Sup PCSI 2024-2025

Programme de révision du DC 1 du mardi 10 septembre 2024

- **un énoncé de théorème ou définition avec les HYPOTHESES !!**
- **un calcul de somme.**

22. Théorème de calcul des sommes des n premiers entiers à différentes puissances :
Pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad et \quad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad et \quad \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

22 bis Exemples A SAVOIR FAIRE :
2) Calculons $S(n) = \sum_{\substack{2\le i\le 2n \\ 3\le j\le 2n+1}} i^2 j$ où n entier naturel supérieur à 3.
3) Calculons $T(n) = \sum_{1\le i<j\le n} \frac{i}{j}$.

24. Théorème de somme géométrique. Soit z un réel(ou complexe) et n un entier naturel .

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} & si\ z \neq 1 \\ n+1 & si\ z = 1 \end{cases}.$$

Et plus généralement, $\forall z \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0;n]\!]$,

$$\sum_{k=p}^{n} z^k = z^p \sum_{k=0}^{n-p} z^k = \begin{cases} z^p\left(\frac{1-z^{n-p+1}}{1-z}\right) & si\ z \neq 1. \\ n-p+1 & si\ z = 1 \end{cases}$$

$$Autrement\ dit, si\ z \neq 1\ alors\ \sum_{k=p}^{n} z^k = premier\ terme \times \left(\frac{1-z^{nombre\ de\ termes}}{1-z}\right)$$

24bis Exemple A SAVOIR FAIRE :
2) Calculons $S = \sum_{0\le i\le j\le n} 2^{i+j}$

25. Théorème de factorisation de $a^n - b^n$. Soit $a\ et\ b$ deux réels (ou complexe) et n un entier naturel.

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n)\ .$$

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k\ .$$

26. Définition d'une factorielle et d'un coefficient binomial: Soit $k\ et\ n$ deux entiers naturels .

- Factorielle n est l'entier naturel noté $n\,!$ défini par : $0\,! = 1$ si $n = 0$

$$et\ si\ n \geq 1\ alors\ n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = \prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1)! =$$

$$= produit\ de\ tous\ les\ entiers\ compris\ entre\ 1\ et\ n.$$

- Le coefficient binomiale k parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et défini par : $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & si\ 0 \le k \le n \\ 0 & si\ k > n \end{cases}$.

28. Propriétés : Si $k\ et\ n$ sont deux entiers naturels tels que $0 \le k \le n\ alors\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

29. Valeurs particulières : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ si $n \geq 1$ **et enfin** $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$ si $n \geq 2$.

30. Formule de Pascal: Pour tous $k\ et\ n$ entiers naturels, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

+**Exemple A SAVOIR FAIRE :** Calculons $W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{n}$.

$$W_n = \sum_{k=0}^{2n}\binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n} \underbrace{=}_{\substack{triangle \\ de \\ Pascal}} \underbrace{\sum_{k=n}^{2n}\left[\underbrace{\binom{k+1}{n+1}}_{u_{k+1}} - \underbrace{\binom{k}{n+1}}_{u_k}\right]}_{somme\ télescopique} = u_{2n+1} - u_n = \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}.$$