Corrigé du TD 2

I Fonctions polynômiales.

Ex 1 Soit m, a et b des réels tels que $a < b$. Déterminer le signe de $u(x)$ en fonction de x.

a. $u(x) = 8x^3 + x^2 - 7x$
b. $u(x) = x^2 - 11x + 28$ *et* $u(x) = x^2 + (a+b)x + ab$
c. $u(x) = 7x^2 + 23x + 6$ sachant que (-3) est racine de u
d. $u(x) = 2x^3 - x^2 + 3$
e. $u(x) = x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 13x + 6$
f. $u(x) = (x+a)(x+b) - (m+a)(m+b)$
g. $u(x) = (m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2$
h. $u(x) = x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)x - \sqrt{6}$
i. $u(x) = x^4 + 2x^2 - 48$
j. $u(x) = -2x^2 - 6|x| + 5$
k. $u(x) = e^{6x} - 2e^{3x} + 3$
l. $u(x) = 2x - \sqrt{x} - 3$
m. $u(x) = x^9 + 2x^5 - 35x$
n. $u(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
o. $u(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
p. $u(x) = (x+3)(2x-1) - 27 - x^3$
q. $u(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

a. $u(x) = 8x^3 + x^2 - 7x \overset{factorisation\ \acute{e}viente\ par\ x}{\hat{=}} x\underbrace{(8x^2+x-7)}_{=Q(x)} \overset{\substack{-1\ est\ racine\ \acute{e}vidente\ de\ Q \\ l'autre\ racine\ vaut -\frac{7}{8}\div(-1)=\frac{7}{8}}}{\hat{=}} 8x(x+1)\left(x - \frac{7}{8}\right)$. D'où le tableau de signe :

x		-1		0		7/8	
$x+1$	-	0	+		+		+
x	-		-	0	+		+
$x - 7/8$	-		-			0	+
$u(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

b. $u(x) = x^2 - 11x + 28 \overset{\substack{la\ somme\ des\ racines\ vaut\ 11 \\ le\ produit\ vaut\ 28 \\ Les\ arcines\ sont\ 4\ et\ 7.}}{\hat{=}} (x-7)(x-4)$ *et* $u(x) = x^2 + (a+b)x + ab \overset{\substack{la\ somme\ des\ racines\ vaut -a-b \\ le\ produit\ vaut\ ab \\ les\ racines\ sont -a\ et -b}}{\hat{=}} (x+a)(x+b)$.
Donc $u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -b[\cup]-a, +\infty[$.

c. $u(x) = 7x^2 + 23x + 6 \overset{\substack{-3\ est\ racine\ \acute{e}vidente\ de\ u \\ l'autre\ racine\ vaut\ \frac{6}{7}\div(-3)=\frac{-2}{7}}}{\hat{=}} 7(x+3)\left(x + \frac{2}{7}\right)$. Donc $u(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-2/7, +\infty[$.

$u(x) = 2x^3 - x^2 + 3 = (x+1)(\underbrace{2x^2 - 3x + 3}_{\substack{\Delta<0 \\ donc\ \forall x, 2x^2-3x+3>0}})$. Donc $u(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$

d. $u(x) = (x+a)(x+b) - (m+a)(m+b) \overset{\substack{m\ est\ racine\ \acute{e}vidente\ de\ u \\ l'autre\ racine\ vaut\ (-a-b)-m}}{\hat{=}} (x-m)(x+a+b+m)$ (… tableau de signe).

e. $u(x) = (m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 \overset{\substack{m\ est\ racine\ \acute{e}vidente\ de\ u \\ l'autre\ racine\ vaut\ \frac{2m^2}{m+3}\div m=\frac{2m}{m+3}}}{\hat{=}} (m+3)(x-m)\left(x - \frac{2m}{m+3}\right)$

f. $u(x) = x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)x - \sqrt{6} \overset{quantit\acute{e}\ conjugu\acute{e}e}{\hat{=}} x^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})x - \sqrt{6} \overset{\substack{la\ somme\ des\ racines\ vaut -\sqrt{3}+\sqrt{2} \\ le\ produit\ vaut\ -\sqrt{6} \\ Les\ arcines\ sont\ -\sqrt{3}\ et\ \sqrt{2}.}}{\hat{=}} (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})$

g. $u(x) = x^4 + 2x^2 - 48 \overset{X=x^2}{\hat{=}} x^2 + 2X - 48 = (X+8)(X-6) = (x^2+8)(x^2-6) = (x^2+8)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})$

h. $u(x) = -2x^2 - 6|x| + 5 \overset{X=|x|}{\hat{=}} -2X^2 - 6X + 5 \overset{\substack{\Delta=36+40=76=(2\sqrt{19})^2 \\ X_1=\frac{6-2\sqrt{19}}{-4}=\frac{-3+\sqrt{19}}{2} \\ X_2=\frac{-3-\sqrt{19}}{2}}}{\hat{=}} (-2)\left(X + \frac{3-\sqrt{19}}{2}\right)\left(X + \frac{3+\sqrt{19}}{2}\right) = (-2)(|x| + \frac{3-\sqrt{19}}{2})(|x| + \frac{3+\sqrt{19}}{2})$

i. $u(x) = e^{6x} + 2e^{3x} - 3 \overset{X=e^{3x}}{\hat{=}} X^2 - 2X + 3 = (X-1)(X+3) = (e^{3x}-1)(e^{3x}+3)$

j. $u(x) = 2x - \sqrt{x} - 3 \overset{X=\sqrt{x}}{\hat{=}} 2X^2 - X - 3 = 2(X+1)(X - \frac{3}{2}) = 2(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x} - \frac{3}{2})$

k. $u(x) = x^9 + 2x^5 - 35x = x(x^8 + 2x^4 - 35) \overset{X=x^4}{\hat{=}} x(X^2 + 2X - 35) = x(X-5)(X+7) = x(x^4-5)(x^4+7) = x(x^2-\sqrt{5})(x^2+\sqrt{5})(x^4+7)$
$u(x) = x\left(x - \sqrt{\sqrt{5}}\right)\left(x + \sqrt{\sqrt{5}}\right)(x^2+\sqrt{5})(x^4+7)$.

l. $u(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$.

m. $u(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)x^2 - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$.

n. $u(x) = (x+3)(2x-1) - 27 - x^3 = (x+3)(2x-1) - (x+3)(x^2-3x+9) = (x+3)\underbrace{(-x^2+5x-10)}_{\substack{\Delta<0 \\ pas\ de\ racines\ r\acute{e}elles}}$.

o. $u(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x^4 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + 2x + 1) = x^2(x^2+2x+1) + (x^2+2x+1)$
$u(x) = (x^2+2x+1)(x^2+1) = (x+1)^2(x^2+1)$

Ex 2 Résoudre

a. $4 - 7x^2 > 0$
b. $x^4 < (\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{2}$
c. $(x^4-1)^2 > 2$
d. $x^2 + 1 > 0$
e. $x^4 + 2 \leq 0$
f. $(x+2)^4 \geq 1$
g. $8 + x^3 \geq 0$
h. $|x|^3 - 2x^2 \geq 0$
i. $(\ln(x))^2 + 4 \leq 4\ln(x)$
j. $-2e^x + 3e^{-x} + 1 < 0$
k. $(\ln(x))^3 \geq 12(\ln(x))^2 - 35\ln(x))$
l. $\frac{\sqrt{x}}{1+x} = m$
m. $\frac{1}{x} > -2$
n. $\frac{1}{3-x} > x$
o. $\frac{7x+9}{x^2+3x+2} \geq \frac{1-5x}{x^3+1}$
p. $\frac{1}{1-x} < \frac{x}{x+2}$
q. $\sqrt{|x|-1} > 2$
r. $\sqrt{x^2+1} > x$
s. $\sqrt{-x-1} > x - 2$.
t. $\sqrt{-x-1} > 2 + x$
u. $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} > \frac{1}{2}$
v. $\ln(x-1) - \ln(x+2) < \ln(x)$

a. $4-7x^2>0 \Leftrightarrow -7\left(\frac{2}{\sqrt{7}}-x\right)\left(\frac{2}{\sqrt{7}}+x\right)>0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{7}}-x\right)\left(\frac{2}{\sqrt{7}}+x\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}}\right[$.

b. $x^4<(\sqrt{2}+1)x^2-\sqrt{2} \Leftrightarrow (x^2)^2-(\sqrt{2}+1)x^2+\sqrt{2}<0 \Leftrightarrow (x^2-\sqrt{2})(x^2-1)<0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(x+\sqrt{\sqrt{2}}\right)(x-1)(x+1)<0$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\sqrt{\sqrt{2}}\right[\cup]-1,0[\cup\left]1,\sqrt{\sqrt{2}}\right[$.

c. $(x^4-1)^2>2 \Leftrightarrow (x^4-1)^2-2>0 \Leftrightarrow [(x^4-1)-\sqrt{2}][(x^4-1)+\sqrt{2}]>0 \Leftrightarrow [x^4-(1+\sqrt{2})]\underbrace{[x^4+(\sqrt{2}-1)]}_{>0}>0$

$\Leftrightarrow [x^4-(1+\sqrt{2})]>0 \Leftrightarrow \left[x^2-\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right]\underbrace{\left[x^2+\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right]}_{>0}>0 \Leftrightarrow \left[x^2-\sqrt{(1+\sqrt{2})}\right]>0 \Leftrightarrow \left[x-\sqrt{\sqrt{(1+\sqrt{2})}}\right]\left[x+\sqrt{\sqrt{(1+\sqrt{2})}}\right]>0 \Leftrightarrow x\in$

$\left]-\infty,-\sqrt{\sqrt{(1+\sqrt{2})}}\right[\cup\left]\sqrt{\sqrt{(1+\sqrt{2})}},+\infty\right[$.

d. $x^2+1>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

e. $x^4+2\leq 0 \Leftrightarrow x\in\emptyset$.

