Programme de révision du DC 2 du LUNDI 16 septembre 2024

I COURS et APPLICATION DIRECTE

Connaitre, reconnaitre et savoir appliquer ces formules sur des exemples simples.

22.Théorème de calcul des sommes des n premiers entiers à différentes puissances :
Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad et \quad$ $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

24.Théorème de somme géométrique . $\forall z \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0;n]\!]$, $\sum_{k=p}^{n} z^k = \begin{cases} z^p\left(\frac{1-z^{n-p+1}}{1-z}\right) \; si\; z \neq 1. \\ n-p+1 \; si\; z = 1 \end{cases}$

25. Théorème de factorisation de $a^n - b^n$. Soit $a\; et\; b$ deux réels (ou complexe) et n un entier naturel non nul .

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \,.$$

35. Théorème : Formule du binôme de Newton $(\boldsymbol{FBN})$.
Pour tous $a\; et\; b$ nombres réels et n un entier naturel, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

37. Corollaire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Exemples simples :

- $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots .. + 2187 \underbrace{=}_{calculer} ?$
- $9 + 16 + 25 + \cdots .. + 169 \underbrace{=}_{calculer} ?$
- $\sum_{i=2}^{N} 5(i+1)^2 - 2^{i-1} \underbrace{=}_{calculer} ?$
- $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k} 3^k 2^{-k} 5^{n-k} \underbrace{=}_{calculer} ?$
- $\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+1} \underbrace{=}_{calculer} ?$
- $(1-k)^7 \underbrace{=}_{développer} ?$
- $1 - x^5 \underbrace{=}_{factoriser} ?$

II Résoudre un exercice plus élaboré parmi ceux ci-dessous .

COURS 46bis Exemple corrigé : Soit u la suite définie par : $u_0 = (-1)\; et\; \forall n \in \mathbb{N},\; 2u_{n+1} - 3u_n = 5$. Exprimons u_n en fonction de n puis calculons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

TD Ex 14 Soit x un réel et n un réel. On souhaite calculer $U_n(x) = \sum_{k=0,}^{n} k\, x^k$.

1. Que vaut $U_n(1)$? Désormais $x \neq 1$.
2. On pose $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Donner une autre expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   b. En déduire deux expressions de $f'(x)$ $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   c. En déduire $\boldsymbol{U_n(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

TD Ex 18 Calculer $S_n = \sum_{1 \le i,j \le n} \min(i,j)$ où $n \in \mathbb{N}$.

TD Ex 20

1. Soit a, b, c, d des entiers. Justifier que : $\left(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}\right)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 / \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ .On trouvera une relation entre $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$.
3. En déduire que les suites $(a_n)\; et\; (b_n)$sont strictement croissantes.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.