TD 2

Inégalités et premières fonctions réelles.

I Fonctions polynômiales.

Y-a-t-il une factorisation évidente ?
Y-a-t-il une racine évidente ?

Utiliser la somme et le produit des racines d'un polynôme de degré 2.

Penser à poser $X = \cdots$ de sorte que l' expression en X soit polynomiale.

Ex 1 Soit m, a et b des réels tels que $a < b$. Déterminer le signe de $u(x)$ en fonction de x.

a. $u(x) = 8x^3 + x^2 - 7x$
b. $u(x) = x^2 - 11x + 28$
c. $u(x) = 7x^2 + 23x + 6$ sachant que (-3) est racine de u
d. $u(x) = 2x^3 - x^2 + 3$
e. $u(x) = x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 13x + 6$
f. $u(x) = (x+a)(x+b) - (m+a)(m+b)$
g. $u(x) = (m+3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2$
h. $u(x) = x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)x - \sqrt{6}$
i. $u(x) = x^4 + 2x^2 - 48$
j. $u(x) = -2x^2 - 6|x| + 5$
k. $u(x) = e^{6x} - 2e^{3x} + 3$
l. $u(x) = 2x - \sqrt{x} - 3$
m. $u(x) = x^9 + 2x^5 - 35x$
n. $u(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
o. $u(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$
p. $u(x) = (x+3)(2x-1) - 27 - x^3$
q. $u(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Bien connaitre ses identités remarquables

Ex 2 Résoudre

a. $4 - 7x^2 > 0$
b. $x^4 < (\sqrt{2}+1)x^2 - \sqrt{2}$
c. $(x^4 - 1)^2 > 2$
d. $x^2 + 1 > 0$
e. $x^4 + 2 \leq 0$
f. $(x+2)^4 \geq 1$
g. $8 + x^3 \geq 0$
h. $|x|^3 - 2x^2 \geq 0$
i. $(\ln(x))^2 + 4 \leq 4\ln(x)$
j. $-2e^x + 3e^{-x} + 1 < 0$
k. $(\ln(x))^3 \geq 12(\ln(x))^2$-35ln (x)
l. $\frac{\sqrt{x}}{1+x} = m$
m. $\frac{1}{x} > -2$
n. $\frac{1}{3-x} > x$
o. $\frac{7x+9}{x^2+3x+2} \geq \frac{1-5x}{x^3+1}$
p. $\frac{1}{1-x} < \frac{x}{x+2}$
q. $\sqrt{|x| - 1} > 2$
r. $\sqrt{x^2+1} > x$
s. $\sqrt{-x-1} > x - 2.$
t. $\sqrt{-x-1} > 2 + x$
u. $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} > \frac{1}{2}$
v. $\ln(x-1) - \ln(x+2) < \ln(x)$

Si f est strictement croissante sur l'intervalle I alors $\forall (x,y) \in I^2, (x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y))$.
Donc je dois m' assurer que X et Y sont positifs avant d'affirmer que : $(X < Y \Leftrightarrow X^2 < Y^2)$ Et je dois m' assurer que X et Y sont de même signe avant d'affirmer que $\left(X < Y \Leftrightarrow \frac{1}{X} > \frac{1}{Y}\right)$.
De la même façon, si je sais que $X < Y$ alors avant de dire que $\frac{1}{X} > \frac{1}{Y}$, il faut que je précise que $0 < X < Y$ ou bien $X < Y < 0$. (rédaction : Je sais que $0 < X < Y$ donc $\frac{1}{X} > \frac{1}{Y} > 0$).

Penser à étudier le domaine de définition des expressions de l'équation avant de démarrer la résolution.

Ex 3 en autonomie Les assertions suivantes sont -elles vraies ou fausses ? Les corriger le cas échéant.

a. $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2$. VRAI ou FAUX
b. Si $x \in [-1,3]$ alors $x^3 > -2$. VRAI ou FAUX
c. $x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$. VRAI ou FAUX
d. $x \in [0,16] \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 4$. VRAI ou FAUX
e. $\frac{x-1}{x+2} < 0$ *sietssi* $x < 1$. VRAI ou FAUX
f. $\sqrt{x-1} < 1$ dès que $1 \leq x < 2$. VRAI ou FAUX
g. $(x-1)^2 > 4$ seulement si $x > 3$ VRAI ou FAUX

Réponse : $a.F - b.V - c.F - d.V - e.F - f.V - g.F$.

Lorsque l'on rencontre une FI « 0/0 » dans un calcul de limite en un REEL x_0, on peut tenter de factoriser les numérateur et dénominateur par $x - x_0$ ou $\sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ puis on simplifie.

Ex 4 Soit a un réel. Déterminer le domaine de définition de t. Etudier la limite de t en x_0.