f. $(x+2)^4\geq 1 \Leftrightarrow ((x+2)^2-1)\underbrace{((x+2)^2+1)}_{>0}\geq 0 \Leftrightarrow ((x+2)^2-1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+2-1)(x+2+1)\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3)\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-3]\cup[-1,+\infty[$

g. $8+x^3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$

h. $|x|^3-2x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2(|x|-2)\geq 0 \Leftrightarrow x=0\ ou |x|\geq 2 \Leftrightarrow x=0\ ou\ x\geq 2\ ou\ x\leq -2$.

i. $(\ln(x))^2+4\leq 4\ln(x) \underset{X=\ln(x)}{\underbrace{\Leftrightarrow}} X^2-4X+4\leq 0 \Leftrightarrow (X-2)^2\leq 0 \Leftrightarrow X=2 \Leftrightarrow \ln(x)=2 \Leftrightarrow x=e^2$.

j. $-2e^x+3e^{-x}+1<0 \underset{X=e^x}{\underbrace{\Leftrightarrow}} -2X+\frac{3}{X}+1<0 \underset{car\ X>0}{\underbrace{\Leftrightarrow}} -2X^2+X+3<0 \Leftrightarrow -2(X+1)\left(X-\frac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \underbrace{-2(e^x+1)}_{<0}\left(e^x-\frac{3}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \left(e^x-\frac{3}{2}\right)<0$

$\Leftrightarrow e^x<\frac{3}{2} \Leftrightarrow x<\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

k. Soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$.

$(\ln(x))^3\geq 12(\ln(x))^2$-35ln $(x)) \underset{X=\ln(x)}{\underbrace{\Leftrightarrow}} X(X^2-12X+35)<0 \Leftrightarrow X(X-7)(X-5)<0 \Leftrightarrow \underbrace{\ln(x)(\ln(x)-7)(\ln(x)-5)}_{f(x)}<0$

Or , $\ln(x)-a>0 \Leftrightarrow \ln(x)>a \Leftrightarrow x>e^a$. D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		1		e^5		e^7		$+\infty$
$\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\ln(x)-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)-7$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $Sol=]-\infty,1[\cup]e^5,e^7[$.

l. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. $\frac{1}{x}>-2 \Leftrightarrow x>0\ ou \left\{\begin{array}{l} x<0 \\ x>-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\backslash\{0\}$.

m. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{3\}$. $\frac{1}{3-x}>x \Leftrightarrow x\leq 0\ ou \left\{\begin{array}{c} 0<x<3 \\ 1>x(3-x)\end{array}\right. \Leftrightarrow x\leq 0\ ou \left\{\begin{array}{c} 0<x<3 \\ x^2-3x+1<0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\leq 0\ ou \left\{\begin{array}{c} 0<x<3 \\ \left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x\leq 0\ ou\ x\in\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[\cap]0,3[\Leftrightarrow x\in\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[\cup\mathbb{R}^-$.

n. $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ et $x^3+1=(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta<0}$. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,-2\}$.

$\frac{7x+9}{x^2+3x+2}\geq\frac{1-5x}{x^3+1} \Leftrightarrow \frac{7x+9}{(x-1)(x+2)}-\frac{1-5x}{(x+1)(x^2-x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(7x+9)(x^2-x+1)-(1-5x)(x+2)}{(x-1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{7(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)(x^2-x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)(x^2-x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)}{(x-1)(x+2)}\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in]-2,-1]\cup]1,+\infty[$

o. Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,3\}$.

$\frac{x-1}{x+1}\geq\frac{2x-1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1}-\frac{2x-1}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)-(2x-1)(x+1)}{(x+1)(x-3)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-5x+4}{(x+1)(x-3)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{\sqrt{41}+5}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)}{(x+1)(x-3)}\leq 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{\sqrt{41}+5}{2},-1\right[\cup\left]\frac{\sqrt{41}-5}{2},3\right[$

p. Soit $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. $\sqrt{|x|-1}>2 \Leftrightarrow |x|-1>4 \Leftrightarrow |x|>5 \Leftrightarrow x\in]5,+\infty[\cup]-\infty,-5[$.

q. $\forall x\forall\in\mathbb{R}, x^2+1\geq 1>0\ donc\ \sqrt{x^2+1}\ existe.\ Et\ x^2+1>x^2 donc\ \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq\pm x.\ Donc, \sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

r. $\sqrt{-x-1}$ existe sietssi $x\in]-\infty,-1]$. Soit $x\in]-\infty,-1]$. $\sqrt{-x-1}>x-2 \Leftrightarrow x\leq -1$.

s. $\sqrt{-x-1}$ existe sietssi $x\in]-\infty,-1]$. Soit $x\in]-\infty,-1]$. $\sqrt{-x-1}>2+x \Leftrightarrow x<-2\ ou \left\{\begin{array}{c} x\geq -2 \\ -x-1>x^2+4x+4\end{array}\right. \Leftrightarrow x<2\ ou \left\{\begin{array}{c} x\geq -2 \\ x^2+5x+5<0\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$x<-2\ ou \left\{\begin{array}{c} x\geq -2 \\ x^2+5x+5<0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x<-2\ ou \left\{\begin{array}{c} x\geq -2 \\ \left(x+\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)<0\end{array}\right. \Leftrightarrow x<-2\ ou \left\{\begin{array}{c} -1\geq x\geq -2 \\ x\in\left]\frac{-5-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-5}{2}\right[\end{array}\right. \Leftrightarrow x<-2\ ou\ x\in\left[-2,\frac{\sqrt{5}-5}{2}\right[\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\frac{\sqrt{5}-5}{2}\right[$

t. $\sqrt{x}\ et\ \sqrt{1-x}\ existent\ sietssi\ x\in[0,1]$. Soit $x\in[0,1]$.

$\sqrt{x}-\sqrt{1-x}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x}-\sqrt{1-x}\geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)^2>\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\geq 1-x \\ x+(1-x)-2\sqrt{x}\sqrt{1-x}>\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\geq\frac{1}{2} \\ \sqrt{x}\sqrt{1-x}<\frac{3}{8}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\geq\frac{1}{2} \\ x(1-x)<\frac{9}{16}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\geq\frac{1}{2} \\ x^2-x+\frac{9}{16}>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x\geq\frac{1}{2} \\ x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{8}\right[\cup\left]\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{8},+\infty\right[\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{8},+\infty\right[$.

u. $\ln(x-1), \ln(x+2)\ et\ \ln(x)$ existent sietssi $x>1$. Soit $x\in]1,+\infty[$.

$\ln(x-1)-\ln(x+2)>\ln(x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x(x+2)}\right)>0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x(x+2)}>1 \Leftrightarrow \frac{x-1-x(x+2)}{x(x+2)}>0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x(x+2)}<0 \Leftrightarrow x\in]-2,0[\cap]1,+\infty[\Leftrightarrow x\in\emptyset$.

Ex 3 en autonomie Les assertions suivantes sont -elles vraies ou fausses ? Les corriger le cas échéant.

a. $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2$. VRAI ou FAUX
b. Si $x \in [-1,3]$ alors $x^3 > -2$. VRAI ou FAUX
c. $x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$. VRAI ou FAUX
d. $x \in [0,16] \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 4$. VRAI ou FAUX
e. $\frac{x-1}{x+2} < 0$ *sietssi* $x < 1$. VRAI ou FAUX
f. $\sqrt{x-1} < 1$ dès que $1 \leq x < 2$. VRAI ou FAUX
g. $(x-1)^2 > 4$ seulement si $x > 3$ VRAI ou FAUX

Réponse : $a. F - b. V - c. F - d. V - e. F - f. V - g. F.$

Ex 4 Soit a un réel. Déterminer le domaine de définition de t. Etudier la limite de t en x_0.

1. $t(x) = \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$ et $x_0 = 2$
2. $t(x) = \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}$ et $x_0 = 4$ puis $x_0 = +\infty$
3. $t(x) = \frac{(a-1)x+x^2-a}{x^3+a^3}$ et $x_0 = -a$ puis $x_0 = +\infty$

1. $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Donc $Dt = \mathbb{R}\backslash\{2,3\}$. $\forall x \in Dt, t(x) = \frac{x^3-8}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(x^2+2x+4)}{(x-3)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 2} t(x) = \frac{12}{-1} = -12$.

2. $Dt = \mathbb{R}^+\backslash\{4\}$. $\forall x \in Dt, t(x) = \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2} = \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x^2+4x+16)}{(\sqrt{x}-2)} = (\sqrt{x}+2)(x^2+4x+16)$. Donc, $\lim\limits_{x\to 4} t(x) = 4 \times 3 \times 16 = 192$.

$\forall x \in Dt, t(x) = \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2} = \frac{x^3\left(1-\frac{64}{x^3}\right)}{\sqrt{x}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = x^2\sqrt{x}\frac{\left(1-\frac{64}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} t(x) = +\infty$.

3. $x^3 + a^3 = (x+a)\underbrace{(x^2 - ax + a^2)}_{=P(x)}$. Posons $\Delta_P = a^2 - 4a^2 = -3a^2 \begin{cases} < 0 \ si\ a \neq 0 \\ = 0 \ si\ a = 0 \end{cases}$.

***1er cas* : $a \neq 0$.** Alors $\Delta_P < 0$. Donc $x^3 + a^3 = 0 \Leftrightarrow x = -a$. Et ainsi $Dt = \mathbb{R}\backslash\{-a\}$. Alors $\forall x \in Dt, t(x) = \frac{(a-1)x+x^2-a}{x^3+a^3} = \frac{(x+a)(x-1)}{(x+a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)}$. Donc, $\lim\limits_{x\to -a} t(x) = \frac{(-a-1)}{((-a)^2+a(-a)+a^2)} = -\frac{a+1}{a^2}$.

