a$ non nul alors $f\colon (x \mapsto ax + b)$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{-1}\colon \left(x \mapsto \frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right)$.
**1)** $g\colon \left(z \mapsto \frac{2i-3z}{iz+1}\right)$ est injective de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{3i\}$ et $g^{-1}\colon \left(z \mapsto \frac{2i-y}{iy+3}\right)$ .

25 **NB:** Si $f$ une application bijective de $E$ *sur* $F$ alors pour tout sous-ensemble $B$ de $F$ , $\underbrace{f^{-1}\langle B\rangle}_{\substack{image \\ réciproque \\ de\,B\,par\,f}} = \underbrace{f^{-1}(B)}_{\substack{image \\ directe \\ de\,B\,par\,f^{-1}}}$ .

26 **Théo :** Si $f$ est une application bijective de $E$ *sur* $F$ alors $f^{-1}$ est bijective de $F$ *sur* $E$ et $(f^{-1})^{-1} = f$.
De plus, $\forall y \in F\,,\ f\,(f^{-1}\,(y)) = y$ et $\forall x \in E\,, f^{-1}(f\,(x)) = x$ . Autrement dit , $f \circ f^{-1} = id_F$ *et* $f^{-1} \circ f = id_E$.

27 **Caractérisation** : Soit $f$ une application de $E$ *vers* $F$ .
S'il existe une application $g$ telle que $\forall y \in F, f(g(y)) = y$ et $\forall x \in E, g(f\,(x)) = x$ (i.e. $f \circ g = id_F$ *et* $g \circ f = id_E$) alors $f$ est bijective de $E$ *sur* $F$ et $f^{-1} = g$.

28 **NB :** la réciproque est vraie d'après le théorème précédent . il y a donc équivalence :
$\forall y \in F, f(g(y)) = y$ et $\forall x \in E, g(f\,(x)) = x$ (i.e. $f \circ g = id_F$ *et* $g \circ f = id_E$) sietssi $f$ est bijective de $E$ *sur* $F$ et $f^{-1} = g$.

29 **Exemple** : $\varphi\colon (x \mapsto \sqrt[3]{2x})$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi^{-1}\colon \left(x \mapsto \frac{x^3}{2}\right)$.

30 **Exemples de référence :**

1) $id_E$ est bijective de $E$ sur $E$ et $id_E{}^{-1} = id_E$ .
2) **Le plan complexe :** $f\colon\begin{pmatrix} \mathbb{C} \to P \\ x+iy \mapsto M(x,y)\end{pmatrix}$ est bijective .
3) **Du plan dans lui-même :** Toute translation de vecteur non nul est une bijection du plan dans lui-même de bijection réciproque la translation de vecteur opposé.

Toute homothétie de centre $A$ de rapport $k$ non nul est une bijection du plan dans lui-même de bijection réciproque l'homothétie de centre 0 de rapport $\frac{1}{k}$ .

Toute rotation de centre $O$ d'angle $\theta$ est une bijection du plan dans lui-même de bijection réciproque la rotation de centre $A$ d'angle $-\theta$.

4) **De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :** $exp$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ $et$ sa bijection réciproque est $ln$.

$f\colon\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ $est\ bijective\ de\ \mathbb{R}^*\ sur\ \mathbb{R}^*\ et\ f^{-1} = f$.

Si $n$ est un entier naturel impair alors $f\colon(x \mapsto x^n)\ est\ bijective\ de\ \mathbb{R}\ sur\ \mathbb{R}\ et\ f^{-1} = \sqrt[n]{\ }$ .

Si $n$ est un entier naturel pair et $n \geq 2$ alors $f\colon(x \mapsto x^n)\ est\ bijective\ de\ \mathbb{R}^+\ sur\ \mathbb{R}^+\ et\ f^{-1} = \sqrt[n]{\ }$ .

