Remarques et corrigé du DL 1 : Première partie

Remarques :

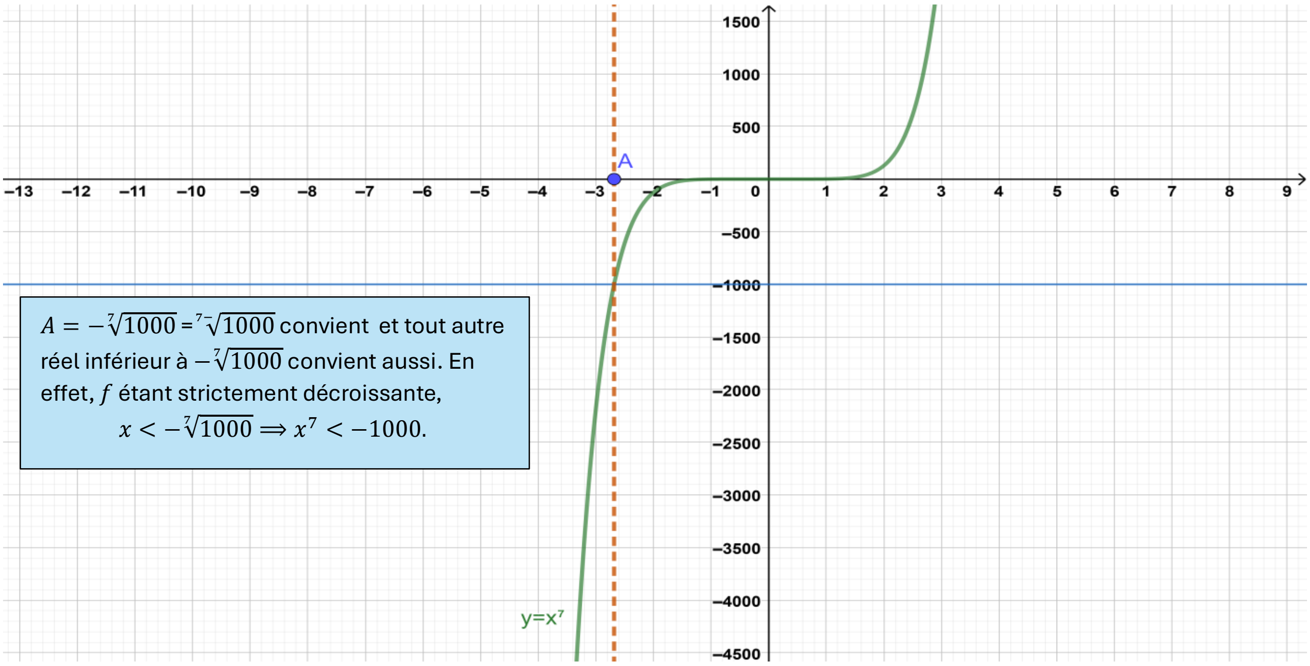
1. **Présentation.**
   - Votre NOM et Prénom doit apparaitre clairement en en tête de votre copie.
   - Une marge suffisante doit être laissée ou créée.
   - Une écriture lisible est exigée.
   - Vos résultats doivent être encadrés, soulignés ou surlignés.
2. **Rédaction et raisonnement.**
   - Vos résultats doivent être justifiés.
   - Les phrases doivent avoir un sens en français.
   - L'orthographe doit être soignée.
   - On dit : la fonction f est continue et non la fonction $f(x)$est croissante car $f(x)$ est un réel , ce n'est pas une fonction… De même, on dit : la fonction ln est croissante et non ~~la fonction $ln(x)$ est croissante~~ car $ln(x)$ est un réel , ce n'est pas une fonction.
     Relisez-vous !!!!!
3. **Raisonnement.**
   - Posez - vous les bonnes questions : est-ce que je cherche un objet particulier ? Est-ce que je dois démontrer une relation ?
   - Ne démarrez pas votre raisonnement du résultat à démontrer à moins de faire un résultat par analyse-synthèse …. Cf corrigé !
   - Emploi de $\Leftrightarrow$ ou pas :
     $\Leftrightarrow$ s'emploie le plus souvent pour résoudre une équation ou un inéquation i.e. quand je cherche un objet qui vérifie une certaine propriété.
     Deux phrases qui sont vraies (et je le sais) et qui signifient la même chose sont reliées par un « i.e. » mais jamais par un $\Leftrightarrow$.
     Deux phrases qui sont vraies (et je le sais) et qui sont liées par une relation de cause à effet sont reliées par un « $donc$ » mais jamais par un $\Longrightarrow$.
     Exemples :

