Corrigé du DL 1 : deuxième partie

Ex 2 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1}$.

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Démontrer que $\forall n \geq 2, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_{n-1}$.
3. En déduire une expression explicite de u_n.

1. Montrons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}, H(n)$: "$u_n>0$" est vraie.

Init° : $u_0 = 2 > 0$. Donc, $H(0)$ est vraie.

Propa° : Soit n un entier naturel. Je suppose que $H(0), H(1), \dots, H(n-1), H(n)$ sont vraies i.e. $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $u_k>0$. Alors, $\forall k \in [\![0, n]\!], \frac{u_k}{k+1} > 0$. Par conséquent, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k+1} > 0$. Donc, $[\, H(0), H(1), \dots, H(n-1), H(n)] \Longrightarrow H(n+1)$.

CCL° : le théorème de récurrence forte assure alors que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n>0$.

2. Soit un entier $n \geq 2$. Alors $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1} = u_n \underbrace{=}_{\substack{cette\ égalité\\ est\ possible\\ car\ n\geq 2}} \frac{u_{n-1}}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{u_k}{k+1} = \frac{u_{n-1}}{n} + u_{n-1} = \left(\frac{1}{n} + 1\right) u_{n-1}$.

Ainsi, $\forall n \geq 2, u_n = \left(\frac{1}{n} + 1\right) u_{n-1}$.

3. $\forall k \geq 2, \frac{u_k}{u_{k-1}} = \left(\frac{1}{k} + 1\right) = \frac{k+1}{k}$ $(**)$.

Donc $\forall n \geq 2$, $\frac{u_n}{u_1} \underbrace{=}_{telescopage} \prod_{k=2}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} \underbrace{=}_{\substack{d'après\ (**)\\ valabe\ pour\\ k\geq 2}} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} \underbrace{=}_{\substack{télescopage\\ en\ posant\\ v_k=k}} \prod_{k=2}^{n} \frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{v_{n+1}}{v_1} = \frac{n+1}{2}$. Or, $u_1 = \frac{u_0}{1} = 2$.

Donc, $\forall n \geq 2, u_n = n + 1$. Cette égalité étant aussi vraie pour $n = 1$ (mais pas pour $n = 0$), je peux conclure que :

$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n + 1$.

Ex 3

1. Déterminer une suite (u_n) de la forme : $u_n = (An + B).2^n$ (où A et B sont deux réels indépendants de n à déterminer) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n2^n$.
2. En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$ (on demande une expression sans $\sum$).

1. Je cherche deux réels A et B de sorte que la suite $u = \left((An + B) \times 2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n2^n$.

Soit A et B deux réels et $\forall n, u_n = (An + B) \times 2^n$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = [A(n+1) + B]2^{n+1} - [An + B]2^n = [2An + 2A + 2B]2^n - [An + B]2^n = [An + 2A + B]2^n$.

Donc pour que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n2^n$, il faut et il suffit que $\forall n \in \mathbb{N}, An \times 2^n + [2A + B] \times 2^n = n2^n$ et pour cela, il suffit de trouver A et B tels que : $\begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases}$, il suffit donc de choisir $\begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$.

Ainsi, la suite $u = \left((n - 2) \times 2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n2^n$.

2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} u_{k+1} - u_k \underbrace{=}_{telescopage} u_{n+1} - u_1 = (n + 1 - 2) \times 2^{n+1} - (1 - 2) \times 2^1 = (n-1)2^{n+1} + 2$.