Corrigé TD Inégalités et Comparer

1. Soit a, b, c et d réels tq $a < b$ et $c < d$. Soit $x \in [a, b]$ et $y \in [c, d]$. Encadrer, au plus près et si possible, $2x - 3y$, xy et $\frac{x}{y}$.
2. Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$. Peut -on encadrer xy ? $\frac{x}{y}$? Montrer que $4 + x + y + xy \in [3,7]$. En déduire $\min A$ et $\max A$ où $A = \{4 + x + y + xy/(x, y) \in [-1,1]^2\}$.

1. Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$. $-1 \leq xy \leq 1$ et je ne peux pas encadrer $\frac{x}{y}$ car y peut s' annuler.

$$4 + x + y + xy - 3 = 1 + x + y + xy = \underbrace{(1 + x)}_{\geq 0}\underbrace{(1 + y)}_{\geq 0} \geq 0 \; et \quad 4 + x + y + xy - 7 = x + y + xy - 3 = \underbrace{(x - 1)}_{\leq 0} + \underbrace{(y - 1)}_{\leq 0} + \underbrace{(xy - 1)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Donc, $3 \leq 4 + x + y + xy \leq 7$. De plus, pour $x = y = -1, 4 + x + y + xy = 3$ donc $3 \in A$ et pour $x = y = 1, 4 + x + y + xy = 7$ donc $7 \in A$.
Comme 3 minore A et 7 majore A, j'en déduis que $minA = 3$ et $maxA = 7$.

Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$. Pour quelles valeurs de a et b, y-a-t-il égalité ?
2. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.
3. $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $(0 < a \leq b \leq c \leq d \Rightarrow \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{a}{d} + \frac{d}{a})$.
4. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

1. Soit a et b deux réels. $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} - (a + b) = a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Ainsi, $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$. OK !! De plus,
2. $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} = a + b \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 0 = b - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.
3. $x^3 + y^3 - (x^2y + xy^2) = x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 = x^2(x - y) + y^2(y - x) = (x - y)(x^2 - y^2) = (x - y)(x - y)(x + y) = \underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0} \underbrace{(x + y)}_{\substack{\geq 0 \; car \\ x \geq 0 \; et \; y \geq 0}} \geq 0$.
4. Supposons que $0 < a \leq b \leq c \leq d$.
$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) = \frac{b^2+c^2}{bc} - \frac{a^2+d^2}{ad} = \frac{b^2ad+c^2ad-a^2bc-d^2bc}{abcd} = \frac{ab(bd-ac)+cd(ac-bd)}{abcd} = \frac{(ab-cd)(bd-ac)}{abcd}$. Comme $0 < a \leq b \leq c \leq d, ab \leq cd$ et $ac \leq bd$.
Et par conséquent, $\frac{(ab-cd)(bd-ac)}{abcd} \leq 0$. Ainsi, $\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \leq \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right)$.
5. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Donc, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Cette inégalité est valable pour tous réels strictement positifs a et b. Appliquons-la aux réels $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, on obtient alors $\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$. On peut alors affirmer que $0 < \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Et par conséquent, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, on obtient $0 < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Montrer que $\forall n \geq n_0$, $n! \geq 2^n$ où n_0 est un entier naturel à déterminer, le plus petit possible.

Posons $H(n)$:"$n! \geq 2^n$".
$1 = 0! = 2^0 = 1$
$1 = 1! < 2^1 = 2$
$2 = 2! < 2^2 = 4$
$6 = 3! < 2^3 = 8$
$24 = 4! > 2^4 = 16$
$120 = 5! > 2^5 = 32$.
Posons $n_0 = 4$.
Initialisation : $H(4)$ est vraie.
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$. Je suppose que $H(n)$ est vraie. Sous cette hypothèse (simple), je vais montrer que $H(n + 1)$ est vraie.
Je sais que $n! \geq 2^n$. Alors, comme $(n + 1) > 0$, $n! \times (n + 1) \geq 2^n \times (n + 1)$ i.e. $(n + 1)! \geq 2^n \times (n + 1)$.
De plus, $2^n \times (n + 1) - 2^{n+1} = 2^n[(n + 1) - 2] = 2^n[n - 1] > 0$ car $n \geq 4$. Donc, $2^n \times (n + 1) > 2^{n+1}$. Par conséquent, $(n + 1)! \geq 2^{n+1}$. Ainsi, $H(n + 1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie pour $n \geq 4$.
Conclusion : le théorème de récurrence simple assure que : $\forall n \geq 4$, $n! \geq 2^n$.

Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout p entier naturel non nul, $(1 - x)^p \leq 1 - x^p$.

Posons $H(p)$: "$(1 - x)^p \leq 1 - x^p$."
Initialisation : $(1 - x)^1 = 1 - x = 1 - x^1. Donc, H(1)$ est vraie.
Propagation : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 1$. Je suppose que $H(p)$ est vraie. Sous cette hypothèse (simple), je vais montrer que $H(p + 1)$ est vraie.
Je sais que $(1 - x)^p \leq 1 - x^p$.
Alors en multipliant l'inégalité précédente par $1 - x \geq 0$, $(1 - x)(1 - x)^p \leq (1 - x)(1 - x^p)$ ce qui signifie que :
$(1 - x)^{p+1} \leq 1 - x - x^p + x^{p+1}$. Or, $(1 - x - x^p + x^{p+1}) - (1 - x^{p+1}) = -x - x^p + 2x^{p+1} = x^{p+1} - x^p + x^{p+1} - x = \underbrace{x}_{\geq 0}\underbrace{(x^p - 1)}_{\leq 0} + \underbrace{x^p}_{\geq 0}\underbrace{(x - 1)}_{\leq 0} \leq 0$ .Donc,
$(1 - x - x^p + x^{p+1}) \leq 1 - x^{p+1}$. Par conséquent, $(1 - x)^{p+1} \leq 1 - x^{p+1}$. Ainsi, $H(p + 1)$ est vraie dès que $H(p)$ est vraie pour $p \geq 1$.
Conclusion : le théorème de récurrence simple assure que : $\forall p \geq 1$, $(1 - x)^p \leq 1 - x^p$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)_{n>0}$.

Notons $u_n = \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$, $v_n = \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$. Et Posons $H(n)$ la proposition : « $u_n \leq S_n \leq v_n$ ».
Initialisation : $u_1 = \left(\frac{2\times1+1}{3}\right)\sqrt{1} = 1$, $v_1 = \left(\frac{2\times1}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ et $S_1 = \sum_{k=1}^{1} \sqrt{k} = \sqrt{1} = 1$. Donc, $u_1 \leq S_1 \leq v_1$. Ainsi, $H(1)$ est vraie.
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose $H(n)$ vraie et sous cette hypothèse (simple), je vais montrer que $H(n + 1)$ est vraie.
Je sais que : $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. Par conséquent, $\sqrt{n + 1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sqrt{n + 1} + \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \sqrt{n + 1} + \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$ i.e.

$\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} \leq \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

Montrons que $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \leq v_{n+1}$.

■D'une part, $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-u_{n+1} = \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)+1}{3}\right)\sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2n}{3}+1\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$. De plus, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\ \ et\ \ \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$ sont deux réels positifs, ils sont donc ordonnés dans le même sens que leurs carrés que l'on va donc comparer.

$\left[\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\right]^2-\left[\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\right]^2 = \frac{(2n+1)^2}{9}n-\frac{4}{9}n^2(n+1) = \frac{1}{9}n > 0$. J'en déduis dans un premier temps que $\left[\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\right]^2 > \left[\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\right]^2$ et ensuite que $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\ > \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$. Par conséquent, $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}-u_{n+1} > 0\ et$ ainsi, $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$.

■D'autre part, $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-v_{n+1} = \sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{2(n+1)}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}-\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}$.

De plus, $\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\ \ et\ \ \left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}$. sont deux réels positifs, ils sont donc ordonnés dans le même sens que leurs carrés que l'on va donc comparer.

$\left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]^2-\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right]^2 = \frac{(4n+3)^2}{36}n-\frac{(4n+1)^2}{36}(n+1) = -\frac{1}{36} < 0$. J'en déduis dans un premier temps que $\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right]^2 > \left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]^2$ et ensuite que $\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right] > \left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]$ et enfin que $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}-v_{n+1} < 0$. J'en conclus que $\sqrt{n+1}+\left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \leq v_{n+1}$.

Il s'en suit que : $u_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} \leq v_{n+1}$.

Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$.

Notons $P_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)!$ et $u_n = [(n+1)!]^{n+1}$ et $H(n)$ la proposition : « $P_n \geq u_n$ ».

Initialisation : $u_1 = [2!]^2 = 4\ et\ P_1 = \prod_{k=0}^{1}(2k+1)! = 1! \times 3! = 6$. Donc, $u_1 \leq P_1$. Ainsi, $H(1)$ est vraie.

Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose $H(n)$ vraie et sous cette hypothèse (simple) , je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.

Je sais que : $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$. Par conséquent $(2(n+1)+1)!\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq (2(n+1)+1)!\,[(n+1)!]^{n+1}$ car $(2(n+1)+1)! > 0$.

Autrement dit, $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)! \geq (2(n+1)+1)!\,[(n+1)!]^{n+1}$.

Montrons que $(2(n+1)+1)!\,[(n+1)!]^{n+1} \geq u_{n+1}$. Comme $u_{n+1} > 0$, je peux comparer $\frac{(2(n+1)+1)![(n+1)!]^{n+1}}{u_{n+1}}$ avec 1.

$\frac{(2(n+1)+1)![(n+1)!]^{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{(2n+3)![(n+1)!]^{n+1}}{[(n+2)!]^{n+2}} = \frac{(2n+3)![(n+1)!]^{n+1}}{[(n+1)!\times(n+2)]^{n+2}} = \frac{(2n+3)![(n+1)!]^{n+1}}{[(n+1)!]^{n+2}(n+2)^{n+2}} = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)^{n+2}} = \frac{(2n+3)\times(2n+2)\times(2n+1)\times\ldots\times(n+3)\times(n+2)\times[(n+1)!]}{(n+1)!(n+2)^{n+2}}$

$\frac{(2(n+1)+1)![(n+1)!]^{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{(2n+3)\times(2n+2)\times(2n+1)\times\ldots\times(n+3)\times(n+2)}{(n+2)^{n+2}} = \frac{(2n+3)}{(n+2)}\times\frac{(2n+2)}{(n+2)}\times\ldots\times\frac{(n+3)}{(n+2)}\times\frac{(n+2)}{(n+2)} = \prod_{k=n}^{2n+1}\frac{k+2}{n+2} \geq 1$ car $\forall k \geq n, (k+2) \geq (n+2)$.

Comme $u_{n+1} > 0$, j'en déduis que $(2(n+1)+1)!\,[(n+1)!]^{n+1} \geq u_{n+1}$. Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

Conclusion : le théorème de récurrence simple assure que : $\forall n \geq 1,\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$.

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tels que : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = n$. Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!], a_k = 1$.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n-2n+n = 0$. Cette somme nulle de réels positifs n'est donc constituée que de réels nuls i.e. $\forall k \in [\![1,n]\!], (a_k-1)^2 = 0\ et\ par\ suite\ \forall k \in [\![1,n]\!], a_k = 1$.

i. Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$.

ii. Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs alors $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$.

i. Soit des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$,. Posons $\forall k, b_k = 1$. Alors, l'inégalité de C.S assure que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\ i.e.\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$.

Ces deux membres étant positifs, j'en déduis, par croissance de la fonction racine carrée, que $\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2} \leq \sqrt{n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)}$. Et par conséquent, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$. J'en conclus, en divisant par $\sqrt{n} > 0$, que $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \underbrace{=}_{car\ \frac{1}{\sqrt{n}}>0} \frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$.

ii. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Posons $a_k = \sqrt{x_k}\ et\ b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}} = \sqrt{\frac{1}{x_k}}$. Alors l'inégalité de C.S assure que :

$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x_k}}^2\right)$ ce qui donne : $\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$ et par suite : $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}\ tq\ n \geq 2$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réel tels que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont strictement positifs.

a. On pose $m = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}\ et\ M = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Montrer que : $m \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq M$.

b. En déduire que $\min\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right\} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right\}$.

1. $\forall k \in [\![1,n]\!], m \leq b_k \leq M$ donc $m a_k \leq a_k b_k \leq M a_k$. Par conséquent ,en sommant ces inégalités, j'obtiens $\sum_{k=1}^{n} m a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{n} M a_k$ et par suite $m\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M\sum_{k=1}^{n} a_k$.
   $Or, \sum_{k=1}^{n} a_k > 0$ puisque les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont strictement positifs. Alors, en divisant l'inégalité précédente par $\sum_{k=1}^{n} a_k$, j'obtiens,
   $m \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq M$.
2. Posons $B_k = \frac{b_k}{a_k}\ et\ A_k = a_k$ et $m = \min\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}\ et\ M = \max\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$. Alors, les réels $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont strictement positifs et d'après ce qui précède, $m \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k B_k}{\sum_{k=1}^{n} A_k} \leq M$ ce qui signifie $\min\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right\} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right\}$.
3.

