DL 1

Ex 0 Les phrases suivantes sont-elles VRAIES ou FAUSSES ? justifier votre réponse (on pourra faire un dessin pour certaine réponse).

1. $\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, (x < A \Longrightarrow x^7 < -1000)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, (x^4 > 16 \Leftrightarrow x > 2)$.
3. $\exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq p \Longrightarrow \ln(n+1) \geq 100)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N} /\ e^n \leq p$.
5. $\exists A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, e^n \leq A$.

Ex 1 Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. On pose $u_n = x^n + \frac{1}{x^n}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, u_{n-1} *et* u_1.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p^2 \geq 4$ *et* $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$.

A rendre jeudi 12 septembre 2023

Ex 2 Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{k+1}$.

1. Justifier que $\forall n, u_n > 0$.
2. Démontrer que $\forall n \geq 2, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_{n-1}$.
3. En déduire une expression explicite de u_n.

Ex 3

1. Déterminer une suite (u_n) de la forme : $u_n = (An + B).2^n$ (où A et B sont deux réels indépendants de n à déterminer) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n2^n$.
2. En déduire $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$ (on demande une expression sans $\sum$).