CORRIGE TD Partie entière.

Soit x et y deux réels. Montrer que : $\lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$.

Notons $n=\lfloor x\rfloor$ et $m=\lfloor y\rfloor$.

1er cas : $x\in\left[n,n+\frac{1}{2}\right[$ et $y\in\left[m,m+\frac{1}{2}\right[$.

Alors $\underbrace{2x\in[2n,2n+1[}_{\substack{\text{cela signifie que } 2x \text{ est}\\ \text{encadré par deux entiers consécutifs}\\ \text{et ne peut pas être au plus grand.}}}$ et $y\in[2m,2m+1[$ et $x+y\in[n+m,n+m+1[$. Par conséquent,

$\lfloor 2x\rfloor=2n,\lfloor 2y\rfloor=2m$ et $\lfloor x+y\rfloor=n+m$. Et par suite, $\lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor=n+(n+m)+m=2n+2m=\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$.

2ème cas : $x\in\left[n+\frac{1}{2},n+1\right[$ et $y\in\left[m,m+\frac{1}{2}\right[$.

Alors $\underbrace{2x\in[2n+1,2n+2[}_{\substack{\text{cela signifie que } 2x \text{ est}\\ \text{encadré par deux entiers consécutifs}\\ \text{et ne peut pas être au plus grand.}}}$ et $y\in[2m,2m+1[$ et $x+y\in\left[n+m+\frac{1}{2},n+m+\frac{3}{2}\right[$. Par conséquent,

$$\lfloor 2x\rfloor=2n+1,\lfloor 2y\rfloor=2m \text{ et } \lfloor x+y\rfloor=\begin{cases} n+m \text{ si } x\in\left[n+m+\frac{1}{2},n+m+1\right[\\ n+m+1 \text{ si } x\in\left[n+m+1,n+m+\frac{3}{2}\right[\end{cases}\leq n+m+1.$$

Et par suite, $\lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq n+(n+m+1)+m=2n+1+2m=\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$.

3ème cas : $x\in\left[n,n+\frac{1}{2}\right[$ et $y\in\left[m+\frac{1}{2},m+1\right[$. Etant les rôles symétriques de x et y dans la formule à prouver, ce cas est analogue au précédent et aboutit au même résultat.

4ème cas : $x\in\left[n+\frac{1}{2},n+1\right[$ et $y\in\left[m+\frac{1}{2},m+1\right[$.

Alors $\underbrace{2x\in[2n+1,2n+2[}_{\substack{\text{cela signifie que } 2x \text{ est}\\ \text{encadré par deux entiers consécutifs}\\ \text{et ne peut pas être au plus grand.}}}$ et $y\in[2m+1,2m+2[$ et $x+y\in[n+m+1,n+m+2[$. Par conséquent,

$\lfloor 2x\rfloor=2n+1,\lfloor 2y\rfloor=2m+1$ et $\lfloor x+y\rfloor=n+m+1$.

Et par suite, $\lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor=n+(n+m+1)+m=2n+1+2m\leq 2n+2m+2=\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$.

CCL : dans tous les cas, $\lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$.

Soit n un entier naturel.

1) Développer $(3+\sqrt{5})^n$ et $(3-\sqrt{5})^n$.
2) En déduire que $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
3) Montrer que $\lfloor(3+\sqrt{5})^n\rfloor$ est un entier impair.

1) $(3+\sqrt{5})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{5}^k3^{n-k}$ et $(3-\sqrt{5})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\sqrt{5})^k3^{n-k}$.

2) $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\sqrt{5}^k+(-\sqrt{5})^k\right]3^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{[1+(-1)^k]}_{\substack{=0 \text{ si } k \text{ impair}\\ =2 \text{ si } k \text{ pair}}}\sqrt{5}^k3^{n-k}$

$$(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n=\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}2\sqrt{5}^k3^{n-k}=\sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{2p}2\sqrt{5}^{2p}3^{n-2p}=\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2p}2\times 5^p\times 3^{n-2p}=2\underbrace{\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2p}5^p\times 3^{n-2p}\right]}_{\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi, $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair .

