Corrigé TD Valeur absolue.

Résoudre $|2x^2-x-1|=|1-x^3|$.

$$|2x^2-x-1|=|1-x^3| \Leftrightarrow 2\left|(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| = |(1-x)(1+x+x^{22}| \Leftrightarrow 2\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)\right||(x-1)| = |(1-x)||(1+x+x^{22}|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x\neq 1 \; et \; 2\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\underbrace{1+x+x^2}_{t(x)}\right| \end{cases} \underset{\substack{car\ \Delta_t<0 \\ donc\ \forall x, t(x)>0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x\neq 1 \; et \; 2\left|x+\frac{1}{2}\right| = 1+x+x^2 \end{cases}$$

deux méthodes pour la suite)

OU BIEN j'élève au carré(

$$\underset{\substack{car\ \forall x, 2\left|x+\frac{1}{2}\right|\geq 0 \\ et\ t(x)>0}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x\neq 1 \; et \; \left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 = [1+x+x^2]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x\neq 1 \; et \; x^4-x^2+2x^3-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x\neq 1 \; et \; x^2(x^2-1)+2x(x^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x\neq 1 \; et \; (x^2-2x)(x^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x\neq 1 \; et \; x(x-2)(x-1)(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ ou \\ x=0 \; ou \; x=2 \; ou \; x=-1 \end{cases}$$

. Ainsi, $Sol=\{1,0,-1,-2\}$.

OU BIEN je traite deux cas **1^{er} cas $x>-1/2$ et $x\neq 1$**

Alors, $\left|x+\frac{1}{2}\right| = x+\frac{1}{2}$. $Donc,\ 2\left|x+\frac{1}{2}\right| = 1+x+x^2 \Leftrightarrow 2x+1=1+x+x^2 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \underset{car\ x\neq 1}{\Leftrightarrow} x=0$.

$2^{ème}$ cas $x<-1/2$

Alors, $\left|x+\frac{1}{2}\right| = -\left(x+\frac{1}{2}\right)$. $Donc,\ 2\left|x+\frac{1}{2}\right| = 1+x+x^2 \Leftrightarrow -2x-1=1+x+x^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-1\ ou\ x=-2$.

$$Sol=\{1,0,-1,-2\}.$$

Rque : $|2x^2-x-1| = \begin{cases} 2x^2+x-1 \; si \;\; 2x^2-x-1\geq 0 \\ -2x^2-x+1 \; si \; -2x^2+x+1>0 \end{cases} \underset{car\ 2x^2-x-1=2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{=} \begin{cases} 2x^2-x-1 \; si \;\; x\in]-\infty,-\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty[\\ -2x^2+x+1 \; si \;\; x\in]-\frac{1}{2},1[\end{cases}$.

$|1-x^3| = \begin{cases} 1-x^3 \; si \;\; 1-x^3<0 \\ x^3-1 \; si \;\; 1-x^3\geq 0 \end{cases} \underset{\substack{car\ la\ fonction\ cube\ est\ stricteemnt\ croissante \\ donc\ 1<x^3\Leftrightarrow 1<x}}{=} \begin{cases} 1-x^3 \; si \;\; 1>x \\ x^3-1 \; si \;\; 1\leq x \end{cases}$.

Soit x un réel. Montrer que : $|x-1|\leq\frac{1}{3} \Rightarrow |x^2-1|\leq 1$.

Soit x un réel tel que $|x-1|\leq\frac{1}{3}$. Montrons que $|x^2-1|\leq 1$. Je sais que $|x-1|\leq\frac{1}{3}$ i.e. $-\frac{1}{3}\leq x-1\leq\frac{1}{3}$. $Par\ suite,\ 0<\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}+1\leq x\leq\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$. Alors, $\frac{4}{9}\leq x^2\leq\frac{16}{9}$ donc $\frac{-5}{9}\leq x^2-1\leq\frac{7}{9}$. Ainsi, $-1\leq x^2-1\leq 1$ et cela signifie que $|x^2-1|\leq 1$.

Soit deux réels x et y . Montrer que : $\sqrt{|x\pm y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$.

Je sais que $|x\pm y|\leq|x|+|y|$. Donc, $\sqrt{|x\pm y|}\leq\sqrt{|x|+|y|}$ car la fonction racine carrée est croissante . De plus, le cours assure que pour touts réels positifs a et b , $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$. J'en déduis que $\sqrt{|x|+|y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$. J'en déduis que $\sqrt{|x\pm y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$.

Pour ôter les valeurs absolues on utilise l'une de ces équivalences:

$$|X|\leq A \Leftrightarrow X^2\leq A^2 \Leftrightarrow -A\leq X\leq A \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq X\leq A \\ ou \\ -A\leq X\leq 0 \end{cases}$$

Montrer que : pour tous réels a et b, $|a|+|b|\leq|a+b|+|a-b|$.

Soit deux réels a et b.

$$|a|+|b| = \left|\frac{1}{2}[(a+b)+(a-b)]\right| + \left|\frac{1}{2}[b+a)-(a-b)]\right|$$

$$|a|+|b| = \frac{1}{2}[|[(a+b)+(a-b)]|+|[b+a)-(a-b)]|] \underset{\substack{première \\ inégalité \\ triangulaire}}{\lesseqqgtr} \frac{1}{2}[|a+b|+|a-b|+|a+b|+|a-b|] = |a+b|+|a-b|$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|\leq 1-\frac{1}{n}$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

Deux méthodes de résolution

$\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|\leq 1-\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n}-1\leq\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\leq 1-\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{2}{n}\leq\frac{2}{i}\leq 2 \Leftrightarrow 1\leq i\leq n$. Or, je sais que $i\in[\![1,n]\!]$. Par conséquent, l'équivalence précédente me permet de conclure que $\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|\leq 1-\frac{1}{n}$.