***2ème cas* : $a = 0$.** Alors $t(x) = \frac{x^2-x}{x^3}$. Donc, $Dt = \mathbb{R}^*$ et $\forall x \in Dt, t(x) = \frac{x-1}{x^2}$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = -\infty$.

Ex 5 Déterminer toutes les fonctions polynomiales P de degré 3 vérifiant $P(-1) = P(4) = 0$ et $P(1) = 1$.

Soit P une fonction polynomiale de de degré 3 .

$\begin{cases} P(-1) = P(4) = 0 \\ P(1) = 1 \end{cases}$ *sietssi* $\begin{cases} -1 \ et\ 4\ sont\ racines\ de\ P \\ P(1) = 1 \end{cases}$ *sietssi* $\begin{cases} il\ existe\ deux\ réels\ a\ et\ b\ tels\ que\ \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+1)(x-7)(ax+b) \\ P(1) = 1 \end{cases}$

sietssi $\begin{cases} il\ existe\ deux\ réels\ a\ et\ b\ tels\ que\ \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+1)(x-7)(ax+b) \\ 2(-5)(a+b) = 1 \end{cases}$

sietssi $\begin{cases} il\ existe\ deux\ réels\ a\ et\ b\ tels\ que\ \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+1)(x-7)(ax+b) \\ b = -a - \frac{1}{10}. \end{cases}$

sietssi il existe un réel a tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x+1)(x-7)\left(ax - a - \frac{1}{10}\right)$.

Ainsi, $Sol = \{(x \mapsto (x+1)(x-7)\left(ax - a - \frac{1}{10}\right))\ /a\ réel\}$.

Ex 6 Trouver tous les réels m tels que l'équation $mx^2 + 2(4+m)x + 15 + m = 0$ admette deux solutions distinctes de signes opposés.

Posons $P(x) = mx^2 + 2(4+m)x + 15 + m$.

$\mathbf{1^{er}}$ ***cas*** : $m = 0$. Alors $P(x) = 8x + 15$. Donc P n'a qu'une racine qui est $-\frac{15}{8}$.

$\mathbf{2^{ème}}$ ***cas*** : $m \neq 0$. Alors P est polynomiale de degré 2 et $\Delta_P = 4(m+4)^2 - 4m(m+15) = -28m + 64 = (-4)(7m-16)$. Donc pour que P ait deux racines (réelles) distinctes, il faut que $\Delta_P > 0$. Désormais prenons $(-4)(7m-16) > 0$ i.e. $m < \frac{16}{7}$. Alors P a deux racines distinctes réelles dont le produit vaut $\frac{15+m}{m}$. Pour que les deux racines soient de signes opposés, il faut et il suffit que $\frac{15+m}{m} < 0$. Or, $\begin{cases} \frac{15+m}{m} < 0 \\ m < \frac{16}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m \in]-15,0[$. Ainsi, les réels m tels que l'équation $mx^2 + 2(4+m)x + 15 + m = 0$ admette deux solutions distinctes de signes opposés sont tous les réels de $]-15,0[$.

Ex 7 Déterminer les réels a qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$.

Tout d'abord, $\Delta_N < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

Par conséquent, $-3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2 \Leftrightarrow -3(x^2-x+1) < x^2 + ax - 2 < 2(x^2-x+1) \Leftrightarrow 0 < 4x^2 + (a-3)x + 1\ et\ 0 < x^2 + (-2-a)x + 4$.

Les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ -3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$ sont donc les réels a tels que $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < 4x^2 + (a-3)x + 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x^2 + (-2-a)x + 4$.

Or, un polynôme du second degré ne s'annule pas et garde un signe constant celui du coefficient de x^2 sietssi son discriminant est strictement négatif.

Ainsi, $(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < 4x^2 + (a-3)x + 1) \Leftrightarrow \Delta_1 = (a-3)^2 - 16 < 0$. Et $(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < x^2 + (-2-a)x + 4) \Leftrightarrow \Delta_2 = (-a-2)^2 - 16 < 0$.

Les réels a recherchés sont donc les réels vérifiant : $\begin{cases} (a-3)^2 - 16 < 0 \\ (-a-2)^2 - 16 < 0 \end{cases}$.

D'une part, $(a-3)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (a-3-4)(a-3+4) < 0 \Leftrightarrow a \in]-1,7[$

D'autre part, $(-a-2)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (a+2)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow (a+2-4)(a+2+4) < 0 \Leftrightarrow a \in]-6,2[$.

Ainsi les réels a recherchés sont tous les éléments de $]-1,7[\cap]-6,2[=]-1,2[$.

Ex 8 Soit $h(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$.

a. Montrer que : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 /\ \alpha < \beta\ et\ \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$.
b. En déduire le signe de $h(x)$ en fonction de x.

a. Soit x un réel. $(x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1) = x^4 - (\alpha+\beta)x^3 + (2+\alpha\beta)x^2 - (\alpha+\beta)x + 1$.

Donc pour que $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1 = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$, il suffit de choisir α et β tels que : $\begin{cases} -(\alpha+\beta) = -1 \\ 2 + \alpha\beta = -2 \\ -(\alpha+\beta) = -1 \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha\beta = -4 \end{cases}$. D'après e cours, $\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha\beta = -4 \end{cases}$ $sietssi\ \alpha\ et\ \beta$ sont les racines de $P(t) = t^2 - t - 4$.

Posons $\Delta_P = 1 + 16 = 17$. Alors, $t_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ et $t_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ sont les racines de P. Comme, de plus, on souhaite que $\alpha < \beta$, on peut conclure que $\beta = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ $et\ \alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$ conviennent.

b. Posons $u(x) = (x^2 - \alpha x + 1)\ et\ v(x) = (x^2 - \beta x + 1)$.

Alors d'une part, $\Delta_u = \alpha^2 - 4 = \frac{1-2\sqrt{17}+16}{4} - \frac{16}{4} = \frac{1-2\sqrt{17}}{4} = \alpha < 0$. Donc u n'a pas de racine réelle et $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.

Et d'autre part, $\Delta_v = \beta^2 - 4 = \frac{1+2\sqrt{17}+16}{4} - \frac{16}{4} = \frac{1+2\sqrt{17}}{4} = \beta > 0$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = \left(x - \frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2}\right)\left(x - \frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)$ et $\left(v(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2} < x < \frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)$.

Ainsi, $\left(h(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2} < x < \frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)$ et $\left(h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2} \geq x\ ou\ x \geq \frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)$.

Ex 9 Soit a et b des entiers distincts et P la fonction telle que : $P(x) = a^2(b-x) + b^2(x-a) + x^2(a-b)$.

a. Factoriser $P(x)$ sans calculer Δ.

b. En déduire que pour tout entier c , $P(c)$ est un entier multiple de $(a-b)$, de $(b-c)$ et de $(c-a)$.

Ex 10 Soit $A = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$. Montrer que : $A^3 - 7A - 36 = 0$. En déduire que $A = 4$.

II Comparer

Ex 11

1. Soit $a, b, c\ et\ d$ réels tq $a < b$ et $c < d$. Soit $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$. Encadrer, au plus près et si possible, $2x - 3y$, xy et $\frac{x}{y}$.
2. Soit $x\ et\ y$ deux éléments de $[-1,1]$. Peut -on encadrer xy ? $\frac{x}{y}$? Montrer que $4 + x + y + xy \in [3,7]$. En déduire $\min A\ et \max A$ où $A = \{4 + x + y + xy / (x,y) \in [-1,1]^2\}$.

2. Soit $x\ et\ y$ deux éléments de $[-1,1]$. $-1 \leq xy \leq 1$ et je ne peux pas encadrer $\frac{x}{y}$ car y peut s' annuler.

$$4 + x + y + xy - 3 = 1 + x + y + xy = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}\underbrace{(1+y)}_{\geq 0} \geq 0\ et\quad 4 + x + y + xy - 7 = x + y + xy - 3 = \underbrace{(x-1)}_{\leq 0} + \underbrace{(y-1)}_{\leq 0} + \underbrace{(xy-1)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Donc, $3 \leq 4 + x + y + xy \leq 7$. De plus, pour $x = y = -1, 4 + x + y + xy = 3$ donc $3 \in A$ et pour $x = y = 1, 4 + x + y + xy = 7$ donc $7 \in A$.
Comme 3 minore A et 7 majore A, j'en déduis que $minA = 3\ et\ maxA = 7$.

Ex 12 Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$. Pour quelles valeurs de a et b, y-a-t-il égalité ?
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$.
3. $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ (0 < a \leq b \leq c \leq d \implies \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{a}{d} + \frac{d}{a})$.
4. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

1. Soit a et b deux réels. $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} - (a+b) = a^2 - a + \frac{1}{4} + b^2 - b + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$. Ainsi, $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$. OK !! De plus,
2. $a^2 + b^2 + \frac{1}{2} = a + b \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 0 = b - \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.
3. $x^3 + y^3 - (x^2y + xy^2) = x^3 - x^2y + y^3 - xy^2 = x^2(x-y) + y^2(y-x) = (x-y)(x^2-y^2) = (x-y)(x-y)(x+y) = \underbrace{(x-y)^2}_{\geq 0}\ \underbrace{(x+y)}_{\substack{\geq 0\ car \\ x \geq 0\ et\ y \geq 0}} \geq 0$.
4. Supposons que $0 < a \leq b \leq c \leq d$.
$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) = \frac{b^2+c^2}{bc} - \frac{a^2+d^2}{ad} = \frac{b^2ad + c^2ad - a^2bc - d^2bc}{abcd} = \frac{ab(bd-ac)+cd(ac-bd)}{abcd} = \frac{(ab-cd)(bd-ac)}{abcd}$. Comme $0 < a \leq b \leq c \leq d, ab \leq cd\ et\ ac \leq bd$.
Et par conséquent, $\frac{(ab-cd)(bd-ac)}{abcd} \leq 0$. Ainsi, $\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \leq \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right)$.
5. $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Donc, $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Cette inégalité est valable pour tous réels strictement positifs a et b. Appliquons-la aux réels $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, on obtient alors $\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$. On peut alors affirmer que $0 < \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Et par conséquent, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, on obtient $0 < \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$.