3) D'après ce qui précède, $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n=2k$ tel que $k\in\mathbb{N}$. donc $(3+\sqrt{5})^n=2k-(3-\sqrt{5})^n$. De plus, $0<3-\sqrt{5}<1$ $donc$ $0<(3-\sqrt{5})^n<1$ et par conséquent, $\underbrace{2k-1<(3+\sqrt{5})^n<2k}_{\substack{(3+\sqrt{5})^n \text{ est encadré par deux entiers}\\ \text{consécutifs et ne peut pas être égal}\\ \text{au plus grand des deux.}}}$

La caractérisation de la partie entière permet alors de conclure que $\lfloor(3+\sqrt{5})^n\rfloor=2k-1$ donc $\lfloor(3+\sqrt{5})^n\rfloor$ est impair.

Montrer que pour tous entiers relatifs n et m, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=n.$

Soit n et m deux entiers naturels.

1er cas n et m ont la même parité. Alors $n+m$ et $n-m$ sont pairs et $n-m+1$ est impair. Par conséquent, $\frac{n+m}{2}\in\mathbb{Z}$ et $\frac{n-m}{2}\in\mathbb{Z}$ donc $\left\lfloor\frac{n+m}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor=\frac{n+m}{2}$ et $\left\lfloor\frac{n-m}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor=\frac{n-m}{2}$.

Par conséquent, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=\frac{n+m}{2}+\frac{n-m}{2}=n.$

2eme cas n et m sont de parité contraire. Alors $n+m$ et $n-m$ sont impairs et $n-m+1$ est pair. Par conséquent, $\frac{n+m}{2}$ et $\frac{n-m+1}{2}\in\mathbb{Z}$ et $n+m=2k+1$ donc $k<\frac{n+m}{2}=k+\frac{1}{2}<k+1$ $donc$ $\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=\frac{n-m+1}{2}$ et $\left\lfloor\frac{n-m}{2}+\frac{1}{2}\right\rfloor=k=\frac{n+m-1}{2}$.Par conséquent, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=\frac{n-m+1}{2}+\frac{n+m-1}{2}=n.$

Ainsi, pour tous entiers relatifs n et m, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=n.$

Montrons que : pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

Soit x un réel et n un entier naturel non nul.

$\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$. Donc, $n\lfloor x\rfloor\leq nx<n\lfloor x\rfloor+n$. L'entier $n\lfloor x\rfloor$ est inférieur au réel nx. Or $\lfloor nx\rfloor$ est le plus grand entier inférieur à nx. Par conséquent, $n\lfloor x\rfloor\leq\lfloor nx\rfloor$.

Et par suite , $n\lfloor x\rfloor\leq\lfloor nx\rfloor\leq nx<n\lfloor x\rfloor+n$ puis $\lfloor x\rfloor\leq\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\leq x<\lfloor x\rfloor+1$. $\lfloor x\rfloor$ et $\lfloor x\rfloor+1$ sont alors deux entiers consécutifs qui encadrent le réel $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ et ce réel ne peut pas être égal au plus grand des deux entiers ; la caractérisation du cours assure alors que $\lfloor x\rfloor$ est la partie entière de $\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ $i.e.$ $\lfloor x\rfloor=\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor$.

Soit n un entier naturel. Déterminer $\left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor$

Si $n>0$ alors $(n+1)^2=n^2+2n+1<n^2+3n+4<n^2+4n+4=(n+2)^2$ et par stricte croissance de la racine carrée, $\underbrace{n+1<\sqrt{n^2+3n+4}<n+2}_{\substack{\sqrt{n^2+3n+4} \text{ est encadré par deux entiers}\\ \text{consécutifs et ne peut pas être}\\ \text{égal au plus grand des deux .}}}$.

Alors la caractérisation du cours assure alors que $\left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor=n+1$.

Si $n=0$ alors $\left\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\right\rfloor=\lfloor 2\rfloor=2$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}*$. Montrer que : $\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor\leq\left\lfloor\sqrt{4n+2}\right\rfloor$

2. Imaginons un instant qu'il existe un entier n non nul tel que : $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

a) Montrer alors que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

b) En déduire que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2$

c) Expliquer pourquoi cette égalité est impossible et conclure.

1. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Montrons que :$\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$. Il suffit pour cela de montrer que $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}$ puis utiliser la croissance de la partie entière. Les deux réels étant positifs, comparons leurs carrés qui sont ordonnés dans le même sens qu'eux:

$\left(\sqrt{4n+2}\right)^2 - \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 4n+1-n-(n+1)-2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = 2n-2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = 2\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right) < 0.$

Donc, $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}$ et par croissance de la partie entière,

2. Imaginons un instant qu'il existe un entier n non nul tel que : $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

a) Montrons que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

Comme $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$, $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor$ *et* $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ sont des entiers distincts et par suite $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor+1 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$. Alors $\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor+1 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

b) Alors $\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2$. De plus, $0 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor \leq \sqrt{4n+2}$. Donc, $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 \leq \sqrt{4n+2}^2$. Enfin,

$\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}.\,Or\ n = \sqrt{n}\sqrt{n} < \sqrt{n}\sqrt{n+1}$. Donc, $4n+1 = 2n+1+2n < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2$. Par conséquent , $4n+1 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 \leq \sqrt{4n+2}^2 = 4n+2$. Autrement dit, l'entier $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2$ est dans l'intervalle $]4n+1,4n+2]$ qui contient un seul entier : $4n+2$. J'en déduis que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2$.

c) Prouvons que cette égalité est impossible.

Sous l'hypothèse que l' entier n non nul vérifie $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$, on a prouvé que : $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4n+2 = 2(2n+1)$. L'entier $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2$ est donc pair. Alors le cours assure que l'entier $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$ est aussi pair. Alors il existe un entier k tel que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor = 2k$. Alors $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2 = 4k^2$et par suite $4k^2 = 2(2n+1)$ donc $2n+1 = 2k^2$. Cette égalité entre un entier pair et un entier impair est absurde !! J'en conclus qu'il n'existe aucun entier n non nul vérifiant $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor < \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$. Comme de plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor \leq \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$, je peux conclure que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

1.. Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor$. (ind. : $x \in \left[\lfloor x\rfloor; \lfloor x\rfloor+\frac{1}{2}\right[$ ou $x \in [\lfloor x\rfloor; \lfloor x\rfloor+1[$).

2. Donner une méthode pour prouver que : pour tout réel x, $\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+2}{3}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

1. Notons $n = \lfloor x\rfloor$

1er cas : $x \in \left[n, n+\frac{1}{2}\right[$. Alors, $x+\frac{1}{2} \in \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[\subset \underbrace{[n,n+1[}_{\substack{deux\ entiers\\ consécutifs\\ qui\ encadrent\\ x+\frac{1}{2}}}$ et $2x \in \underbrace{[2n,2n+1[}_{\substack{deux\ entiers\\ consécutifs\\ qui\ encadrent\\ 2x}}$. Donc, $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n\ et\ \lfloor 2x\rfloor = 2n$.

Par conséquent, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n+n = 2n = \lfloor 2x\rfloor$.

2èmz cas : $x \in \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right[$. Alors, $x+\frac{1}{2} \in \left[n+1, n+\frac{3}{2}\right[\subset \underbrace{[n+1,n+2[}_{\substack{deux\ entiers\\ consécutifs\\ qui\ encadrent\\ x+\frac{1}{2}}}$ et $2x \in \underbrace{[2n+1,2n+2[}_{\substack{deux\ entiers\\ consécutifs\\ qui\ encadrent\\ 2x}}$. Donc, $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n+1\ et\ \lfloor 2x\rfloor = 2n+1$.

Par conséquent, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = n+(n+1) = 2n+1 = \lfloor 2x\rfloor$.

Ainsi, pour tout réel x, $\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor = \lfloor 2x\rfloor$.

2. On peut traiter 3 cas : $x \in \left[n, n+\frac{1}{3}\right[$, $x \in \left[n+\frac{1}{3}, n+\frac{2}{3}\right[$ et $x \in \left[n+\frac{2}{3}, n+1\right[$.

Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor$. Montrer que $g: (x \mapsto f(x)-\lfloor x\rfloor)$ est 1-périodique. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x\rfloor$.

$D_g = \mathbb{R}$. Donc, $\forall x \in D_g, x+1 \in D_g$.