Soient $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tq : $0 < m < M$ et $a_1, .., a_n, b_1, .., b_n$ des réels tq $b_1, .., b_n$ non nuls et $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{a_k}{b_k} \in [m,M]$.

1. Qui peut-on choisir pour m et M ?
2. En étudiant le signe de $S_n = \sum_{k=1}^{n}(Mb_k - a_k)(a_k - mb_k)$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + mM\sum_{k=1}^{n} b^2 \leq (m+M)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
3. On pose $I = \frac{m+M}{2}\ et\ G = \sqrt{mM}$. Déduire de 1) que : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b^2} \leq \frac{I}{G}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

1. $m = \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$ et $M = \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$ conviennent.

2. D'une part, $\forall k \in [\![1,n]\!], 0 < m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$ et $b_k > 0$ donc $mb_k \leq a_k \leq Ma_k$ et $Mb_k - a_k \geq 0$ *et* $a_k - mb_k \geq 0$. Par conséquent, $S_n \geq 0$.

D'autre part, $S_n = \sum_{k=1}^{n}(Mb_k - a_k)(a_k - mb_k) = \sum_{k=1}^{n} -mMb_k - a_k^2 + (m+M)a_kb_k = -(\sum_{k=1}^{n} a_k^2) - mM(\sum_{k=1}^{n} b^2) + (m+M)(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k)$.
Je déduis des deux résultats précédents que $-(\sum_{k=1}^{n} a_k^2) - mM(\sum_{k=1}^{n} b^2) + (m+M)(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k) \geq 0$ et ainsi , je peux conclure que :
$\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + mM\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2 \leq (m+M)\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$.
On pose $I = \frac{m+M}{2}$ *et* $G = \sqrt{mM}$. Alors, l'inégalité précédente s'écrit : $(\sum_{k=1}^{n} a_k^2) + G^2(\sum_{k=1}^{n} b_k^2) \leq 2I\ (\sum_{k=1}^{n} a_kb_k)$.
Alors $\frac{(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)+(\sum_{k=1}^{n}(Gb_k)^2)}{2} \leq I\ (\sum_{k=1}^{n} a_kb_k)$. Or pour tous réels positifs x et y , $\sqrt{x}\sqrt{y} \leq \frac{x+y}{2}$. Donc, en posant $x = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ *et* $y = \sum_{k=1}^{n}(Gb_k\ )^2$ qui sont des réels positifs (car somme de réels positifs), $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(Gb_k\ )^2} \leq \frac{(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)+(\sum_{k=1}^{n}(Gb_k)^2)}{2}$.
De plus, $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(Gb_k\ )^2} = \sqrt{G^2\sum_{k=1}^{n} b_k^2} = \sqrt{G^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \overset{car\ G>0}{=} G\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$. Donc, $G\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leq \frac{(\sum_{k=1}^{n} a_k^2)+(\sum_{k=1}^{n}(Gb_k)^2)}{2}$. Et par suite,
$G\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leq\ I\ (\sum_{k=1}^{n} a_kb_k)$. J'en conclus que : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {b_k}^2} \leq \frac{I}{G}\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$ (*puisque* $G > 0$).

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels positifs.
a. Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \geq i + j - 1$.
b. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

a. Soit i et j deux entiers compris entre 1 et n. $ij - i - j + 1 = i(j-1) - (j-1) = \underbrace{(j-1)}_{\geq 0}\underbrace{(i-1)}_{\geq 0} \geq 0$. Ainsi, $ij \geq i + j - 1$.

b. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \geq i + j - 1 \geq 1 > 0$ *donc* $0 < \frac{1}{ij} \leq \frac{1}{i+j-1}$ *; alors, comme* $a_ia_j \geq 0$ *,* $0 \leq \frac{a_ia_j}{ij} \leq \frac{a_ia_j}{i+j-1}$. En sommant ces n^2 inégalités, j' obtiens, $0 \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ia_j}{ij} \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}$. Enfin, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ia_j}{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\frac{a_j}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2$. J'en déduis que $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Montrer qu'il existe une suite v telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}, u_n = 2 + \frac{2}{n} + v_n$ et $0 < v_n < \frac{2}{n}$. Qu'en déduit-on sur la suite u ?

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}\right) + \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}\right)}_{v_n} + 2 + \frac{2}{n}$. Alors $u_n = 2 + \frac{2}{n} + v_n$ et $0 < u_n - 2 - \frac{2}{n} < \frac{2}{n}$.