1. $t(x) = \frac{x^3-8}{x^2-5x+6}$ et $x_0 = 2$
2. $t(x) = \frac{x^3-64}{\sqrt{x}-2}$ et $x_0 = 4$ puis $x_0 = +\infty$
3. $t(x) = \frac{(a-1)x+x^2-a}{x^3+a^3}$ et $x_0 = -a$ puis $x_0 = +\infty$

Ex 5 Déterminer toutes les fonctions polynomiales P de degré 3 vérifiant $P(-1) = P(4) = 0$ et $P(1) = 1$.

Ex 6 Trouver tous les réels m tels que l'équation $mx^2 + 2(4+m)x + 15 + m = 0$ admette deux solutions distinctes de signes opposés.

Ex 7 Déterminer les réels a qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$.

Bien connaitre le lien entre le signe et le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré 2 et le signe de son discrimant.

Ex 8 Soit $h(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 1$.

a. Montrer que : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 /\ \alpha < \beta\ et\ \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$.
b. En déduire le signe de $h(x)$ en fonction de x.

Lorsque je connais le produit et la somme de deux réels, je sais déterminer ces deux réels.

Ex 9 Soit a et b des entiers distincts et P la fonction telle que .

a. Factoriser $P(x)$ sans calculer Δ.
b. En déduire que pour tout entier c , $P(c)$ est un entier multiple de $(a-b)$, de $(b-c)$ et de $(c-a)$.

Ex 10 Soit $A = \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}+41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}}{\sqrt{3}}$. Montrer que : $A^3 - 7A - 36 = 0$. En déduire que $A = 4$.

II Comparer

Ex 11

1. Soit a, b, c et d réels tq $a < b$ et $c < d$. Soit $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$. Encadrer, au plus près et si possible, $2x - 3y$, xy et $\frac{x}{y}$.
2. Soit x et y deux éléments de $[-1,1]$. Peut -on encadrer xy ? $\frac{x}{y}$? Montrer que $4 + x + y + xy \in [3,7]$. En déduire $\min A$ et $\max A$ où $A = \{4 + x + y + xy / (x,y) \in [-1,1]^2\}$.

> 1. Démarrer d'un encadrement connu.
> 2. Etudier le signe de la différence. Faire ensuite apparaitre une somme ou un produit de réels positifs.
> 3. Comparer les carrés ou les inverses lorsque les deux réels sont de même signe.

Ex 12 Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 + \frac{1}{2} \geq a + b$. Pour quelles valeurs de a et b, y-a-t-il égalité ?
2. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2$.
3. $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $(0 < a \leq b \leq c \leq d \implies \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \leq \frac{a}{d} + \frac{d}{a})$.
4. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2, \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Ex 13 Montrer que $\forall n \geq n_0$, $n! \geq 2^n$ où n_0 est un entier naturel à déterminer, le plus petit possible.

Ex 14 Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour tout p entier naturel non nul, $(1-x)^p \leq 1 - x^p$.

Ex 15 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\frac{2n+1}{3}\right)\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \left(\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)_{n>0}$.

Ex 16 Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $\prod_{k=0}^{n}(2k+1)! \geq [(n+1)!]^{n+1}$.

Ex 17 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels tels que : $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = n$. Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!], a_k = 1$.

Ex 18 Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, $\left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2}$.

Ex 19 Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$. Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réel tels que $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont strictement positifs.

1. On pose $m = \min\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ et $M = \max\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Montrer que : $m \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq M$.
2. En déduire que $\min\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\right\} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \max\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_n}{a_n}\right\}$.

Ex 21 Soient $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tq : $0 < m < M$ et $a_1, .., a_n, b_1, .., b_n$ des réels tq $b_1, .., b_n$ non nuls et $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{a_k}{b_k} \in [m,M]$.

1. Qui peut-on choisir pour m et M ?
2. En étudiant le signe de $S_n = \sum_{k=1}^{n}(Mb_k - a_k)(a_k - mb_k)$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 + mM \sum_{k=1}^{n} b^2 \leq (m+M) \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
3. On pose $I = \frac{m+M}{2}$ et $G = \sqrt{mM}$. Déduire de 1) que : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b^2} \leq \frac{I}{G} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

Ex 22 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs.

1. Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \geq i + j - 1$.
2. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.

> Pour encadrer (majorer) une somme finie $\sum_{k=1}^{n} a_k$,
> - on fixe arbitrairement $k \in [\![1,n]\!]$.
> - on encadre (majore) a_k en utilisant $1 \leq k \leq n$ et les inégalités usuelles .
> - n somme ces n inégalités sur $k \in [\![1,n]\!]$.