De plus, $f(x+1) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+1+k}{n}\right\rfloor\right) \underbrace{=}_{car\ 1\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+(1+k)}{n}\right\rfloor \overset{\substack{chgt\ indice\\ j=k+1\\ k=j-1\\ k\in[\![0,n-1]\!]\Leftrightarrow j\in[\![1,n]\!]}}{\cong} \sum_{j=1}^{n}\left\lfloor\frac{x+j}{n}\right\rfloor = \left(\sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor\frac{x+j}{n}\right\rfloor\right) + \left\lfloor\frac{x+n}{n}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor$

$f(x+1) = f(x) + \left\lfloor\frac{x}{n}+1\right\rfloor - \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor \underbrace{=}_{car\ 1\in\mathbb{Z}} f(x) + \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor + 1 - \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor = f(x)+1.$

Alors, $g(x+1) = f(x)+1-\lfloor x+1\rfloor \underbrace{=}_{car\ 1\in\mathbb{Z}} f(x)+1-(\lfloor x\rfloor+1) \overset{\substack{chgt\ indice\\ j=k+1\\ k=j-1\\ k\in[\![0,n-1]\!]\Leftrightarrow j\in[\![1,n]\!]}}{\cong} f(x)-\lfloor x\rfloor = g(x).$

J'en conclus que g est 1-periodique. Je peux donc étudier g sur $[0,1[$.

Soit $x \in [0,1[$. Donc $\lfloor x\rfloor = 0$. De plus, $\forall k \in [\![0,n-1]\!], 0 \leq k \leq n-1\ et\ 0 \leq x < 1$ donc $0 \leq \frac{x+k}{n} \leq \frac{x+(n-1)}{n} < \frac{1+(n-1)}{n} = 1$; et par conséquent, $\left\lfloor\frac{x+k}{n}\right\rfloor = 0$. Donc $f(x) = 0$. Et par suite $g(x) = 0$. Comme g est 1-périodique et nulle sur $[0,1[$, g est nulle partout. Ainsi, $x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x\rfloor$.

Soit x réel et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx\rfloor}{n^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{(n+1)x}{2n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Soit n un entier naturel non nul.

$\forall k \in [\![1,n]\!], \lfloor kx\rfloor \leq kx < \lfloor kx\rfloor+1$ donc $kx-1 < \lfloor kx\rfloor \leq kx$.

Alors, en sommant ces n inégalités, j'obtiens : $\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor \leq \sum_{k=1}^{n}(kx)$.

Or, $\sum_{k=1}^{n}(kx) = x\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) = \frac{xn(n+1)}{2}\ et\ \sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \sum_{k=1}^{n}(kx) - \sum_{k=1}^{n}1 = \frac{xn(n+1)}{2} - n.$

Donc, $\frac{xn(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor \leq \frac{xn(n+1)}{2}$ et en divisant par $n^2 > 0$, $\frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2} - n\right) < u_n \leq \frac{1}{n^2}\left(\frac{xn(n+1)}{2}\right)$. Ainsi,

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$

Comme les deux suites qui encadrent u_n ont la même limite $\frac{x}{2}$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{x}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ .Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ puis $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+3\sqrt{k}}{k} \right\rfloor$.

Si n est pair alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = 0+0+1+1+2+2+3+3+\cdots+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{2}$

$$S_n = \frac{n}{2} + 2\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} p = \frac{n}{2} + 2\frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right)}{2} = \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Si n est impair alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = 0+0+1+1+2+2+3+3+\cdots+\left(\frac{n-1}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)$

$$S_n = 2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} p = 2\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right)}{2} = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \left(\frac{n^2-1}{4}\right)$$

OU BIEN

$$\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ pair}} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ impair}} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \sum_{0\le 2p\le n} \left\lfloor \frac{2p}{2} \right\rfloor + \sum_{1\le 2p+1\le n} \left\lfloor \frac{2p+1}{2} \right\rfloor = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \lfloor p \rfloor + \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \left\lfloor p+\frac{1}{2} \right\rfloor = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} p + \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} p$$

$$= \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1\right)}{2} + \frac{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor+1\right)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{8}(n+2+n-2) = \frac{n^2}{4}\ si\ n\ pair \\ \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{(n-1)}{2}+1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{(n-1)}{2}+1\right) = \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{(n-1)}{2}+1\right) = \frac{n^2-1}{4}\ si\ n\ impair \end{cases}.$$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+3\sqrt{k}}{k} \right\rfloor$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 0 \Leftrightarrow 0 \le \frac{3}{\sqrt{k}} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{k} > 3 \Leftrightarrow k > 9 \Leftrightarrow k \ge 10.$