31 **Prop.:** Si $f$ est bijective de $E\ sur\ F$ et $g$ est bijective de $F\ sur\ G$ alors $g \circ f$ est bijective de $E$ sur $G$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

32 **Exemple** : $\varphi\colon(x \mapsto e^{x^3})$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi^{-1}\colon(x \mapsto \sqrt[3]{\ln(x)})$.

33 **<u>Méthode pour étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et déterminer le cas échéant la bijection réciproque :</u>**

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$.

1. Si je trouve deux éléments de $E$ qui ont la même par $f$ alors je peux conclure que $f$ ........................................................... et donc $f$ ...........................................................
2. Si je trouve un élément de $F$ qui n'a pas d'antécédent par $f$ alors je peux conclure que $f$ ................................................ et donc $f$ ...........................................................
3. Si je ne trouve pas ces éléments particuliers alors je prends un élément $y$ quelconque dans $F$ et je cherche tous les antécédents de $y$ par $f$ i.e. je résous l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x$ élément de $E$ et de paramètre $y$. La résolution revient à inverser » la relation $f(x) = y$ ( qui donne $y$ en fonction de $x$) : exprimer x en fonction de $y$.
   - ✓ Si, pour chaque $y$, je trouve une et une seule solution alors $f$ est bijective de $E$ sur $F$ et $f^{-1}(y)$ =cette unique solution.
   - ✓ Si, pour certains éléments $y$, l'équation n'a pas de solution alors $f$ n'est pas surjective de $E$ sur $F$; en revanche, si on note $B$ l'ensemble de tous les $y$ qui n'ont pas d'antécédents, $f$ est surjective de $E$ sur $F\backslash B$.
   - ✓ Si, pour certains éléments $y$, l'équation a plusieurs solutions alors $f$ n'est pas injective sur $E$; en revanche, si on ôte à $E$ les antécédents en trop pour obtenir un sous-ensemble $A$ alors $f$ est injective sur $A$. Autrement dit, $f_{/A}$ est injective.

# <u>III Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$</u>

34 **Rappel : une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone est injective . Attention, une fonction réelle injective n'est pas forcément strictement monotone comme montre l'exemple.**

## 1. <u>$f(I)$ avec $f$ est réelle et continue sur un intervalle $I$</u> .

35 **Théorème des valeurs intermédiaires :** Soit $a$ et $b$ réels ou infinis tq $a < b$.

Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ d'extrémités $a$ et $b$ alors

1) tout réel compris entre $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ a un antécédent par $f$ sur $I$.
2) $f(I)$ est un intervalle.

36 **Corollaire :**

1. Si $f$ est continue sur $[a, b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés alors $f$ s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.
2. Si $f$ est continue sur l'intervalle $I$ et ne s'annule pas sur $I$ alors $f$ garde un signe constant sur $I$.

## 2. <u>Bijection réelle</u>

37 **Théorème :** Si $f$ est bijective de $I$ sur $J$ alors $C_f$ et $C_{f^{-1}}$ ,les courbes représentatives de $f$ et $f^{-1}$ dans un même repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (appelée première bissectrice).