Ex 23 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Montrer qu'il existe une suite v telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2,3\}, u_n = 2 + \frac{2}{n} + v_n$ et $0 < v_n < \frac{2}{n}$.
Qu'en déduit-on sur la suite u ?

Ex 24 Encadrer, minorer ou majorer de u_n par de bonnes suites et en appliquant le théorème des gendarmes, calculer la limite de chacune des suites u dont le terme général est le suivant :

a. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ tq $n > 0$ **b.** $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ tq $n \geq 0$ **c.** $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n}{n^2+k}$ tq $n > 0$

Ex 25 1. Montrer que : $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. En déduire la limite de la suite u définie par : $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ tq $n > 0$.

Ex 26 Soit a un réel et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + a^{2^k}\right)$.

1. Montrer que u est croissante et même strictement croissante si $|a| \neq 1$.
2. Montrer que si $|a| > 1$ alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. Montrer que si $|a| < 1$ alors (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

III. Racine carrée et quantité conjuguée- Racines $n^{\text{ièmes}}$ réelles.

Ex 27 1) Soit a et x deux réels. Quel est le signe de $x-\sqrt{x^2+a^2}$ *et de* $x+\sqrt{x^2+a^2}$? (justifier)
2) Ecrire $u(x)=2\sqrt{x+1}\sqrt{x}+2x+1$ sous la forme d'un carré.
3) Soit $a\in[1,+\infty[$. Simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$.

Ex 28 Déterminer le domaine de définition de $f(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}}$.

Ex 29 Soit x et y deux rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrons que : $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.

Ex 30 Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

Ex 31 Résoudre les équations suivantes d'inconnues x réelles : (E_1): $\sqrt[5]{x^4}=1$. (E_2): $4\sqrt[3]{x}+3\sqrt[4]{x}=7$. (E_3): $\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\geq 2\sqrt{x}$.

Ex 32 Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$, $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$. Est-elle vraie pour $n=2$?

Ex 33 Démontrer que pour tous réels x et y , pour tout entier naturel $n\geq 2$, $\sqrt[n]{|x\pm y|}\leq\sqrt[n]{|x|}+\sqrt[n]{|y|}$.

Ex 34 **1.** Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}, \ln(x)\leq x-1$.
2. Soit $a_1,a_2,\dots,a_n$ des réels strictement positifs. On pose $m=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$, $g=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$ et $h=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}$.

a. En appliquant l'inégalité obtenue au 1. à chaque réel $\frac{a_k}{m}$, montrer que $g\leq m$.

b. En appliquant l'inégalité obtenue au 2. a. aux réels $\frac{1}{a_k}$, montrer que $h\leq g$.

Ex 35 Calculer $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{x^n-a^n}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}$ où $a\in\mathbb{R}^+$ *et* $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

Pour faire disparaitre les valeurs absolues, j'utilise :

$|X|=\begin{cases}X \text{ si } X\geq 0\\ -X \text{ si } X<0\end{cases}$ ou $|X|^2=X^2$

IV. Valeur absolue.

Ex 36 Résoudre $|2x^2-x-1|=|1-x^3|$.

Ex 37 Soit x un réel. Montrer que : $|x-1|\leq\frac{1}{3}\Longrightarrow|x^2-1|\leq 1$.

Ex 38 Démontrer que pour tous réels x et y , $\sqrt{|x\pm y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$.

Ex 39 Montrer que : pour tous réels a et b, $|a|+|b|\leq|a+b|+|a-b|$.

Ex 40 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\left|\frac{2}{i}-1-\frac{1}{n}\right|\leq 1-\frac{1}{n}$.

Si a est un réel positif et X un réel alors

$|X|\leq a\Leftrightarrow -a\leq X\leq a\Leftrightarrow X^2\leq a^2$.

Connaitre la première et la deuxième inégalité triangulaire.

Ex 41 1. Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.Déterminer le domaine de définition Df de f. Puis calculer la limite de f en 2.
2. Montrer que $\forall x\in Df\cap\mathbb{R}^+$, $\left|f(x)-\frac{3}{4}\right|\leq\frac{|x-2|}{80}$.
3. En déduire un réel $r\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall x\in[2-r,2+r]\backslash\{2\}, f(x)\in[\frac{74}{100};\frac{76}{100}]$.

$\boldsymbol{Df=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\text{existe}\}}$

Ex 41 bis Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$ *et* $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right|\leq\frac{1-|x|^{n+1}}{1-|x|}$.

V. Partie bornée - max et min.

Ex 42 Soit $x\in[0\,,1]$.Prouver que pour tout entier naturel n , $0\leq\frac{x^n}{1+x}\leq\min\left(\frac{1}{1+x},x^n,1\right)$.

$M=\max(A)$ lorsque M majore A et $M\in A$.