Donc, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+3\sqrt{k}}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor 1+\frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} \left(1+\left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor\right) = n + \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor$

$S_1 = \sum_{k=1}^{1} \left(1+\left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor\right) = 1 + \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor = 4$

$S_2 = 2 + \sum_{k=1}^{2} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{2}} \right\rfloor = 7$

$S_3 = 3 + \sum_{k=1}^{3} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 3 + \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{3}} \right\rfloor = 3+3+2+1 = 9$

$S_4 = 4 + \sum_{k=1}^{4} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 4 + \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{3}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 4+3+2+1+1 = 11$

$S_5 = 5 + \sum_{k=1}^{5} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 5 + \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{3}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{5}} \right\rfloor = 5+3+2+1+1+1 = 13$

$S_6 = 6 + \sum_{k=1}^{6} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 6 + \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{3}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{5}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{6}} \right\rfloor = 6+3+2+1+1+1+1 = 15$

$S_7 = 7 + \sum_{k=1}^{7} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = 7 + \left\lfloor \frac{3}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{3}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{5}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{6}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{7}} \right\rfloor = 7+3+2+1+1+1+1+1 = 17$

$S_8 = 19$, $S_9 = 21$. Donc, $S_n = 2n+3\ si\ 2 \le n \le 9$.

Soit $n \ge 10$. $S_n = n + \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor = n + \underbrace{\sum_{k=1}^{9} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor}_{S_9-9} + \underbrace{\sum_{k=10}^{n} \underbrace{\left\lfloor \frac{3}{\sqrt{k}} \right\rfloor}_{=0}}_{=0} = n + S_9 - 9 = n + 12.$ Donc, $S_n = n+12\ si\ 10 \le n.$

Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} /\ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \le x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$. En déduire que $A = \left\{\frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \le q \le 2^n\right\}$ est dense dans $[0,1]$ $i.e.$ entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.

Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $q \in \mathbb{N}$ et $0 \le x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 0 \le 2^n x - q < 1 \Leftrightarrow q \le 2^n x < q+1 \Leftrightarrow q = \lfloor 2^n x \rfloor$.

Or $0 \le x \le 1$ donc $0 \le 2^n x \le 2^n$ et par croissance de la fonction partie entière, $0 = \lfloor 0 \rfloor \le \lfloor 2^n x \rfloor \le \lfloor 2^n \rfloor = 2^n$. Donc, l'unique entier relatif q vérifiant $0 \le x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$ est $q = \lfloor 2^n x \rfloor \in [\![0, 2^n]\!]$.

Soit x et y deux réels tels que $0 \le x < y \le 1$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que : $y - x > \frac{1}{2^n}$.

$y - x > \frac{1}{2^n} > 0 \Leftrightarrow 2^n > \frac{1}{y-x} > 0 \Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln\left(\frac{1}{y-x}\right) \Leftrightarrow n\ln(2) > -\ln(y-x) \Leftrightarrow n > -\frac{\ln(y-x)}{\ln(2)}$.

Prenons $n = \max\left(0, \left\lfloor -\frac{\ln(y-x)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1\right)$. Alors $n \in \mathbb{N}\ et\ y - x > \frac{1}{2^n}$. D'après ce qui préfère, il existe $\exists q \in \mathbb{N} /\ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \le y - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n} < y - x$. Posons $t = \frac{q}{2^n}$. Alors $t \in A\ et\ 0 < y - t < y - x\ \ i.e. x < t < y$. Donc t convient.

Résoudre $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor -x+5 \rfloor$, d'inconnue x réelle.

$\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor -x+5 \rfloor \Leftrightarrow \lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor -x \rfloor + 5 \Leftrightarrow \lfloor 2x \rfloor = \lfloor -x \rfloor + 2 \Leftrightarrow \lfloor -x \rfloor + 2 \le 2x < \lfloor -x \rfloor + 3$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{car \\ -x-1<\lfloor -x \rfloor \le -x}} -x+1 < 2x < -x+3 \Rightarrow 1 < 3x < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1.$$

Ainsi, seuls les réels de $]\frac{1}{3}, 1[$ peuvent être solutions.

Soit $x \in]\frac{1}{3}, 1[$.