Ex 13 Montrer que $\forall n \geq n_0,\ n! \geq 2^n$ où n_0 est un entier naturel à déterminer, le plus petit possible.

Posons $H(n)$: "$n! \geq 2^n$".
$1 = 0! = 2^0 = 1$
$1 = 1! < 2^1 = 2$
$2 = 2! < 2^2 = 4$
$6 = 3! < 2^3 = 8$
$24 = 4! > 2^4 = 16$
$120 = 5! > 2^5 = 32$.
Posons $n_0 = 4$.
Initialisation : $H(4)$ est vraie.
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$. Je suppose que $H(n)$ est vraie. Sous cette hypothèse (simple), je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.
Je sais que $n! \geq 2^n$. Alors, comme $(n+1) > 0$, $n! \times (n+1) \geq 2^n \times (n+1)$ i.e. $(n+1)! \geq 2^n \times (n+1)$.

De plus, $2^n \times (n+1) - 2^{n+1} = 2^n[(n+1)-2] = 2^n[n-1] > 0$ car $n \geq 4$. Donc, $2^n \times (n+1) > 2^{n+1}$. Par conséquent, $(n+1)! \geq 2^{n+1}$. Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie pour $n \geq 4$.
Conclusion : le théorème de récurrence simple assure que : $\forall n \geq 4,\ n! \geq 2^n$.

Ex 14 Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout p entier naturel non nul, $(1-x)^p \leq 1 - x^p$.

Posons $H(p)$: "$(1-x)^p \leq 1-x^p$."
Initialisation : $(1-x)^1 = 1 - x = 1 - x^1. Donc, H(1)$ est vraie.
Propagation : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 1$. Je suppose que $H(p)$ est vraie. Sous cette hypothèse (simple), je vais montrer que $H(p+1)$ est vraie.
Je sais que $(1-x)^p \leq 1 - x^p$.
Alors en multipliant l'inégalité précédente par $1 - x \geq 0$, $(1-x)(1-x)^p \leq (1-x)(1-x^p)$ ce qui signifie que :
$(1-x)^{p+1} \leq 1 - x - x^p + x^{p+1}$. Or, $(1 - x - x^p + x^{p+1}) - (1 - x^{p+1}) = -x - x^p + 2x^{p+1} = x^{p+1} - x^p + x^{p+1} - x = \underbrace{x}_{\geq 0}\underbrace{(x^p - 1)}_{\leq 0} + \underbrace{x^p}_{\geq 0}\underbrace{(x-1)}_{\leq 0} \leq 0$ .Donc,
$(1 - x - x^p + x^{p+1}) \leq 1 - x^{p+1}$. Par conséquent, $(1-x)^{p+1} \leq 1 - x^{p+1}$. Ainsi, $H(p+1)$ est vraie dès que $H(p)$ est vraie pour $p \geq 1$.
Conclusion : le théorème de récurrence simple assure que : $\forall p \geq 1,\ (1-x)^p \leq 1 - x^p$.

Ex 15 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)_{n>0}$.

Notons $u_n = \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$, $v_n = \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. Et Posons $H(n)$ la proposition : « $u_n \leq S_n \leq v_n$ ».
Initialisation : $u_1 = \left(\frac{2\times 1+1}{3}\right)\sqrt{1} = 1$, $v_1 = \left(\frac{2\times 1}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{1} = \frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ et $S_1 = \sum_{k=1}^{1}\sqrt{k} = \sqrt{1} = 1$. Donc, $u_1 \leq S_1 \leq v_1$. Ainsi, $H(1)$ est vraie.
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose $H(n)$ vraie et sous cette hypothèse (simple), je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.
Je sais que : $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. Par conséquent, $\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leq \sqrt{n+1} + \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$ i.e.
$\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} \leq \sqrt{n+1} + \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

Montrons que $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \leq v_{n+1}$.

■D'une part, $\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} - u_{n+1} = \sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} - \left(\frac{2(n+1)+1}{3}\right)\sqrt{n+1} = \sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} - \left(\frac{2n}{3}+1\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} - \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$. De plus, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\ et\ \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$ sont deux réels positifs, ils sont donc ordonnés dans le même sens que leurs carrés que l'on va donc comparer.
$\left[\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\right]^2 - \left[\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\right]^2 = \frac{(2n+1)^2}{9}n - \frac{4}{9}n^2(n+1) = \frac{1}{9}n > 0$. J'en déduis dans un premier temps que $\left[\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}\right]^2 > \left[\frac{2n}{3}\sqrt{n+1}\right]^2$ et ensuite que $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} > \frac{2n}{3}\sqrt{n+1}$. Par conséquent, $\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} - u_{n+1} > 0$ et ainsi, $u_{n+1} \leq \sqrt{n+1} + \left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n}$.
■D'autre part, $\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} - v_{n+1} = \sqrt{n+1} + \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} - \left(\frac{2(n+1)}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} - \left(\frac{2(n+1)}{3}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{n+1} = \left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n} - \left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}$.
De plus, $\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\ et\ \left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}$. sont deux réels positifs, ils sont donc ordonnés dans le même sens que leurs carrés que l'on va donc comparer.
$\left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]^2 - \left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right]^2 = \frac{(4n+3)^2}{36}n - \frac{(4n+1)^2}{36}(n+1) = -\frac{1}{36} < 0$. J'en déduis dans un premier temps que $\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right]^2 > \left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]^2$ et ensuite que $\left[\left(\frac{4n+1}{6}\right)\sqrt{n+1}\right] > \left[\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}\right]$ et enfin que $\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} - v_{n+1} < 0$. J'en conclus que $\sqrt{n+1} + \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n} \leq v_{n+1}$.

Il s'en suit que : $u_{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} \leq v_{n+1}$.

Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.
Conclusion : le théorème de récurrence simple assure que : $\forall n \geq 1$, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$.

Ex 16 Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$.

Notons $P_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)!$ et $u_n = [(n+1)!]^{n+1}$ et $H(n)$ la proposition : « $P_n \geq u_n$ ».
Initialisation : $u_1 = [2!]^2 = 4\ et\ P_1 = \prod_{k=0}^{1}(2k+1)! = 1! \times 3! = 6$. Donc, $u_1 \leq P_1$. Ainsi, $H(1)$ est vraie.
Propagation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je suppose $H(n)$ vraie et sous cette hypothèse (simple) , je vais montrer que $H(n+1)$ est vraie.
Je sais que : $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$. Par conséquent $(2(n+1)+1)!\ \prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq (2(n+1)+1)!\ [(n+1)!]^{n+1}$ car $(2(n+1)+1)! > 0$.
Autrement dit, $\prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)! \geq (2(n+1)+1)!\ [(n+1)!]^{n+1}$.
Montrons que $(2(n+1)+1)!\ [(n+1)!]^{n+1} \geq u_{n+1}$. Comme $u_{n+1} > 0$, je peux comparer $\frac{(2(n+1)+1)![(n+1)!]^{n+1}}{u_{n+1}}$ avec 1.
$\frac{(2(n+1)+1)![(n+1)!]^{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{(2n+3)![(n+1)!]^{n+1}}{[(n+2)!]^{n+2}} = \frac{(2n+3)![(n+1)!]^{n+1}}{[(n+1)!\times(n+2)]^{n+2}} = \frac{(2n+3)![(n+1)!]^{n+1}}{[(n+1)!]^{n+2}(n+2)^{n+2}} = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)^{n+2}} = \frac{(2n+3)\times(2n+2)\times(2n+1)\times\ldots\times(n+3)\times(n+2)\times[(n+1)!]}{(n+1)!(n+2)^{n+2}}$
$\frac{(2(n+1)+1)![(n+1)!]^{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{(2n+3)\times(2n+2)\times(2n+1)\times\ldots\times(n+3)\times(n+2)}{(n+2)^{n+2}} = \frac{(2n+3)}{(n+2)} \times \frac{(2n+2)}{(n+2)} \times \ldots \times \frac{(n+3)}{(n+2)} \times \frac{(n+2)}{(n+2)} = \prod_{k=n}^{2n+1}\frac{k+2}{n+2} \geq 1$ car $\forall k \geq n, (k+2) \geq (n+2)$.
Comme $u_{n+1} > 0$, j'en déduis que $(2(n+1)+1)!\ [(n+1)!]^{n+1} \geq u_{n+1}$. Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.
Conclusion : le théorème de récurrence simple assure que : $\forall n \geq 1$, $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$.

Ex 17 Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tels que : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = n$. Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!], a_k = 1$.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} 1 = n - 2n + n = 0$. Cette somme nulle de réels positifs n'est donc constituée que de réels nuls i.e. $\forall k \in [\![1,n]\!], (a_k - 1)^2 = 0\ et\ par\ suite\ \forall k \in [\![1,n]\!], a_k = 1$.

Ex 18 i. Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$.

ii. Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs alors $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$.

i. Soit des réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$,. Posons $\forall k, b_k = 1$. Alors, l'inégalité de C.S assure que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\ i.e.\ \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)$.
Ces deux membres étant positifs, j'en déduis, par croissance de la fonction racine carrée, que $\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2} \leq \sqrt{n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)}$. Et par conséquent, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$. J'en conclus, en divisant par $\sqrt{n} > 0$, que $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \underbrace{=}_{car\ \frac{1}{\sqrt{n}}>0} \frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$.

ii. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Posons $a_k = \sqrt{x_k}\ et\ b_k = \frac{1}{\sqrt{x_k}} = \sqrt{\frac{1}{x_k}}$. Alors l'inégalité de C.S assure que :
$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{x_k}}^2\right)$ ce qui donne : $\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$ et par suite : $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$.