Ex 43 Soit $A=\left\{\frac{x+2y}{x+y+1}/(x,y)\in[0,1]^2\right\}$. Montrer que A est bornée et admet un minimum et un maximum à déterminer.

Ex 44 Soit $A=\{x(1-x)/x\in[0,1]\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum que l'on déterminera.

Ex 45 1) Montrer que la suite $(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend en décroissant vers 0.
2) Comparer $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ *et* $\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$. En déduire que $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^{+*},\exists n\in\mathbb{N}/0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\varepsilon$.
4) Soit $A=\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}/n\in\mathbb{N}\}$. Justifier que A est bornée et admet un maximum.
5) Montrer que A n'a pas de minimum et l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément à déterminer.

Ex 46 1. Montrer que : pour tous réels a, b, c *et* d, $|ac+bd|\leq\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.
2. Montrer que : $|ac+bd|=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ sietssi $((a,b)=(0,0)$ *ou* $\exists k\in\mathbb{R}$ tel que $c=ka$ *et* $d=kb)$
3. Soit $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$ et $A=\{x+2y/(x,y)\in C\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum.

VI. Partie entière.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- $p = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq x < p+1 \\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Ex 47 Soit x et y deux réels. Montrer que : $\lfloor x \rfloor + \lfloor x+y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

Ex 48 Soit n un entier naturel.

1) Développer $(3+\sqrt{5})^n$ et $(3-\sqrt{5})^n$.
2) En déduire que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$est un entier pair.
3) Montrer que $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor$ est un entier impair.

Ex 49 Résoudre $\lfloor 2x+3 \rfloor = \lfloor -x+5 \rfloor$, d'inconnue x réelle.

Ex 50 Montrer que pour tous entiers relatifs n et m, $\left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n$.

Ex 51 Montrons que : pour tout réel x et tout entier naturel non nul n , $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Ex 52 Soit n un entier naturel. Déterminer $\lfloor \sqrt{n^2+3n+4} \rfloor$.

Ex 53 ** On souhaite montrer que $\forall n \in \mathbb{N}*$, $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$

1. Soit $n \in \mathbb{N}*$. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

2. Imaginons un instant qu'il existe un entier n non nul tel que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor < \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

a) Montrer alors que : $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.
b) En déduire que $\lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor^2 = 4n+2$.
c) Expliquer pourquoi cette égalité est impossible et conclure.

Ex 54 Soit x réel et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)x}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{(n+1)x}{2n}$. En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Ex 55 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+3\sqrt{k}}{k} \right\rfloor$.

Ex 56 Soit $A = \left\{ \frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n \right\}$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N} /\ q \in [\![0, 2^n]\!]$ et $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.
2. En déduire qu'entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.

Ex 57 1. Démontrer que pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. (disjonction de cas : $x \in \left[\lfloor x \rfloor ; \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right[$ ou $x \in [\lfloor x \rfloor ; \lfloor x \rfloor + 1[$).

2. Donner une méthode pour prouver que : pour tout réel x, $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.
3. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor$.
   a. Montrer que $g: (x \mapsto f(x) - \lfloor x \rfloor)$ est 1-périodique (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x+1) = g(x)$).
   b. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Ex 58 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 \ si\ x \notin \mathbb{Z} \\ -x\ si\ x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2. Soit $h: (x \mapsto x - \lfloor x \rfloor)$ et $g: (x \mapsto |2x-1|)$. Montrer que $f = g \circ h$ est paire, périodique.
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Déterminer, si elle existe, la limite de f en k^+ (i.e. quand $x \to k$ et $x > k$) . Faire de même en k^-. Qu'en déduit-on sur f ?
4. Tracer Cf.

Ex 59 1) Calculer $\lim_{\substack{x \to p \\ x > p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ et $\lim_{\substack{x \to p \\ x < p}} \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ où $p \in \mathbb{Z}$. Qu'en déduit-on pour $(x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor})$?

2) Calculer $\lim_{x \to 0^+} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Ex 60 Représenter la courbe de f: $\left(x \mapsto \frac{1}{\lfloor x - \lfloor -x \rfloor \rfloor} \right)$.

VII. Fonctions rationnelles.

Ex 61 Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes :

1. $F(x) = \frac{1-x^4}{x^3+1}$
2. $F(x) = \frac{1-3x}{x^3-4x}$
3. $F(x) = \frac{x}{x^4-1}$
4. $F(x) = \frac{x^4-3x^2+1}{x^4+2x^2+1}$

Ex 62

1. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k+1}{k^3-k^2-4k+4}$.
2. Trouver deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, 4x^4 + 1 = (2x^2 + ax + 1)(2x^2 + bx + 1)$. En déduire la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{4k^4+1}$.