PROGRAMME DE COLLE
Semaine 1

CHAPITRE 0 : Langage mathématiques-Raisonnements-Sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

I. Notation

- Notations et vocabulaire ensemblistes : $\in, \cup, \cap, \subset, \{\ldots\}$.
- définition d'une fonction (application), d'une suite réelle.
- Quantificateurs : $\forall, \exists, \exists!$
- Proposition et sa négation
- Implication, sa contraposée et sa réciproque.
- Equivalence.

II. Sous -ensemble remarquable de $\mathbb{R}$

- **Définition de** $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \boldsymbol{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ **.**
- **Calculs dans** $\mathbb{Z}$ **:** multiple, diviseur, pair, impair, $PPCM$ et $PGCD$.
- **Calculs dans** $\mathbb{Q}$ **:** représentant irréductible, somme, produit et quotient.
- **Calculs dans** $\mathbb{R}$ **:** $\sqrt{2}$ est irrationnel, la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnel , le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est irrationnel.

III. Raisonnements

- Démonstration par disjonction de cas
- Démonstration par récurrence : Théorème de récurrence Simple – Double – Forte .
- Démonstration par l'absurde
- Démonstration par analyse-synthèse
- Démonstration d'une unicité

CHAPITRE 1 : Sommes et Produits finis-Suites particulières-Systèmes linéaires.

I. Sommes et produits finis

- Sommes et produits finies
  - Notation d'une somme finie et d'un produit fini.
  - Propriétés: découpage, séparation, mise en facteur.
  - Changement d'indices.
  - Ecriture de u_n en fonction de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et S_{n-1} OU en fonction de $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ et P_{n-1}.
  - Somme télescopique $\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k)$ et plus généralement, $\sum_{k=P}^{N}(u_k - u_{k+1})$. Produit télescopique $\prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$.
- Sommes doubles
  - Notation d'une somme double et finie.
  - Théorème d'interversion de deux sommes finies.
  - Produit de deux sommes simples et finies.

II. Formules sommatoires

- Somme
  - des entiers consécutifs compris entre 1 et n
  - de ces mêmes « entiers au carré »
- Somme géométrique.
  - Factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$
  - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
  - Formule des sommes géométriques : $\sum_{k=0}^{n} x^k$ et $\sum_{k=p}^{n} x^k$.
- Formule du binôme de Newton
  - Définition d'une factorielle, d'un coefficient binomial.
  - Propriétés des factorielles et des coefficients binomiaux. Valeurs particulières.
  - Formule de Pascal. Triangle de pascal.
  - Formule du binôme de Newton.
- Application à quelques suites particulières : expression explicite et somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique, géométrique ou arithmético-géométrique.

III. Systèmes linéaires

- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues par OPERATIONS les lignes.
- Opération élémentaire, système échelonné.
- Méthode de résolution d'un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues et d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.

QUESTIONS DE COURS :

Tous les énoncés des définitions, propriétés et théorèmes doivent être connus.

Les démonstrations des résultats suivants sont aussi à connaitre :

1) Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
2) Enoncer et démontrer (en utilisant des méthodes différentes) les formules donnant $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
3) Enoncer et démontrer la formule de factorisation de $1 - x^n$ par $(1 - x)$ et celle des sommes géométriques $\sum_{k=0}^{n} x^k$ et $(\sum_{k=p}^{n} x^k)$.
4) Enoncer et démontrer la formule de Pascal.
5) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton

Rappeler soigneusement (avec les hypothèses) le résultat avant de le démontrer !!!

1) Enoncé : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Imaginons un instant que $\sqrt{2}$ n'est pas irrationnel. Alors $\sqrt{2}$ est rationnel. Donc il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (représentant irréductible de $\sqrt{2}$) . Alors, $q\sqrt{2} = p$ donc $2q^2 \overset{(**)}{=} p^2$. Par conséquent, p^2 est pair et par suite p *est pair*. Donc il existe un entier m tel que : $p = 2m$. Alors $(**)$ s'écrit $2q^2 = 4m^2$ et par suite $q^2 = 2m^2$. Par conséquent m est pair tout comme p. 2 est donc un diviseur commun de m *et* p qui ne sont pas donc pas premiers entre eux. Cela contredit la définition de p et q. Ainsi, l'hypothèse « $\sqrt{2}$ est rationnel » aboutissant à une contradiction, cette hypothèse est fausse et j'en conclus que sa négation est vraie i.e. $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel i.e. $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2) Enoncé : Soit n un entier naturel. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Première méthode par récurrence : Notons $H(n)$ la propriété " $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".

Initialisation : $\frac{0(0+1)}{2} = 0 = \sum_{k=0}^{0} k$ et $\frac{0(0+1)(2\times0+1)}{6} = 0 = \sum_{k=0}^{0} k^2$. Donc, $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ est vraie et sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie i.e. montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ *et* $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$.

$\sum_{k=0}^{n+1} k = (\sum_{k=0}^{n} k) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. OK !!

$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (\sum_{k=0}^{n} k^2) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)$

$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)+6n+6}{6}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. OK !!

Ainsi, $(H(n) \Rightarrow H(n+1))$.

Conclusion : le théorème de récurrence simple assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Deuxième méthode par télescopage :

Démo de $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$:

D'une part, $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(k+1)^2}_{u_{k+1}} - \underbrace{k^2}_{u_k} \overset{télescopage}{=} u_{n+1} - u_0 = (n+1)^2$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - k^2 = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2\sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$.