Ex 19 Soit $n \in \mathbb{N}\ tq\ n \geq 2$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réel tels que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont strictement positifs.

a. On pose $m = \min\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}\ et\ M = \max\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Montrer que : $m \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq M$.

b. En déduire que $\min\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right\} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots, \frac{b_n}{a_n}\right\}$.

1. $\forall k \in [\![1,n]\!], m \leq b_k \leq M$ donc $ma_k \leq a_k b_k \leq Ma_k$. Par conséquent ,en sommant ces inégalités, j'obtiens $\sum_{k=1}^{n} ma_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sum_{k=1}^{n} Ma_k$ et

par suite $m\sum_{k=1}^n a_k \le \sum_{k=1}^n a_k b_k \le M\sum_{k=1}^n a_k$.
$Or, \sum_{k=1}^n a_k > 0$ puisque les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont strictement positifs. Alors, en divisant l'inégalité précédente par $\sum_{k=1}^n a_k$, j'obtiens, $m \le \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \le M$.

2. Posons $B_k = \frac{b_k}{a_k}$ et $A_k = a_k$ et $m = \min\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ et $M = \max\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$. Alors, les réels $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont strictement positifs et d'après ce qui précède, $m \le \frac{\sum_{k=1}^n A_k B_k}{\sum_{k=1}^n A_k} \le M$ ce qui signifie $\min\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\right\} \le \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \le \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\right\}$.

Ex 21 Soient $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tq : $0 < m < M$ et $a_1, .., a_n, b_1, .., b_n$ des réels tq $b_1, .., b_n$ non nuls et $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{a_k}{b_k} \in [m, M]$.

1. Qui peut-on choisir pour m et M ?
2. En étudiant le signe de $S_n = \sum_{k=1}^n (Mb_k - a_k)(a_k - mb_k)$, montrer que $\sum_{k=1}^n {a_k}^2 + mM\sum_{k=1}^n b^2 \le (m+M)\sum_{k=1}^n a_k b_k$.
3. On pose $I = \frac{m+M}{2}$ et $G = \sqrt{mM}$. Déduire de 1) que : $\sqrt{\sum_{k=1}^n {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b^2} \le \frac{I}{G}\sum_{k=1}^n a_k b_k$.

1. $m = \min\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$ et $M = \max\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right\}$ conviennent.
2. D'une part, $\forall k \in [\![1,n]\!], 0 < m \le \frac{a_k}{b_k} \le M$ et $b_k > 0$ donc $mb_k \le a_k \le Ma_k$ et $Mb_k - a_k \ge 0$ et $a_k - mb_k \ge 0$. Par conséquent, $S_n \ge 0$.

D'autre part, $S_n = \sum_{k=1}^n (Mb_k - a_k)(a_k - mb_k) = \sum_{k=1}^n -mMb_k - a_k^2 + (m+M)a_k b_k = -(\sum_{k=1}^n a_k^2) - mM(\sum_{k=1}^n b^2) + (m+M)(\sum_{k=1}^n a_k b_k)$.
Je déduis des deux résultats précédents que $-(\sum_{k=1}^n a_k^2) - mM(\sum_{k=1}^n b^2) + (m+M)(\sum_{k=1}^n a_k b_k) \ge 0$ et ainsi , je peux conclure que : $\sum_{k=1}^n {a_k}^2 + mM\sum_{k=1}^n {b_k}^2 \le (m+M)\sum_{k=1}^n a_k b_k$.
On pose $I = \frac{m+M}{2}$ et $G = \sqrt{mM}$. Alors, l'inégalité précédente s'écrit : $(\sum_{k=1}^n a_k^2) + G^2(\sum_{k=1}^n b_k^2) \le 2I\ (\sum_{k=1}^n a_k b_k)$.
Alors $\frac{(\sum_{k=1}^n a_k^2) + (\sum_{k=1}^n (Gb_k)^2)}{2} \le I\ (\sum_{k=1}^n a_k b_k)$. Or pour tous réels positifs x et y , $\sqrt{x}\sqrt{y} \le \frac{x+y}{2}$. Donc, en posant $x = \sum_{k=1}^n a_k^2$ et $y = \sum_{k=1}^n (Gb_k\ )^2$ qui sont des réels positifs (car somme de réels positifs), $\sqrt{\sum_{k=1}^n {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n (Gb_k\ )^2} \le \frac{(\sum_{k=1}^n a_k^2) + (\sum_{k=1}^n (Gb_k)^2)}{2}$.
De plus, $\sqrt{\sum_{k=1}^n (Gb_k\ )^2} = \sqrt{G^2\sum_{k=1}^n b_k^2} = \sqrt{G^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \overset{car\ G>0}{=} G\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$. Donc, $G\sqrt{\sum_{k=1}^n {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \le \frac{(\sum_{k=1}^n a_k^2) + (\sum_{k=1}^n (Gb_k)^2)}{2}$. Et par suite, $G\sqrt{\sum_{k=1}^n {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \le\ I\ (\sum_{k=1}^n a_k b_k)$. J'en conclus que : $\sqrt{\sum_{k=1}^n {a_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n {b_k}^2} \le \frac{I}{G}\sum_{k=1}^n a_k b_k$ $(puisque\ G > 0)$.

Ex 22 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs.

a. Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \ge i + j - 1$.

b. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\right)^2 \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.

a. Soit i et j deux entiers compris entre 1 et n. $ij - i - j + 1 = i(j-1) - (j-1) = \underbrace{(j-1)}_{\ge 0}\underbrace{(i-1)}_{\ge 0} \ge 0$. Ainsi, $ij \ge i + j - 1$.

b. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \ge i + j - 1 \ge 1 > 0$ $donc$ $0 < \frac{1}{ij} \le \frac{1}{i+j-1}$; $alors, comme$ $a_i a_j \ge 0$, $0 \le \frac{a_i a_j}{ij} \le \frac{a_i a_j}{i+j-1}$. En sommant ces n^2 inégalités, j' obtiens, $0 \le \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{a_i a_j}{ij} \le \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1}$. Enfin, $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{a_i a_j}{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\frac{a_j}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{j}\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\right)\left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{j}\right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\right)^2$. J'en déduis que $\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i}\right)^2 \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.

Ex 23 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Montrer qu'il existe une suite v telle que : $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$, $u_n = 2 + \frac{2}{n} + v_n$ et $0 < v_n < \frac{2}{n}$.
Qu'en déduit-on sur la suite u ?

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} = \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}\right) + \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}\right)}_{v_n} + 2 + \frac{2}{n}$. Alors $u_n = 2 + \frac{2}{n} + v_n$ et $0 < u_n - 2 - \frac{2}{n} < \frac{2}{n}$.

De plus, $\forall k \in [\![2, n-2]\!], \binom{n}{k} \ge \binom{n}{2} > 0$ $donc$ $0 < \frac{1}{\binom{n}{k}} \le \frac{1}{\binom{n}{2}}$. Alors en additionnant ces $n-3$ inégalités, j'obtiens :

$0 < \underbrace{\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}}_{v_n} \le \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}} = \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-3)}{n(n-2)} \underset{\substack{car \\ 0<n-3<n-2}}{<} \frac{2}{n}$. Comme les deux suites qui encadrent v tendant vers 0, le théorème des gendarmes assure que la suite v est convergente de limite 0. Comme de plus , $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{2}{n} = 2$, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Ex 24 Encadrer, minorer ou majorer de u_n par de bonnes suites et en appliquant le théorème des gendarmes, calculer la limite de chacune des suites u dont le terme général est le suivant :

a. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ tq $n > 0$

b. $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ tq $n \ge 0$

c. $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$ tq $n > 0$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \sqrt{k} + \sqrt{k-1} \le 2\sqrt{k} \le \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$. Donc, $0 < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \le \frac{1}{2\sqrt{k}} \le \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$. Alors en utilisant la quantité conjuguée, j'obtiens :
$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \le \frac{1}{2\sqrt{k}} \le \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. Donc en «sommant les inégalités» obtenues pour $k \in [\![1,n]\!]$, je gagne :
$\sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}} \le \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. Les deux sommes qui encadrent sont télescopiques , par conséquent, je simplifie :
$\sqrt{n+1} - 1 \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}} \le \sqrt{n} - \sqrt{0}$. Et par suite , $2(\sqrt{n+1} - 1) \le u_n \le 2\sqrt{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) = +\infty$, j'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Soi $n > 0$ et $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$
$\forall k \in [\![1, 2n+1]\!], 1 \le k \le 2n+1$ $donc$ $n^2 < n^2 + 1 \le n^2 + k \le n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ et par stricte croissance de la fonction racines carrée, $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+k} \le \sqrt{(n+1)^2}$ i.e. $0 < n < \sqrt{n^2+k} \le (n+1)$; alors par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$,
$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{n}$. Ainsi, $\forall k \in [\![1, 2n+1]\!], 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{n}$. Alors en « sommant ces $2n+1$ inégalités » , j'obtiens,
$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} < \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n}$.
Les deux sommes qui encadrent se calculent facilement : $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} \underbrace{=}_{\substack{puisque \\ \frac{1}{n+1}\ ne\ dépend \\ pas\ de\ k.}} (2n+1) \times \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n} \underbrace{=}_{\substack{puisque \\ \frac{1}{n}\ ne\ dépend \\ pas\ de\ k.}} (2n+1) \times \frac{1}{n}$.

Ainsi,$\forall n > 0$, $(2n+1) \times \frac{1}{n+1} < u_n \le (2n+1) \times \frac{1}{n}$.

De plus, $(2n+1)\times\frac{1}{n+1}=\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ *et* $(2n+1)\times\frac{1}{n}=2+\frac{1}{n}$. Donc les deux suites qui encadrent u_n tendent vers une même limite finie qui vaut 2, j'en déduis par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$.

c. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $u_n=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k}$.