1er cas : $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$. Alors $\frac{2}{3} < 2x < 1\ et\ \frac{-1}{2} < -x < \frac{-1}{3}$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 0$ et $\lfloor -x \rfloor = -1$. Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor \ne \lfloor -x \rfloor + 2$ et par suite $\lfloor 2x+3 \rfloor \ne \lfloor -x+5 \rfloor$

2eme cas : $\frac{1}{2} \le x < 1$. Alors $1 \le 2x < 2\ et\ -1 < -x \le \frac{-1}{2}$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 1$ et $\lfloor -x \rfloor = -1$. Par conséquent, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor -x \rfloor + 2$ et par suite $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor -x+5 \rfloor$.

Ainsi, Sol= $[\frac{1}{2}, 1[$.

1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x>p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x<p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ où $p \in \mathbb{Z}$. Qu'en déduit-on pour $(x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})$?
2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

1) Posons $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

$\forall x \in]p, p+1[, f(x) = p + \sqrt{x-p}$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x>p}} f(x) = p + \sqrt{p-p} = p = f(p)$.

$\forall x \in]p-1, p[, f(x) = p - 1 + \sqrt{x-(p-1)}$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to p\\ x>p}} f(x) = p - 1 + \sqrt{p-(p-1)} = p - 1 + \sqrt{1} = p = f(p)$.

J'en déduis que la fonction f est continue en p.

2)Posons $g(x) = \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$.

$\forall x \in]0,1[, \lfloor x\rfloor = 0$ donc $g(x) = 0$ et par conséquent, $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$

$\forall x \in]-1,0[, \lfloor x\rfloor = -1$ donc $g(x) = -\frac{1}{x}$ et par conséquent, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$.

$\forall x > 1, 0 < \lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor - 1 \, donc \;\; 1 \le \frac{x}{\lfloor x\rfloor} < 1 - \frac{1}{\lfloor x\rfloor} (**)$. De plus $\forall x > 1, x + 1 < \lfloor x\rfloor$. Donc comme $\lim_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor = +\infty$ et par suite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lfloor x\rfloor} = 0$. Alors d'après $(**)$, $\frac{x}{\lfloor x\rfloor}$ est encadré par deux fonctions de limite 1 en$+\infty$, je peux conclure que $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\lfloor x\rfloor} = 1$.

Représenter la courbe de $f: \left(x \mapsto \frac{1}{\lfloor x - \lfloor -x\rfloor\rfloor}\right)$.

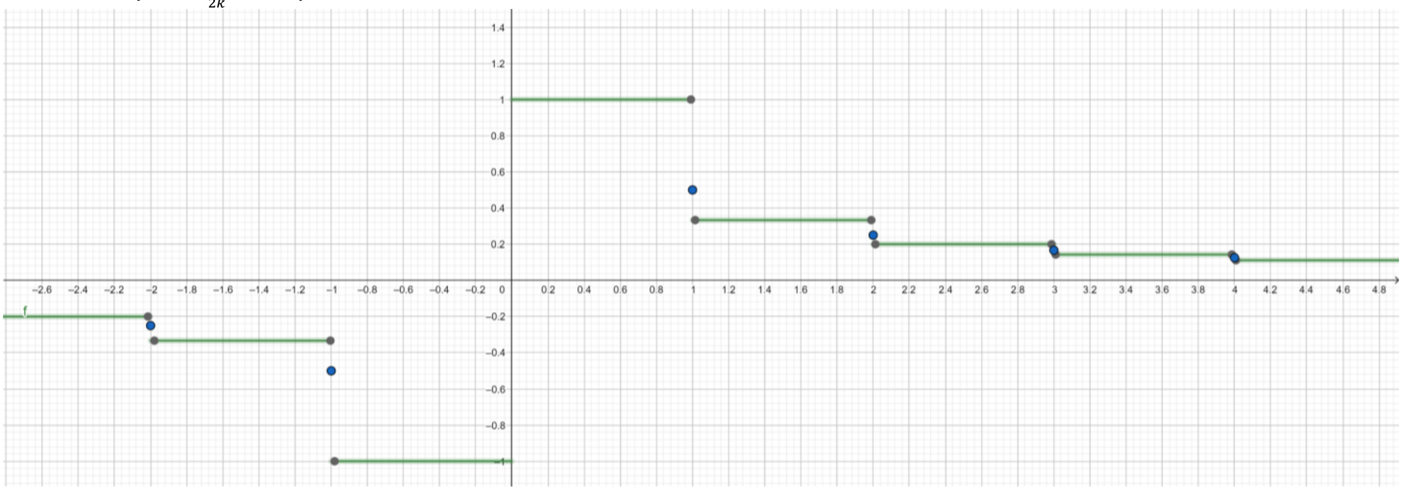
***Df* ?** $f(x)$ *existe* $\Leftrightarrow \lfloor x - \lfloor -x\rfloor\rfloor \neq 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} -\lfloor x\rfloor - 1 \; si \; x \notin \mathbb{Z} \\ -x \; si \; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R},\ x - \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} x + \lfloor x\rfloor + 1 \; si \; x \notin \mathbb{Z} \\ 2x \; si \; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Si $x \in \mathbb{Z}$ alors $x - \lfloor -x\rfloor \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $2\lfloor x\rfloor + 1 \le x + \lfloor x\rfloor + 1 < 2\lfloor x\rfloor + 2 \; donc, \lfloor x - \lfloor -x\rfloor\rfloor = 2\lfloor x\rfloor + 1 \; est \; un \; entier \; impair$ et par suite, $\lfloor x - \lfloor -x\rfloor\rfloor \neq 0$. Ainsi, $Df = \mathbb{R}^*$.