OU BIEN Les réels $1-\frac{1}{n}$ et $\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|$ étant positifs, ils sont ordonnés dans le même ordre que leurs carrés.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 - \left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|^2 = 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}-\left(\frac{4}{i^2}+\frac{1}{n^2}+1-\frac{4}{i}+\frac{2}{n}-\frac{4}{in}\right) = -\frac{4}{i^2}+\frac{4}{i}+\frac{4}{in}-\frac{4}{n} = \frac{4}{i^2n}(-n+ni+i-i^2)$$

$= \frac{4}{i^2n}\big(i(n-i)-(n-i)\big) = \frac{4(n-i)(i-1)}{i^2n}\geq 0\ car\ 1\leq i\leq n$. Donc $\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\geq\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|^2$ et par suite, $1-\frac{1}{n}\geq\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|$.

Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Puis calculer la limite de f en 2.
2. Montrer que $\forall x\in Df\cap\mathbb{R}^+$, $\left|f(x)-\frac{3}{4}\right|\leq\frac{|x-2|}{80}$.
3. En déduire un réel $r\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall x\in[2-r,2+r]\backslash\{2\}, f(x)\in[\frac{74}{100};\frac{76}{100}]$.

1. Domaine de définition de f : $f(x)existe \Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0 \\ 2x+5\geq 0 \\ \sqrt{2x+5}\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -\frac{5}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$. Donc, $Df=[-2,2[\cup]2,+\infty[$.

Limite de f en 2 : $f(x)=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{(x+2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)((\sqrt{x+2}+2)} = \frac{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)((\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{x+2}+2)}$. Donc, $\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

2. Soit $x\in Df\cap\mathbb{R}^+$.

$$\left|f(x)-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{1(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{x+2}+2)}-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{2(\sqrt{2x+5}+3)-3(\sqrt{x+2}+2)}{4(\sqrt{x+2}+2)}\right| = \left|\frac{2\sqrt{2x+5}-3\sqrt{x+2}}{4(\sqrt{x+2}+2)}\right| = \left|\frac{(2\sqrt{2x+5}-3\sqrt{x+2})(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2})}{4(\sqrt{x+2}+2)(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2})}\right|$$

$\left|f(x)-\frac{3}{4}\right| = \left|\frac{4(2x+5)-9(x+2)}{4(\sqrt{x+2}+2)(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2})}\right| = \frac{|x-2|}{|4(\sqrt{x+2}+2)(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2})|} = \frac{|x-2|}{4(\sqrt{x+2}+2)(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2})}$.

Or, $x \geq 0$ donc, $2(\sqrt{x+2}+2) \geq 2\sqrt{2}+2 > 0$ *et* $2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2} \geq 2\sqrt{5}+3\sqrt{2} > 0$.

Par suite, $4(\sqrt{x+2}+2)(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2}) \geq 4(\sqrt{2}+2)(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}) \geq 4(1+2)(2\times 2+3\times 1) = 4\times 3\times 7 = 84 > 80 > 0$.

Par conséquent, $\frac{1}{4(\sqrt{x+2}+2)(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2})} < \frac{1}{80}$ et puisque $|x-2| < 0$, $\frac{|x-2|}{4(\sqrt{x+2}+2)(2\sqrt{2x+5}+3\sqrt{x+2})} < \frac{|x-2|}{80}$.

J'en conclus que $\left|f(x)-\frac{3}{4}\right| < \frac{|x-2|}{80}$.

3. En déduire un réel $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall x \in [2-r, 2+r]\backslash\{2\}, f(x) \in [\frac{74}{100}\,;\frac{76}{100}]$.

Tout d'abord, prenons $x \in Df$. $f(x) \in \left[\frac{74}{100};\frac{76}{100}\right] \Leftrightarrow \frac{74}{100} \leq f(x) \leq \frac{76}{100} \Leftrightarrow \frac{74}{100}-\frac{3}{4} \leq f(x)-\frac{3}{4} \leq \frac{76}{100}-\frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{100} \leq f(x)-\frac{3}{4} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|f(x)-\frac{3}{4}\right| \leq \frac{1}{100}$.

D'après ce qui précède si $x \in Df \cap \mathbb{R}^+$, alors pour que $\left|f(x)-\frac{3}{4}\right| \leq \frac{1}{100}$, il suffit que $\frac{|x-2|}{80} \leq \frac{1}{100}$ $i.e.$ $|x-2| \leq \frac{4}{5}$ $i.e. -\frac{4}{5} \leq x-2 \leq \frac{4}{5}$ $i.e.$ $2-\frac{4}{5} \leq x \leq 2+\frac{4}{5}$.

Posons $r = \frac{4}{5}$. Alors $\forall x \in [2-r, 2+r]\backslash\{2\}, x \in Df \cap \mathbb{R}^+$ et $\frac{|x-2|}{80} \leq \frac{1}{100}$, donc, $f(x) \in [\frac{74}{100}\,;\frac{76}{100}]$. Donc $r = \frac{4}{5}$ convient.

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| \leq \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$.

2. $\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| = \left|\frac{(1-x)(\sum_{k=0}^{n} x^k)}{1-x}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| \overset{1\text{ère } IT}{\leq} \sum_{k=0}^{n}\left|x^k\right| = \sum_{k=0}^{n}|x|^k \underbrace{=}_{\substack{car\ x\neq\pm 1\ donc \\ |x|\neq 1}} \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$.