1. Je sais que $u_1 = x + \frac{1}{x}, u_n = x^n + \frac{1}{x^n}, u_{n-1} = x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$. Donc, $u_n u_1 - u_{n-1} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = u_{n+1}$.
2. Je cherche un entier p tels que : $\forall n \in \mathbb{N} , si\ n \geq p\ alors\ \ln(n+1) > 100$. Je résous pour cela l'inéquation : $\ln(n+1) > 100$; autrement dit, je cherche tous les entiers n tels que $\ln(n+1) > 100$:
   $\ln(n+1) > 100 \Leftrightarrow n+1 > e^{100} \Leftrightarrow n > e^{100} - 1$.
   Donc en prenant un entier p tel que $p > e^{100} - 1$ (par exemple, $p = \lfloor e^{100} \rfloor$), je peux affirmer que :
   $\forall n \geq p, n > e^{100} - 1 \text{ donc } \ln(n+1) > 100$.

Corrigé :

Ex 0

1. La phrase « $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, (x < A \Longrightarrow x^7 < -1000)$. » est VRAIE car la fonction $f : (x \mapsto x^7)$ tend vers$-\infty$ en $-\infty$ et on a l'illustration suivante :



2. La phrase : « $\forall x \in \mathbb{R}, (x^4 > 16 \Leftrightarrow x > 2)$. » est FAUSSE car il existe au moins un réel $x = -3$ qui vérifie $x < 2$ et $x^4 > 16$ donc l'implication$x^4 > 16 \Longrightarrow x > 2$ est fausse
3. La phrase : « $\exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p \Longrightarrow \ln(n+1) \geq 100)$. » est VRAIE ; en effet, la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\ln(3^{100}) = 100\ln(3) > 100\ln(e) = 100$; donc, pour tous les entiers n supérieurs à $p = 3^{100}$, $\ln(n+1) > \ln(n) \geq \ln(p) > 100$.
4. La phrase : « $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} /\ e^n \leq p$. » est VRAIE puisque tout réel a un entier qui lui est supérieur donc tout réel de la forme e^n a un entier qui lui est supérieur. En pratique, $\forall n \in \mathbb{N}, p = \lfloor e^n \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ et vérifie $e^n \leq p$.
5. La phrase : « $\exists A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, e^n \leq A$. » est FAUSSE car la suite $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$tend vers $+\infty$ donc cette suite n'est pas majorée. En pratique, $\forall A \in \mathbb{N}, n = \lfloor A \rfloor + 1$ vérifie $A < e^n$.

Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. On pose $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$.
1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, u_{n-1} et u_1.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

1. Soit n un entier naturel. $u_{n+1} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = u_n u_1 - u_{n-1}$.
2. Posons $H(n)$: « $u_n \in \mathbb{Z}$ ».

Init : $u_1 \in \mathbb{Z}$ et $u_0 = 2 \in \mathbb{Z}$. Donc $H(0)$ et $H(1)$ sont vraies.
Propag : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose que $H(n)$ et $H(n-1)$ sont vraies. Sous cette hypothèse, je vais prouver que $H(n+1)$ est vraie. Je sais donc que u_n et u_{n-1}sont entiers. De plus, u_1 l'est aussi. J'en déduis que $u_{n+1} = u_n u_1 - u_{n-1}$est aussi entier.
CCL : D'après le théorème de récurrence double , je peux affirmer que $H(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. Je cherche $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

Analyse : supposons qu'un tel entier p existe. Alors, $p \in \mathbb{Z}$, $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

Alors, nécessairement, $x + \frac{1}{x} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2} + \frac{1}{\frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}} = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2} + \frac{2}{p \pm \sqrt{p^2-4}} = \frac{\left(p \pm \sqrt{p^2-4}\right)^2 + 4}{2(p \pm \sqrt{p^2-4})} = \frac{2p^2 \pm 2p\sqrt{p^2-4}}{2(p \pm \sqrt{p^2-4})} = \frac{p(p \pm \sqrt{p^2-4})}{p \pm \sqrt{p^2-4}} = p$.

Donc si p existe alors nécessairement $p = x + \frac{1}{x}$; donc un unique entier p peut convenir.

Synthèse. Posons $p = x + \frac{1}{x}$. Alors $p \in \mathbb{Z}$ et $\underbrace{x^2 - px + 1}_{K(x)} = 0$. Posons $K(t) = t^2 - pt + 1$. Comme K admet x comme racine réelle, on a $\Delta_K = p^2 - 4 \geq 0$ et par suite $p^2 \geq 4$. De plus, x étant racine de K, $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$. Donc p convient et est l'unique entier qui convienne d'après l'analyse.

Ainsi, $p = x + \frac{1}{x}$ est l'unique entier tel que : $p^2 \geq 4$ et $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.