Nouvelle expression de f : Si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $f(x) = \frac{1}{2\lfloor x\rfloor + 1}$ et par conséquent, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in]k, k+1[, f(x) = \frac{1}{2k+1}$.

Si $k \in \mathbb{Z}^*$ alors $f(k) = \frac{1}{2k}$. Ainsi, Cf a l'allure suivante :



1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} -\lfloor x\rfloor - 1 \; si \; x \notin \mathbb{Z} \\ -x \; si \; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x\rfloor) \; et \; g: (x \mapsto |2x - 1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer, si elle existe, la limite de f en k^+ (i.e. quand $x \to k \; et \; x > k$) . Faire de même en k^-. Qu'en déduit-on sur f ?
4. Tracer Cf.

1. Soit x un réel.
   Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $-x \in \mathbb{Z}$ et par conséquent $\lfloor -x\rfloor = -x = -\lfloor x\rfloor$
   Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $\underbrace{-1 - \lfloor x\rfloor < -x < -\lfloor x\rfloor}_{\substack{-x \; est \; encadré \; par \; deux \; entiers \\ consécutifs \; et \; ne \; peut \; pas \; être \; égal \\ au \; plus \; grand \; des \; deux \; enteirs}}$ et d'après la caractérisation de la partie entière, $\lfloor -x\rfloor = -1 - \lfloor x\rfloor$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g\big(f(x)\big) = |2(x - \lfloor x\rfloor) - 1| \; et \;\; f(-x) = |2(-x - \lfloor -x\rfloor) - 1|$.
   $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = |2(x - x) - 1| = |-1| = 1$ et $f(-x) = |2(-x - (-x)) - 1| = |-1| = 1$ .Donc $f(-x) = f(x)$.
   $\forall x \notin \mathbb{Z}, f(x) = |2(x - \lfloor x\rfloor) - 1| = |2x - 2\lfloor x\rfloor - 1|$ et $f(-x) = |2(-x - (-\lfloor x\rfloor - 1)) - 1| = |-2x + 2\lfloor x\rfloor + 2 - 1| = |-(2x - 2\lfloor x\rfloor - 1)| = |2x - 2\lfloor x\rfloor - 1|$.Donc $f(-x) = f(x)$.
   Ainsi, f est paire.
   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g\big(f(x+1)\big) = \big|2\big((x+1) - \lfloor x+1\rfloor\big) - 1\big| = \big|2\big(x + 1 - (\lfloor x\rfloor + 1)\big) - 1\big| = |2(x - \lfloor x\rfloor) - 1| = f(x)$. Donc f est 1-périodique.
3. $\forall x \in [k, k+1[, f(x) = |2(x - k) - 1|$. Donc, $\lim_{\substack{x\to k \\ x>k}} f(x) = 1 = f(k)$.
4. $\forall x \in [k-1, k[, f(x) = \big|2\big(x - (k-1)\big) - 1\big| = |2(x - k) + 1|$. Donc, $\lim_{\substack{x\to k \\ x<k}} f(x) = 1 = f(k)$.

   J'en déduis que f est continue en k.