38 En conséquence : **Si $f$ est bijective de $I$ sur $J$ alors**

| | | |
|---|---|---|
| 1. $b = f(a)$ où $a \in I$ | $\Longrightarrow$ | $a = f^{-1}(b)$ |
| 2. $A(a,b) \in Cf$ tq $a \in I$ | $\Longrightarrow$ | $B(b,a) \in C_{f^{-1}}$ |
| 3. $Cf$ *est* symétrique par rapport à $A(a,b)$ | $\Longrightarrow$ | $C_{f^{-1}}$ est symétrique par rapport au point $B(b,a)$ |
| 4. $f$ est impaire | $\Longrightarrow$ | $f^{-1}$ est impaire |
| 5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ où $a$ et $b$ réels ou infinis | $\Longrightarrow$ | $\lim\limits_{x\to b} f^{-1}(x) = a$ |
| 6. $f$ est continue en $a$ (où $a \in I$) | $\Longrightarrow$ | $f^{-1}$ est continue en $b$ *tel que* $b = f(a)$ |
| 7. $f$ est continue sur $I$ | $\Longrightarrow$ | $f^{-1}$ est continue sur $J = f(I)$ |
| 8. $Cf$ a au point $A(a,b)$(tq $a \in I$ ) une tangente de pente $p$ réel non nul | $\Longrightarrow$ | $C_{f^{-1}}$ a au point $A'(b,a)$ une tangente de pente $\frac{1}{p}$ |
| 9. $Cf$ a au point $A(a,b)$ (tq $a \in I$) une tangente horizontale (resp.verticale) | $\Longrightarrow$ | $C_{f^{-1}}$ a au point $A'(b,a)$ une tangente verticale (resp. horiz.) |
| 10. $f$ est dérivable en $a$ tq $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$ | $\Longrightarrow$ | $f^{-1}$ est dérivable en $b$ *tel que* $b = f(a)$ et $f^{-1\prime}(b) = \frac{1}{f'(a)}$ |
| 11. $f$ est dérivable en $a$ tq $a \in I$ et $f'(a) = 0$ | $\Longrightarrow$ | $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $b$ *tel que* $b = f(a)$ et $C_{f^{-1}}$ a au point B |
| 12. $Cf$ a une asymptote verticale (resp.horiz.) d'équation $x = a$ (resp. $y = a$) | $\Longrightarrow$ | $C_{f^{-1}}$ a une asymptote horizontale (resp. verticale) d'équation $y$ |
| 13. $Cf$ a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $\pm\infty$ | $\Longrightarrow$ | $C_{f^{-1}}$ a une asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ |
| 14. $Cf$ a une BP de DA $(Ox)$ (resp. $(Oy)$) en $\pm\infty$ $\Longrightarrow$ | $\Longrightarrow$ | $C_{f^{-1}}$ a une BP de DA $(Oy)$ (resp. $(Ox)$) |
| 15. $f$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $I$ | $\Longrightarrow$ | $f^{-1}$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $J$ |

### 3. <u>Bijection réelle continue et strictement monotone</u>.

39 **Prop.**: Si $f$ est continue et bijective alors $f$ est strictement monotone.

40 **Théorème des bijections continues et strictement monotones (TBCSM):**
si $f$ est **continue et strictement monotone** sur l'**intervalle** $I$ alors
1)$f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de même nature que $I$ et d'extrémités les limites de $f$ aux extrémités de $I$.
2) $f$ induit une bijection $f_|$ de $I$ sur $f(I)$ ou encore $f$ est bijective de $I$ sur $f(I)$.
3) $f_|^{-1}$ , définie sur $f(I)$ , est continue et strictement monotone de même monotonie que $f_|$ .

41 **NB :1)** Il arrive que $f = f_|$ i.e. $f$ bijective sur tout son domaine de définition.
**2)** Continuité $\Rightarrow f(I)$ intervalle +SURJECTIVITE
Stricte monotonie$\Rightarrow$ *les bords de* $f(I)$+ INJECTIVITE

42 **ATTENTION :** Il existe des bijections non continues et non strictement monotones . Comme le prouve **l'exemple suivant :**
Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \in [0,1[ \\ 3-x & si\ x \in [1,2] \end{cases}$ .Je remarque que , pour tout $x \in [0,2], f(x) \in [0,2]$ . Montrons que $f$ est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$et déterminons $f^{-1}$.Pour tout $x \in [1,2], f(x) \in [1,2]$ et tout $x \in [0,1[, f(x) \in [0,1[$ . Autrement dit , si $y \in [0,1[$ alors ses antécédents sont dans $[0,1[$ et si $y \in [1,2]$ alors ses antécédents sont dans $[1,2]$ . Par conséquent , si $y \in [0,1[$ alors ( $f(x) = y$ sietssi $y = x^2$sietssi $x = \sqrt{y}$) . si $y \in [1,2]$ alors ( $f(x) = y$ sietssi $y = 3 - x$ sietssi $x = 3 - y$ ).Ainsi chaque élément de $[0,2]$ a un unique antécédent par $f$. Donc $f$ est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$ et $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & si\ x \in [0,1[ \\ 3-y & si\ x \in [1,2] \end{cases}$ .