$\forall k\in[\![1,n^2]\!], 1\le k\le n^2$ *donc* $0<n^2+1\le n^2+k\le 2n^2$ et par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, $0<\frac{1}{2n^2}\le\frac{1}{n^2+k}\le\frac{1}{n^2+1}$. Alors comme $n>0$, j'obtiens : $0\le\frac{1}{2n}<\frac{n}{n^2+k}\le\frac{n}{n^2+1}$. Alors en « sommant ces n^2 inégalités » , j'obtiens, $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2n}<\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k}\le\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+1}$.

Or, $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2n}=\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}$. *Donc* $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\ge\frac{n}{2}$. Alors comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty$, j'en déduis, en appliquant le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Ex 25 1. Montrer que : $\forall x\ge 0, x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$.

2. En déduire la limite de la suite u définie par : $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ tq $n>0$.

1. Posons $f(x)=x-\ln(1+x)$ *et* $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$. Etudions f et g dans le but de connaitre leur signe.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et $\forall x\ge 0, f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\ge 0$. Donc f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$donc $\forall x\ge 0, f(x)\ge f(0)=0$. Et ainsi, $\forall x\ge 0, \ln(1+x)\le x$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et $\forall x\ge 0, g'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-(1+x)(1-x)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}\ge 0$. Donc g est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$donc $\forall x\ge 0, g(x)\ge g(0)=0$. Et par suite, $\forall x\ge 0, x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. Alors $u_n\ge 1>0$. Posons $v_n=\ln(u_n)$. Alors, $v_n\ge 0$ *et* $v_n=ln(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right))=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

Comme $\forall x\ge 0, x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x, \forall k\in[\![1,n]\!], \frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2\le\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\le\frac{k}{n^2}$. En sommant ce n inégalités, j'obtiens :

$\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2)\le\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$.

$Or, \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n}$.

Ainsi, $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\le v_n\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n}$.

Les deux suites qui encadrent v tendent vers $\frac{1}{2}$, j'en déduis, en appliquant le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{1}{2}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Ex 26 Soit a un réel et $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)$.

1. Montrer que u est croissante et même strictement croissante si $|a|\ne 1$.
2. Montrer que si $|a|>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
3. Montrer que si $|a|<1$ alors (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

III. Racine carrée et quantité conjuguée- Racines $n^{\text{ièmes}}$ réelles.

Ex 27 1) Soit a et x deux réels. Quel est le signe de $x-\sqrt{x^2+a^2}$ *et de* $x+\sqrt{x^2+a^2}$? (justifier)

2) Ecrire $u(x)=2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+2x+1$ sous la forme d'un carré.

3) Soit $a\in[1,+\infty[$. Simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

Ex 28 Déterminer le domaine de définition de $f(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}}$.

Ex 29 Soit x et y deux rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrons que : $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

Ex 30 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Ex 31 Résoudre les équations suivantes d'inconnues x réelles :

1) $\sqrt[5]{x^4}=1$ 2) $4\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}=7$. 3) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\ge 2\sqrt{x}$.

Ex 32 Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, \sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$. Est-elle vraie pour $n=2$?

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}\Leftrightarrow n^{\frac{1}{n}}>(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\overset{\substack{car\ (x\mapsto x^{n(n+1)})\\ est\ strictement\\ croissante\ sur\ \mathbb{R}^+.}}{\Leftrightarrow}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{n(n+1)}>\left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n(n+1)}\Leftrightarrow n^{(n+1)}>(n+1)^n$$

$\Leftrightarrow ln\left(n^{(n+1)}\right)>\ln((n+1)^n)\Leftrightarrow(n+1)ln(n)>nln\ (n+1\ )$.

Posons $f:\left(x\mapsto(x+1)\ln(x)-x\ln(x+1)\right)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x>0, f'(x)=\ln(x)+\frac{x+1}{x}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}=\ln(x)+1+\frac{1}{x}-\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$

$$\forall x>0, f'(x)=1+\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{x+1}.$$

f' est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\forall x>0, f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)^2-(x+1)^2-x^2(x+1)-x^2}{(x+1)^2x^2}=\frac{-x^2-x-1}{(x+1)^2x^2}<0$.

x	3 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
$f'(x)$	$\searrow$ $+$ $\quad 0$
$f(x)$	$f(3)>0$ $\nearrow$ $+$

Les variations, valeurs ou limite de f'' puis f' puis f permettent d'affirmer que $\forall x\ge 3, f(x)>0$.

J'en déduis que $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, f(n)>0$ *i.e*

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$$

Ex 33 Démontrer que pour tous réels x et y , pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\sqrt[n]{|x \pm y|} \leq \sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}$.

Soit x et y deux réels. Comme la fonction $(t \mapsto t^n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $\sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|} \geq 0$ et $\sqrt[n]{|x \pm y|} > 0$, les réels $\sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}$ et $\sqrt[n]{|x \pm y|}$ sont ordonnés comme leurs puissances n.

$\left(\sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}\right)^n - \left(\sqrt[n]{|x \pm y|}\right)^n = \left(\sqrt[n]{|x|}\right)^n + \left(\sqrt[n]{|y|}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{|x|}\right)^k \left(\sqrt[n]{|y|}\right)^{n-k} - |x \pm y|$

$= |x| + |y| + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{|x|}\right)^k \left(\sqrt[n]{|y|}\right)^{n-k} - |x \pm y|$.

Or la première inégalité triangulaire assure que : $|x \pm y| \leq |x| + |y|$.

Donc, $\left(\sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}\right)^n - \left(\sqrt[n]{|x \pm y|}\right)^n \geq \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{|x|}\right)^k \left(\sqrt[n]{|y|}\right)^{n-k} \geq 0$. Donc, $\left(\sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}\right)^n \geq \left(\sqrt[n]{|x \pm y|}\right)^n$.

J'en déduis que : $\sqrt[n]{|x \pm y|} \leq \sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}$.

Ex 34 1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$.

2. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. On pose $m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, $g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ et $h = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$.

a. En appliquant l'inégalité obtenue au 1. à chaque réel $\frac{a_k}{m}$, montrer que $g \leq m$.

b. En appliquant l'inégalité obtenue au 2. a. aux réels $\frac{1}{a_k}$, montrer que $h \leq g$.

a. $\forall k \in [\![1, n]\!], \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leq \left(\frac{a_k}{m} - 1\right)$ donc, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{m} - 1\right)$. Puis , $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{m}\right) \leq \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - n$. Alors, $\ln\left(\frac{1}{m^n}\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \leq \frac{1}{m}(nm) - n$

b. Donc, $\ln\left(\left(\frac{1}{m}\prod_{k=1}^{n} {a_k}^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) \leq n - n$. Et par suite, $n \ln\left(\frac{1}{m} g\right) \leq 0$. Donc, $\ln\left(\frac{1}{m} g\right) \leq 0 = \ln(1)$ et en utilisant la stricte croissance du logarithme, $\frac{1}{m} g \leq 1$. Ainsi, $g \leq m$.

c. Ainsi, pour tous réels a_k $strictement\ positifs$, $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. Et par conséquent,

$0 < \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$. Donc, $0 < \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$. Ainsi, $h \leq g$ et par suite $h \leq g \leq m$.

Ex 35 Calculer $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{x^n - a^n}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$ où $a \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$.

IV. Valeur absolue.

Si a est un réel positif et X un réel alors

$|X| \leq a \Leftrightarrow -a \leq X \leq a \Leftrightarrow X^2 \leq a^2$.

Connaitre la première et la deuxième inégalité triangulaire.

Ex 36 Résoudre $|2x^2 - x - 1| = |1 - x^3|$.

Ex 37 Soit x un réel. Montrer que : $|x - 1| \leq \frac{1}{3} \Longrightarrow |x^2 - 1| \leq 1$.

Ex 38 Démontrer que pour tous réels x et y , $\sqrt{|x \pm y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$.

Ex 39 Montrer que : pour tous réels a et b, $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$.

Ex 40 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\left|\frac{2}{i} - 1 - \frac{1}{n}\right| \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Ex 41 1. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$.Déterminer le domaine de définition Df de f. Puis calculer la limite de f en 2.

2. Montrer que $\forall x \in Df \cap \mathbb{R}^+$, $\left|f(x) - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{|x-2|}{80}$.

3. En déduire un réel $r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall x \in [2 - r, 2 + r] \backslash \{2\}, f(x) \in [\frac{74}{100}; \frac{76}{100}]$.

$\boldsymbol{Df = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{existe}\}}$

V. Partie bornée - max et min.

$M = max\ A$ lorsque M majore A et $M \in A$.

Ex 42 Soit $x \in [0\,,1]$.Prouver que pour tout entier naturel n , $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq \min\left(\frac{1}{1+x}, x^n, 1\right)$.

Ex 43 Soit $A = \left\{\frac{x+2y}{x+y+1} / (x, y) \in [0,1]^2\right\}$. Montrer que A est bornée et $\max(A) = 1$. Déterminer $min(A)$.

Ex 44 Soit $A = \{x(1-x) / x \in [0,1]\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum que l'on déterminera.

Ex 45 1) Montrer que la suite $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend en décroisant vers 0.

2) Comparer $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

3) En déduire que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n \in \mathbb{N} / 0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$.

4) Soit $A = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} / n \in \mathbb{N}\}$. Justifier que A est bornée et admet un maximum.

5) Montrer que A n'a pas de minimum et l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément à déterminer.

1) $\forall n, u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$. De plus, $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$ et $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

Or , $n+2>n+1>n\ donc, \sqrt{n+2}>\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ et par conséquent, $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>0$. J'en déduis que $\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ i.e. $u_{n+1}<u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante. Et finalement, la suite $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend en décroisant vers 0.