De plus, $\forall k \in [\![2, n-2]\!], \binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} > 0$ *donc* $0 < \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}$. Alors en additionnant ces $n - 3$ inégalités, j'obtiens :

$0 < \underbrace{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}}_{v_n} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}} = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-3)}{n(n-2)} \underset{\substack{car\\ 0<n-3<n-2}}{<} \frac{2}{n}$. Comme les deux suites qui encadrent v tendant vers 0, le théorème des gendarmes assure que la suite v est convergente de limite 0. Comme de plus , $\lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{2}{n} = 2$, je peux conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Encadrer, minorer ou majorer de u_n par de bonnes suites et en appliquant le théorème des gendarmes, calculer la limite de chacune des suites u dont le terme général est le suivant :
a. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ tq $n > 0$
b. $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ tq $n \geq 0$
c. $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$ tq $n > 0$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \sqrt{k} + \sqrt{k-1} \leq 2\sqrt{k} \leq \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$. Donc, $0 < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$. Alors en utilisant la quantité conjuguée, j'obtiens :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. Donc en «sommant les inégalités» obtenues pour $k \in [\![1,n]\!]$, je gagne :
$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. Les deux sommes qui encadrent sont télescopiques , par conséquent, je simplifie :
$\sqrt{n+1} - 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{0}$. Et par suite , $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty$, j'en déduis que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Soi $n > 0$ *et* $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
$\forall k \in [\![1, 2n+1]\!], 1 \leq k \leq 2n+1$ *donc* $n^2 < n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ et par stricte croissance de la fonction racines carrée, $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{(n+1)^2}$ i.e. $0 < n < \sqrt{n^2+k} \leq (n+1)$; alors par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$,
$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$. Ainsi, $\forall k \in [\![1, 2n+1]\!], 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{n}$. Alors en « sommant ces $2n+1$ inégalités » , j'obtiens,
$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} < \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n}$.
Les deux sommes qui encadrent se calculent facilement : $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} \underbrace{=}_{\substack{puisque\\ \frac{1}{n+1}\ ne\ dépend\\ pas\ de\ k.}} (2n+1) \times \frac{1}{n+1}$ *et* $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n} \underbrace{=}_{\substack{puisque\\ \frac{1}{n}\ ne\ dépend\\ pas\ de\ k.}} (2n+1) \times \frac{1}{n}$.

Ainsi,$\forall n > 0$, $(2n+1) \times \frac{1}{n+1} < u_n \leq (2n+1) \times \frac{1}{n}$.
De plus, $(2n+1) \times \frac{1}{n+1} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ *et* $(2n+1) \times \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$. Donc les deux suites qui encadrent $u_n$tendent vers une même limite finie qui vaut 2, j'en déduis par le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$.
$\forall k \in [\![1, n^2]\!], 1 \leq k \leq n^2$*donc* $0 < n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq 2n^2$ et par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, $0 < \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2+1}$. Alors comme $n > 0$, j'obtiens : $0 \leq \frac{1}{2n} < \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{n}{n^2+1}$. Alors en « sommant ces n^2 inégalités » , j'obtiens, $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2n} < \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+1}$.
Or, $\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$. *Donc* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \frac{n}{2}$. Alors comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2} = +\infty$, j'en déduis, en appliquant le théorème des gendarmes, que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

1. Montrer que : $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire la limite de la suite u définie par : $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ tq $n > 0$.

1. Posons $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. Etudions f et g dans le but de connaitre leur signe.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et $\forall x \geq 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$. Donc f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$donc $\forall x \geq 0, f(x) \geq f(0) = 0$. Et ainsi, $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et $\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$. Donc g est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$donc $\forall x \geq 0, g(x) \geq g(0) = 0$. Et par suite, $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Alors $u_n \geq 1 > 0$. Posons $v_n = \ln(u_n)$. Alors, $v_n \geq 0$ et $v_n = ln(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Comme $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \forall k \in [\![1,n]\!], \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$. En sommant ce n inégalités, j'obtiens :

$\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2) \leq \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$.

$Or, \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n}$.

Ainsi, $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq v_n \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n}$.

Les deux suites qui encadrent v tendent vers $\frac{1}{2}$, j'en déduis, en appliquant le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Soit a un réel et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$.

1. Montrer que u est croissante et même strictement croissante si $|a| \neq 1$.
2. Montrer que si $|a| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
3. Montrer que si $|a| < 1$ alors (u_n) est convergente et déterminer sa limite.