43 **Exemples de référence** La fonction sinus n'est pas bijective. Par contre, comme sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, sinus est bijective de$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$sur $[-1;1]$. Autrement dit, *sinus* induit la bijection $sin_|: \begin{pmatrix} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ x \mapsto sin(x) \end{pmatrix}$.La bijection réciproque de $sin_|$est appelée la fonction *Arcsinus* . *Arcsinus* est donc définie , continue et strictement croissante sur $[-1,1]$ .Et on retrouve la définition suivante : $\forall y \in [-1,1], \theta = Arcsin(y)$ est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\sin(\theta) = y$.
De même, $cos_|: \begin{pmatrix} [0,\pi] \to [-1,1] \\ x \mapsto cos(x) \end{pmatrix}$et $tan_|: \begin{pmatrix} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto tan(x) \end{pmatrix}$ sont bijectives et $cos_|^{-1} = Arccos\ et\ tan_|^{-1} = Arctan$ . On retrouve
Les définitions suivantes :

$\forall y \in [-1,1], \theta = Arccos(y)$ est l'unique réel de $[0,\pi]$ vérifiant $\cos(\theta) = y$.
$\forall y \in \mathbb{R}, \theta = Arctan(y)$ est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\theta) = y$.

### 4. Bijection réelle continue, strictement monotone et dérivable.

44 **Théorème de dérivation d'une bijection réciproque d'une bijection continue et strictement monotone (TDBR):**
Soit $f$ une fonction **continue et strictement monotone** sur **l'intervalle** $I$ et $a$ un élément de $I$ et $b = f(a)$.
1)Si $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable en $b$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ .
2)Si $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = 0$ alors $f^{-1}$ n'est pas dérivable en $b$ et $C_{f^{-1}}$admet une tangente verticale au point $B(b,a)$.
3)Si $Cf$ admet une tangente verticale au point $A(a,b)$alors $f^{-1}$ est dérivable en $b$ et $(f^{-1})'(b) = 0$ ( $C_{f^{-1}}$admet une tangente horizontale au point $B(b,a)$ .
4) Si $f$ est dérivable sur $K$ intervalle inclus dans $I$ et pour tout $x$ dans $K$ , $f'(x) \neq 0$ alors $f^{-1}$ est dérivable sur l'intervalle $f(K)$ tel que : pour tout $y$ dans $f(K), (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ .

45 **En pratique :**le TBCSM sert à montrer qu'une fonction est bijective d'un intervalle sur un autre intervalle. De plus, le TBCSM et TDBR permettent d'avoir des propriétés sur la bijection réciproque lorsque l'on ne parvient pas à déterminer son expression (c'est le cas lorsque l'équation $f(x) = y$ est impossible à résoudre algébriquement) **. Cf exemples suivants.**

46 **Exemples** : 1) Soit $f: (x \mapsto xe^x)$ . $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car son expression…)et $f'(x) = (1+x)e^x$ . Sur $[-1,+\infty[$ , $f$ est donc strictement croissante . Par conséquent , d'après le TBCSM , $f$ induit une bijection $f_{|}$de $[-1,+\infty[$ sur $[f(-1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$. Pour cette fonction , l'équation $f_{|}(x) = y$ ne peut être résolue algébriquement . Je ne peux donc pas trouver une expression de $f_{|}^{-1}$ . Mais je peux tout de même connaitre certaines valeurs et propriétés de $f_{|}^{-1}$ .
D'après le TBCSM , $f_{|}$ est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$ , $f_{|}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $\forall x \in ]-1,+\infty[$ , $f_{|}'(x) = f'(x) \neq 0$ donc d'après le TDBR , $f_{|}^{-1}$ est dérivable sur $f(]-1,+\infty[) = \left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$ et $\forall y \in \left]-\frac{1}{e},+\infty\right[$ ,$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{(1+f^{-1}(y))e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}+f(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}+y}$ . Par contre $f_{|}$ $est\ dérivable\ en -1\ et\ f_{|}'(-1) = f'(-1) = 0$ donc $f_{|}^{-1}$n'est pas dérivable en$-\frac{1}{e} = f(-1)$. La courbe de $f_{|}^{-1}$ a une tangente verticale en $-\frac{1}{e}$.