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sqrt{n+1}>\sqrt{n}$ donc $2\sqrt{n+1}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}>\sqrt{n}+\sqrt{n}=2\sqrt{n}>0$. Et par conséquent, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$. J'en déduis d'après l'égalité $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ que $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$

3) Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*}$. Je cherche $n\in\mathbb{N}$ tel que $0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon$. Tout d'abord, l'inégalité $0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est toujours vérifiée.

De plus, je sais que : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Donc, pour que $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon$, il suffit que $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$.

Or , $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ les\ réels\ \frac{1}{2\sqrt{n}}\ et\ \varepsilon \\ sont\ strictement\ positifs \\ et\ la\ fonction\ inverse\ est \\ strictement\ décroissante \\ sur\ \mathbb{R}^{+*}.}} 2\sqrt{n}<\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow\sqrt{n}>\frac{1}{2\varepsilon} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ les\ réels\ \frac{1}{2\sqrt{n}}\ et\ \varepsilon \\ sont\ strictement\ positifs \\ et\ la\ fonction\ carrée\ est \\ strictement\ décroissante \\ sur\ \mathbb{R}^{+*}.}} n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$.

Posons $n_0=\left\lfloor\frac{1}{4\varepsilon^2}\right\rfloor+1$. Alors $\forall n\geq n_0, n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$ donc $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$ et par conséquent, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon$.

2) a) La suite (u_n) tend en décroisant vers 0. Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n\leq u_0=1$. Donc, la partie A est bornée , minorée par 0 et majorée par 1.

b) 1 majore A et $1=u_0\in A$. J'en déduis que 1 est le plus grand élément de A.

c) 0 minore A et $0\notin A$ donc tout réel négatif est un minorant de A mais n'est pas élément de A et n'est donc pas le minimum de A.

De plus, si ε est un réel strictement positif, alors , d'après 3, il existe toujours un élément de A strictement inférieur à ε ce qui prouve que ε ne minore pas A et n'est donc pas le minimum de A.

J'en conclus que A n'a pas de minimum bien que A soit minorée.

D'après ce qui précède, l'ensemble des minorants de A est $\mathbb{R}^-$ et admet donc un maximum qui est 0. 0 est donc le plus grand minorant de A.

Ex 46 1. Montrer que : pour tous réels $a,\ b,\ c\ et\ d,\ |ac+bd|\leq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.

2. Montrer que : $|ac+bd|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ sietssi $((a,b)=(0,0)\ ou\ \exists k\in\mathbb{R}$ tel que $c=ka\ et\ d=kb)$
3. Soit $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$ et $A=\{x+2y/(x,y)\in C\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum.
4. Soit x un réel. $(x^2-\alpha x+1)(x^2-\beta x+1)=x^4-(\alpha+\beta)x^3+(2+\alpha\beta)x^2-(\alpha+\beta)x+1$.

Donc pour que $\forall x\in\mathbb{R}, x^4-x^3-2x^2-x+1=(x^2-\alpha x+1)(x^2-\beta x+1)$, il suffit de choisir α et β tels que : $\begin{cases}-(\alpha+\beta)=-1\\ 2+\alpha\beta=-2\\ -(\alpha+\beta)=-1\end{cases}$ i.e. $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-4\end{cases}$. D'après e cours, $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=-4\end{cases}$ $sietssi\ \alpha\ et\ \beta$ sont les racines de $P(t)=t^2-t-4$.

Posons $\Delta_P=1+16=17$. Alors, $t_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\ et\ t_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ sont les racines de P. Comme, de plus, on souhaite que $\alpha<\beta$, on peut conclure que $\beta=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\ et\ \alpha=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ conviennent.

5. Posons $u(x)=(x^2-\alpha x+1)\ et\ v(x)=(x^2-\beta x+1)$.

   Alors d'une part, $\Delta_u=\alpha^2-4=\frac{1-2\sqrt{17}+16}{4}-\frac{16}{4}=\frac{1-2\sqrt{17}}{4}=\alpha<0$. Donc u n'a pas de racine réelle et $\forall x\in\mathbb{R}, u(x)>0$.

   Et d'autre part, $\Delta_v=\beta^2-4=\frac{1+2\sqrt{17}+16}{4}-\frac{16}{4}=\frac{1+2\sqrt{17}}{4}=\beta>0$. Donc, $\forall x\in\mathbb{R}, v(x)=\left(x-\frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2}\right)\left(x-\frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)\ et\ \left(v(x)<0\Leftrightarrow\frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2}<x<\frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)$.

   Ainsi, $\left(h(x)<0\Leftrightarrow\frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2}<x<\frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)$ et $\left(h(x)\geq 0\Leftrightarrow\frac{\beta-\sqrt{\beta}}{2}\geq x\ ou\ x\geq\frac{\beta+\sqrt{\beta}}{2}\right)$.

VI. Partie entière.

Ex 47 Soit $x\ et\ y$ deux réels. Montrer que : $\lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor$.

- $\forall x\in\mathbb{R}, \lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$.
- $p=\lfloor x\rfloor\Leftrightarrow\begin{cases}p\leq x<p+1\\ p\in\mathbb{Z}\end{cases}$.
- $\forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{Z}, \lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.

Ex 48 Soit n un entier naturel.

1) Développer $(3+\sqrt{5})^n\ et\ (3-\sqrt{5})^n$.
2) En déduire que $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
3) Montrer que $\lfloor(3+\sqrt{5})^n\rfloor$ est un entier impair.

Ex 49 Résoudre $\lfloor 2x+3\rfloor=\lfloor -x+5\rfloor$, d'inconnue x réelle.

Ex 50 Montrer que pour tous entiers relatifs n et m, $\left\lfloor\frac{n+m}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-m+1}{2}\right\rfloor=n$.

Ex 51 Montrons que : pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

Ex 52 Soit n un entier naturel. Déterminer $\lfloor\sqrt{n^2+3n+4}\rfloor$.

Ex 53 ** On souhaite montrer que $\forall n\in\mathbb{N}*,\ \lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor=\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$

1. Soit $n\in\mathbb{N}*$. Montrer que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor\leq\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

2. Imaginons un instant qu'il existe un entier n non nul tel que $\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\rfloor<\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.

   a) Montrer alors que : $\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leq\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor$.
   b) En déduire que $\lfloor\sqrt{4n+2}\rfloor^2=4n+2$.
   c) Expliquer pourquoi cette égalité est impossible et conclure.

Ex 54 Soit x réel et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{(n+1)x}{2n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Ex 55 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+3\sqrt{k}}{k} \right\rfloor$.

Ex 56 Soit $A = \left\{ \frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n \right\}$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} / \ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.
2. En déduire qu'entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.

Ex 57 1. Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. (disjonction de cas : $x \in \left[\lfloor x \rfloor ; \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right[$ ou $x \in [\lfloor x \rfloor ; \lfloor x \rfloor + 1[$).

2. Donner une méthode pour prouver que : pour tout réel x, $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
3. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor$.
   a. Montrer que $g: (x \mapsto f(x) - \lfloor x \rfloor)$ est 1-périodique (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x+1) = g(x)$).
   b. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Ex 58 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 \ si\ x \notin \mathbb{Z} \\ -x \ si\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x \rfloor)\ et\ g: (x \mapsto |2x - 1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer, si elle existe, la limite de f en k^+ (i.e. quand $x \to k\ et\ x > k$) . Faire de même en k^-. Qu'en déduit-on sur f ?
4. Tracer Cf.

Ex 59 1) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x > p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x < p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ où $p \in \mathbb{Z}$. Qu'en déduit-on pour $(x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})$?

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Ex 60 Représenter la courbe de f: $\left(x \mapsto \frac{1}{\lfloor x - \lfloor -x \rfloor \rfloor}\right)$.

VII. Trigonométrie.

Ex 61 Calculons $\tan\left(\frac{35\pi}{12}\right)$ $et \sin\left(\frac{103\pi}{8}\right)$.

Ex 62 Résoudre les deux équations 1) $\sin(x) - cos(x) > 1$ 2) $\sqrt{6}\sin(2x) - \sqrt{2}\cos(2x) = 2$.

je transforme
$Acos(wx) + Bsin(wx)$
sous la forme
$Ccos(wx + \varphi)$

Ex 63 Résoudre les deux équations : 1) $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49} \end{cases}$ 2) $4cos(x) + 3\sin(x) = 5$

Faire un cercle trigo. pour placer
$Arccos(a)$, $Arcsin(b)$ ou $Arctan(c)$,
pour résoudre $cos(x) = a$ ...,
$\sin(x) < b$ ....

Ex 64 Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $4cos^2(x) + 2(1 + \sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$
2. $2cos^3(x) - sin^2(x) \geq 5\cos(x) - 3$
3. $|\lfloor \sin(x) \rfloor| = 1$
4. $cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1$
5. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$
6. $cos^2(x) > \frac{3}{4}$
7. $tan(3x) < 1$
8. $\cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$
9. $cos(2x) - tan(x) > 1$
10. $\cos(x) - \sin(x) \geq 1$.

Bien connaitre les formules de trigo.

$cos^2(x) = \cdots$ ... . $\overset{si\ x\ldots\ldots\ldots\ldots}{\triangleq}$ ... ...

$\cos(2x) = \cdots$ ... ... $= \cdots$ ... ...

$\sin(2x) = \cdots$ ... ...

Si x ... ... $alors\ tan(2x) = \cdots$ ... ..

$\cos(x + y) = \cdots$ ... ...

$\sin(x + y) = \cdots$ ... ...

Si $x\ et\ y$ ... ... alors $\tan(x + y) = \cdots$ ....

Ex 65 Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ existe. Exprimer $\cos(x)\ et\ \sin(x)$ en fonction de t.
En déduire les solutions de l'équation : $(1 - \sqrt{3})\cos(x) = (1 + \sqrt{3})(1 - \sin(x))$ d'inconnue x réelle.