Par conséquent, $2\sum_{k=0}^{n} k + (n+1) = (n+1)^2$ et par suite, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}[(n+1)^2 - (n+1)] = \frac{n+1}{2}[n+1-1] = \frac{n(n+1)}{2}$

Démo de $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

D'une part, $\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(k+1)^3}_{u_{k+1}} - \underbrace{k^3}_{u_k} \overset{télescopage}{=} u_{n+1} - u_0 = (n+1)^3$.

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=0}^{n} 3k^2 + 3k + 1 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$.

Par conséquent, $3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^3$ et par suite,

$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2}\right] = \frac{n+1}{6}[2(n+1)^2 - 2 - 3n] = \frac{(n+1)}{6}[2n^2 + n] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) Enoncé :

- Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x , $1 - x^n = (1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k)$.
- Pour tout entier naturel n et tout réel x , $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n+1}-1}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ n+1 & si\ x = 1 \end{cases}$.
- Pour tous entiers naturels p et n tels que $p \leq n$ et tout réel x , $\sum_{k=p}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1} x^p & si\ x \neq 1 \\ n-p+1 & si\ x = 1 \end{cases}$.

- Soit n entier naturel n non nul et x un réel. $(1-x)(\sum_{k=0}^{n-1} x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - x\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\underbrace{x^k}_{u_k} - \underbrace{x^{k+1}}_{u_{k+1}}\right)}_{\substack{somme \\ télescopioque}} = u_0 - u_{(n+1)-1} = x^0 - x^n$.

  Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \mathbb{R}, 1 - X^N = (1-X)(\sum_{k=0}^{N-1} X^k)$ $(*)$
- Soit n un entier naturel et x un réel.

  1[er] cas : $x = 1$. $\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

  2[ème] cas : $x \neq 1$ alors d'après ce qui précède $(1-x)(\sum_{k=0}^{n} x^k) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique \\ (*) \\ avec \\ N=n+1\in\mathbb{N}^* \\ et\ X=x}} 1 - x^{n+1}$; *puisque* $x \neq 1, 1 - x \neq 0$ *et par suite,* $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

Ainsi, $\forall N \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N+1}-1}{X-1} \ si\ X \neq 1 \\ N+1 \ si\ X = 1 \end{cases}$ $(**)$.

- Soit $p\ et\ n$ deux entiers naturels tels que $p \leq n$ et x un réel.
  1[er] cas : $x = 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} 1^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$.
  2[ème] cas : $x \neq 1$. $\sum_{k=p}^{n} x^k = \sum_{k=p}^{n} x^p x^{k-p} = x^p\left(\sum_{k=p}^{n} x^{k-p}\right) = x^p\left(\sum_{j=0}^{n-p} x^j\right) \underbrace{=}_{\substack{on\ applique \\ (**) \\ avec\ N=n-p \\ et\ X=x\neq 1}} x^p \frac{x^{n-p+1}-1}{x-1}$.

Ainsi, $\forall (N,P) \in \mathbb{N}^2 / P \leq N, \forall X \in \mathbb{R}, \sum_{k=P}^{N} X^k = \begin{cases} \frac{X^{N-P+1}-1}{X-1} X^P \ si\ X \neq 1 \\ N-P+1 \ si\ X = 1 \end{cases}$ $(**)$.

4) Enoncé : Formule de Pascal

Pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

1[er] cas : $k > n$. Alors $k+1 > n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 0 = \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. La formule de Pascal est donc vérifiée si $k > n$.

2[ème] cas : $k = n$. Alors $k+1 = n+1 > n$. Donc $\binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k+1}\ et\ \binom{n}{k+1} = 0$. La formule de Pascal est donc vérifiée si $k = n$.

3[ème] cas : $k < n$. Alors $k \leq n-1\ donc\ k+1 \leq n < n+1$. Et par suite, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-(k+1))!}$ et $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$. Alors ,

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = n!\left[\frac{1}{k!(n-k)!} + \frac{1}{(k+1)!(n-k-1))!}\right] = n!\left[\frac{1}{k!((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{1}{(k!)(k+1)(n-k-1))!}\right]$

$= n!\left[\frac{k+1}{k!(k+1)((n-k-1)!)(n-k)} + \frac{(n-k)}{(k!)(k+1)((n-k-1))!)(n-k)}\right]$

$= n!\left[\frac{k+1}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{k+1+n-k}{(k+1)!(n-k)!}\right] = n!\left[\frac{n+1}{(k+1)!(n-k)!}\right] = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}$.

Donc la formule de Pascal est vérifiée si $k < n$.

Ainsi, $\forall (N,K) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{N}{K} + \binom{N}{K+1} = \binom{K+1}{K+1}$.

5) Enoncé : Formule du binôme de Newton

Pour tout entier naturels n et tous réels a et b , $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Soit a et b deux réels. Effectuons une preuve par récurrence sur n. Posons $H(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ".

Initialisation : $(a+b)^0 = 1\ et\ \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Donc $H(0)$ est vraie.

Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(n)$ est vraie et sous cette hypothèse, je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)a + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)b$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

Changement d'indice dans la première somme uniquement : $j = k+1\ \ i.e.\ k = j-1$. $k \in [\![0,n]\!] \Leftrightarrow j \in [\![1,n+1]\!]$. Je remplace tous les k et que les k par $j-1$.

$$= \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

J'isole le terme correspondant à « $k = n+1$» dans la première somme.

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right)$$

J'isole le terme correspondant à « $k = 0$» dans la deuxième somme.

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k}\right) + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^j b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + a^{n+1} b^0 + a^0 b^{n+1}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k}\right) + 1a^{n+1} b^0 + 1a^0 b^{n+1}$$

Car $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$

Formule de Pascal

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}\right) + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \quad OK\ !!!$$

Le théorème de récurrence simple permet alors de conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) est\ vraie$.