| $b$=$f_{|}$ $(a)$ | 0 | $-\frac{1}{e}$ | $e$ |
|---|---|---|---|
| $f_{|}^{-1}(b) = a$ | 0 | -1 | 1 |
| $f'(a)$ | 1 | 0 | $2e$ |
| $f_{|}^{-1\prime}(b) = \frac{1}{f'(a)}$ | 1 | n'existe pas (TV) | $\frac{1}{2e}$ |

**2)** *Soit* $f: (x \mapsto ln(x^2 + e^x + 1))$ . $f$ est continue (car son expression n' est constituée que de fonctions continues partout sur leur domaine de définition respectif) et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$($car\ (x \mapsto x^2 + e^x + 1)$est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ – somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$ –et ln est strictement croissante) donc $f(\mathbb{R}^+) = [ln(2),+\infty[$ et $f$ est bijective de $\mathbb{R}^+$sur $[ln(2),+\infty[$ par le TBCSM. De plus , $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et pour tout $x \geq 0, f'(x) = \frac{2x+e^x}{x^2+e^x+1}$ >0 . Donc $f^{-1}$ est dérivable sur $[ln(2),+\infty[$ .

| $x = f^{-1}(y) \in \mathbb{R}^+$ | $a$ | $f^{-1}(b)$ | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = y \in [\ln(2),+\infty[$ | $f(a)$ | $b$ | $ln(2+e)$ | $ln(2)$ |
| $f'(x)$ | $f'(a)$ | $1/(f^{-1})'(b)$ | 1 | ½ |
| $(f^{-1})'(y)$ | $1/f'(a)$ | $(f^{-1})'(b)$ | 1 | 2 |

47 **BILAN pour prouver que $f$ est bijective et trouver, lorsque cela est possible, l'expression de $f^{-1}$** :
1) OU BIEN on écrit $f$ comme la composée de deux bijections $f = h \circ g$ ; alors, $f$ bijective et $f^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1}$.
2) OU BIEN on tente de trouver $g: J \to I$, telle que $\forall x \in J$, $f(g(x)) = x$. On vérifie ensuite que : $\forall x \in I$, $g(f(x)) = x$. Alors, $f$ bijective de $I$ sur $J$ et $f^{-1} = g$
3) OU BIEN on prend un $y$ arbitraire (non particulier) dans $J$ et on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x$ réelle, élément de $I$. Si cette équation a toujours une unique solution dans $I$, alors $f$ est bijective de $I$ sur $J$ et l'unique solution de cette équation est $x = f^{-1}(y)$(=l'expression de $f^{-1}$ )
4) OU BIEN on applique le théorème des bijections continues et strictement monotones qui permet de trouver $J = f(I)$ et de justifier que $f$ est bijective de $I$ sur $J$ mais ne permet pas de trouver $f^{-1}$.

48 NB : on peut obtenir la continuité, la stricte monotonie et la dérivabilité de $f^{-1}$, sans connaitre l'expression de $f^{-1}$. Il suffit d'appliquer le TBSCM et le TDBR !! On peut même obtenir des valeurs de $f^{-1}$ et de $(f^{-1})'$ , et parfois l'expression de $(f^{-1})'$sans connaitre celle de $f^{-1}$ (comme pour $Arcsin$ , $Arccos\ et\ Arctan$).