DL 2

Ex 1 Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - 1\big)$. (cf chap 1 exercice corrigé 18ter.2)
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

Ex 2 1. Montrer que : pour tous réels $a,\ b,\ c\ et\ d,\ |ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.

2. Montrer que : $|ac+bd| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ sietssi $((a,b)=(0,0)\ ou\ \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $c = ka\ et\ d = kb)$
3. Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$ et $A = \{x+2y / (x,y) \in C\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum.

Ex 3 Soit $A = \left\{\frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n\right\}$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!\ q \in [\![0, 2^n]\!] / 0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.
2. En déduire qu'entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.