Ex 66 Justifier que pour tout réel x élément de D , $\frac{sinx + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$ où D est le domaine de « définition » de cette formule que l'on déterminera.

Ex 67 Soit $a = \frac{\pi}{20}$ et $S = \tan(a) - \tan(3a) - \tan(7a) + \tan(9a)$.

1. Montrer que $tan(9a) = \frac{1}{tan(a)}$ $et\ tan(7a) = \frac{1}{tan(3a)}$. En déduire que : $S = 2\left(\frac{1}{sin(2a)} - \frac{1}{sin(6a)}\right)$.
2. En déduire que : $S = 4$.

Ex 68 Montrer que : $\forall n \geq 2, cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots\ldots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés}$.

Ex 69 Montrer que pour tout réel x de $[0,\pi]$ et tout entier naturel n , $|\sin(nx)| \leq nsin(x)$.

Ex 70 Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

1) Calculer $S_n(x)\ pour\ x \equiv 0[2\pi]$.
2) Soit $x \not\equiv 0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$.

Ex 71 Justifier que : l'égalité $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)}$ est vraie pour tout réel x du domaine D de définition.
En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x)$ où $n \in \mathbb{N}\ et\ x \in \mathbb{R} \backslash \{p\frac{\pi}{2^k} / p \in \mathbb{Z}\ et\ k \in \mathbb{N}\}$.

Ex 72 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(a) = \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. Calculer $sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a)$. En déduire la limite de $P_n(a)$ quand $n \to +\infty$.

Ex 73 **1.** Exprimer $cos(4x)$ en fonction de $cos(x)$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que : $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Exprimer α en fonction de $Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

3. Montrer que : $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$. En déduire la valeur de α.

Ex 74 Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$ et $g(x) = \frac{1}{cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x)}$

Ex 75 Pour tout réel x de $[0,\pi]$, $sin^2x \leq \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$ et pour tout x de $]0, \pi/2[$, $\sin(x) > \frac{2}{\pi}x$.

Ex 76 1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$. $En\ déduire\ I = \int_0^{\pi} cos^3\left(\frac{x}{2}\right)dx$
2.Calculer $J = \int_0^{\pi} sin(mx)\sin(px)\,dx$ $où\ (m,p) \in \mathbb{N}^2$.

Ex 77 **a.** Rappeler $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}$ en fonction du paramètre réel a *et* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$.

b. Montrer que $\frac{\cos(x)-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Puis calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)}$.

CORRIGE TD 2 Des inégalités

Ex 12 Cauchy-Schwarz

Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $a_1,a_2,\dots,a_n$ et $b_1,b_2,\dots,b_n$ des réels.

On cherche ici à montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(**)$ suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\ notée\ (**)$$

1. Démontrer cette inégalité pour $n=2$.

2. **On suppose ici que $\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2=0$.** Justifier, dans ce cas, que l'inégalité (**) est vérifiée.

3. **On suppose ici que $\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2>0$.** Pour tout réel x,on pose $T(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2$.

a) Déterminer trois réels $A,B\ et\ C$ (indépendants de x) tels que : pour tout réel x, $T(x)=Ax^2+Bx+C$ et $A>0$.

b) Quel est le signe de T ? (justifier). En déduire que l'inégalité (**) est vraie.

4. Montrer que : $(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2=(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2)(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)$ **sietssi** [$a_1=..=a_n=0\ ou$ il existe un réel R tel que pour tout entier naturel $k\in[\![1,n]\!],b_k=R\ a_k$].

Ex 15 Soit $a_1,a_2,\dots,a_n$ des réels positifs.

c. Montrer que : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, ij\ge i+j-1$.

d. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

a. Soit i et j deux entiers compris entre 1 et n. $ij-i-j+1=i(j-1)-(j-1)=\underbrace{(j-1)}_{\ge 0}\underbrace{(i-1)}_{\ge 0}\ge 0$. Ainsi, $ij\ge i+j-1$.

b. $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2, ij\ge i+j-1\ge 1>0\ donc\ 0<\frac{1}{ij}\le\frac{1}{i+j-1}$; $alors, comme\ a_ia_j\ge 0$, $0\le\frac{a_ia_j}{ij}\le\frac{a_ia_j}{i+j-1}$. En sommant ces n^2 inégalités, j' obtiens, $0\le\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_j}{ij}\le\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}$. Enfin, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_j}{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\frac{a_j}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{j}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2$. J'en déduis que $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}$.

Ex 16 $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$. Montrer qu'il existe une suite v telle que : pour tout $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$, $u_n=2+\frac{2}{n}+v_n$ et $0<v_n<\frac{2}{n}$. Que peut-on en déduire sur la suite u ?

Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}$. $u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\left(\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}\right)+\frac{1}{\binom{n}{0}}+\frac{1}{\binom{n}{1}}+\frac{1}{\binom{n}{n-1}}+\frac{1}{\binom{n}{n}}=\underbrace{\left(\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}\right)}_{v_n}+2+\frac{2}{n}$. Alors $u_n=2+\frac{2}{n}+v_n$ et $0<u_n-2-\frac{2}{n}<\frac{2}{n}$.

De plus, $\forall k\in[\![2,n-2]\!],\binom{n}{k}\ge\binom{n}{2}>0\ donc\ 0<\frac{1}{\binom{n}{k}}\le\frac{1}{\binom{n}{2}}$. Alors en additionnant ces $n-3$ inégalités, j'obtiens :

$0<\underbrace{\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}}}_{v_n}\le\sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{2}}=\sum_{k=2}^{n-2}\frac{2}{n(n-1)}=\frac{2(n-3)}{n(n-2)}\underbrace{<}_{\substack{car\\0<n-3<n-2}}\frac{2}{n}$. Comme les deux suites qui encadrent v tendant vers 0, le théorème des gendarmes assure que la suite v est convergente de limite 0. Comme de plus , $\lim\limits_{n\to+\infty}2+\frac{2}{n}=2$, je peux conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

Ex 17 Limite par encadrement, minoration ou majoration …

Encadrer, minorer ou majorer de u_n par de bonnes suites et en appliquant le théorème des gendarmes, calculer la limite de chacune des suites u dont le terme général est le suivant :

d. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ tq $n>0$

e. $u_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ tq $n\ge 0$

f. $u_n=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k}$ tq $n>0$

d. Soit $n\in\mathbb{N}^*\ et\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\forall k\in\mathbb{N}^*, 0<\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\le 2\sqrt{k}\le\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$. Donc, $0<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\le\frac{1}{2\sqrt{k}}\le\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$. Alors en utilisant la quantité conjuguée, j'obtiens :

$\forall k\in\mathbb{N}^*, 0<\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\le\frac{1}{2\sqrt{k}}\le\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$. Donc en «sommant les inégalités» obtenues pour $k\in[\![1,n]\!]$, je gagne :

$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$. Les deux sommes qui encadrent sont télescopiques , par conséquent, je simplifie :

$\sqrt{n+1}-1\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{k}}\le\sqrt{n}-\sqrt{0}$. Et par suite , $2(\sqrt{n+1}-1)\le u_n\le 2\sqrt{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}2\left(\sqrt{n+1}-1\right)=+\infty$, j'en déduis que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

e. Soi $n>0\ et\ u_n=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

$\forall k\in[\![1,2n+1]\!], 1\le k\le 2n+1\ donc\ n^2<n^2+1\le n^2+k\le n^2+2n+1=(n+1)^2$ et par stricte croissance de la fonction racines carrée,

$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+k}\le\sqrt{(n+1)^2}$ i.e. $0<n<\sqrt{n^2+k}\le(n+1)$; alors par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$,

$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{n}$. Ainsi, $\forall k\in[\![1,2n+1]\!], 0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{1}{n}$. Alors en « sommant ces $2n+1$ inégalités » , j'obtiens,

$\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+1}<\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n}$.

Les deux sommes qui encadrent se calculent facilement : $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+1}\underbrace{=}_{\substack{puisque\\ \frac{1}{n+1}\ ne\ dépend\\ pas\ de\ k.}}(2n+1)\times\frac{1}{n+1}\ et\ \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n}\underbrace{=}_{\substack{puisque\\ \frac{1}{n}\ ne\ dépend\\ pas\ de\ k.}}(2n+1)\times\frac{1}{n}$.

Ainsi,$\forall n>0$, $(2n+1)\times\frac{1}{n+1}<u_n\le(2n+1)\times\frac{1}{n}$.

De plus, $(2n+1)\times\frac{1}{n+1}=\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\ et\ (2n+1)\times\frac{1}{n}=2+\frac{1}{n}$. Donc les deux suites qui encadrent $u_n$tendent vers une même limite finie qui vaut 2, j'en déduis par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

f. Soit $n\in\mathbb{N}^*\ et\ u_n=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k}$.

$\forall k\in[\![1,n^2]\!], 1\le k\le n^2 donc\ 0<n^2+1\le n^2+k\le 2n^2$ et par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$, $0<\frac{1}{2n^2}\le\frac{1}{n^2+k}\le\frac{1}{n^2+1}$. Alors comme $n>0$, j'obtiens : $0\le\frac{1}{2n}<\frac{n}{n^2+k}\le\frac{n}{n^2+1}$. Alors en « sommant ces n^2 inégalités » , j'obtiens, $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2n}<\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k}\le\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+1}$.

Or, $\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{2n}=\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}$. $Donc\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\ge\frac{n}{2}$. Alors comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty$, j'en déduis, en appliquant le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Ex 19 bis Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\} et\ n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right|\le\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$.

$$\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right| = \left|\frac{(1-x)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)}{1-x}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} x^k\right| \overbrace{\leq}^{1\text{ère } IT} \sum_{k=0}^{n}\left|x^k\right| = \sum_{k=0}^{n}|x|^k \underbrace{=}_{\substack{car\ x\neq\pm 1\ donc \\ |x|\neq 1}} \frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$