Fonctions trigonométriques.

I. Fonctions paires, impaires et périodiques. Courbes images.

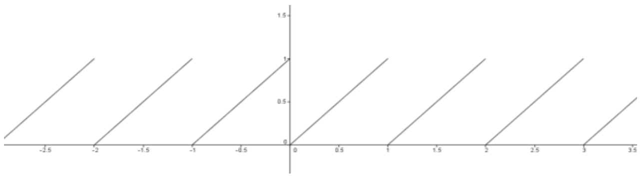
1 **Définition**

- f est paire lorsque : $\forall x \in Df, \begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$ i.e. lorsque Cf est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire lorsque : $\forall x \in Df, \begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$ i.e. lorsque Cf est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- f est périodique lorsque : $\exists T \in \mathbb{R}^*/\forall x \in Df, \begin{cases} x + T \in Df \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$ i.e. lorsque Cf est globalement invariant par translation de vecteur $T\vec{\imath}$.

2 **Propriétés**

- Si f est paire ou impaire alors l'étude de f sur $\mathbb{R}^+ \cap Df$, complétée par une bonne symétrie, permet de connaitre f sur Df et de tracer Cf.
- Si f est T-périodique alors l'étude de f sur $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \cap Df$ ou $[0, T[\cap Df$, complétée par des translations de vecteur $T\vec{\imath}$., permet de connaitre f sur Df et permet de tracer Cf.
- Si f est impaire et $f(0)$ existe alors $f(0) = 0$.
- Si f est T-périodique alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in Df, f(x+kT) = f(x)$.
- Si f est T-périodique et $(-T)$-périodique alors $\forall k \in \mathbb{Z}^*, \forall x \in Df, f(x+kT) = f(x)$.
- Si f *et* g sont T-périodiques alors $fg, af + bg$ où a *et* b constantes *et* $\frac{f}{g}$ sont T-périodiques
- Si f *et* g sont paires (resp. impaires) alors $af + bg$ où a *et* b constantes sont paires, resp. impaires.
- Si f *et* g sont de même parité alors fg et $\frac{f}{g}$ sont paires.
- Si f *et* g sont de parité contraire alors fg et $\frac{f}{g}$ sont paires.

3. **EXERCICE : justifier que la courbe de la fonction** $(x \to x - \lfloor x \rfloor)$ dite **partie décimale** est :



4 **Courbes images** Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de courbe représentative Cf. Soit a un réel.

1. La courbe représentative de $g: (x \mapsto f(x) + a)$ est l'image de Cf par la translation de vecteur $a\vec{\jmath}$ (puisque les points $M(x, f(x)) \in Cf$ *et* $N(x, f(x) + a) \in Cg$ vérifient $\overrightarrow{MN} = a\vec{\jmath}$)
2. La courbe de $g: (x \mapsto f(x + a))$ est l'image de Cf par la translation de vecteur $(-a)\vec{\imath}$. (puisque les points $M(x, f(x)) \in Cf$ *et* $N(x - a, f(x)) \in Cg$ vérifient $\overrightarrow{MN} = -a\vec{\imath}$)
3. La courbe de $g: (x \mapsto f(a - x))$ est l'image de Cf par la symétrie axiale d'axe d'équation $x = \frac{a}{2}$. (puisque les points $M(a - x, f(a - x)) \in Cf$ *et* $N(x, f(a - x)) \in Cg$ ont leur milieu sur cet axe et $\overrightarrow{MN}$ *est colinéaire à* $\vec{\imath}$ *donc orthogonal à cet axe*)
4. La courbe de $g: (x \mapsto -f(x))$ est l'image de Cf par la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.
5. La courbe de $g: (x \mapsto f(-x))$ est l'image de Cf par la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.
6. La courbe de $g: (x \mapsto |f(x)|)$ est obtenue en réunissant la partie de Cf au-dessus de l'axe des abscisses et la symétrique par rapport à l'axe des abscisses de la partie de Cf au-dessous l'axe des abscisses.

5 **Pour aller plus loin :** Soit $a > 0$.

7. La courbe de $g : (x \mapsto af(x))$ est obtenue en dilatant (si $a > 1$) ou rétractant (si $a < 1$) verticalement Cf dans un rapport de a. En notant $M(x, f(x))$ le point de C_f, $N(x, g(x))$ le point de C_g et $H(x, 0)$ le point de l'axe des abscisses alors $\overrightarrow{HN} = a\overrightarrow{HM}$.
8. La courbe de $(x \mapsto f(ax))$ est obtenue en dilatant (si $a < 1$) ou rétractant (si $a > 1$) horizontalement Cf dans un rapport de a. En notant $M(ax, f(ax))$ le point de C_f, $N(x, f(ax))$ le point de C_g et $H(0, f(ax))$ le point de l'axe des abscisses alors $\overrightarrow{HN} = \frac{1}{a}\overrightarrow{HM}$.

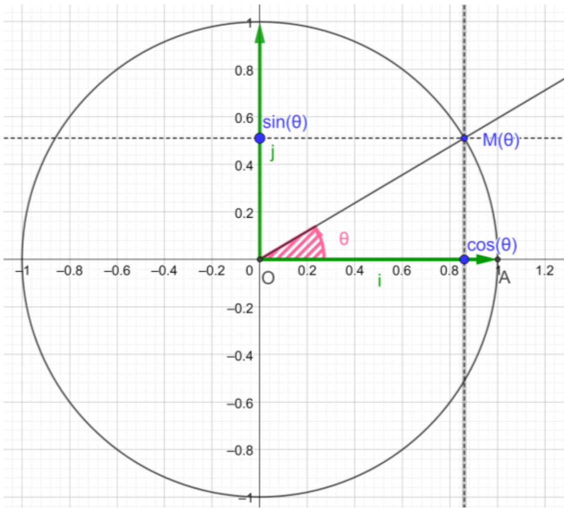
6 **Exemples :** La courbe d'équation $y = x^2 + 2$ est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $2\vec{j}$. La courbe Cf de $f: (x \mapsto 2 - \sqrt{x-4})$ est obtenue à partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ en faisant une translation de vecteur $4\vec{\imath}$ puis la symétrie axiale d'axe des abscisses puis la translation de vecteur $2\vec{j}$.

7 **Exercices: 1)** Tracer les courbes des fonctions d'expression : $-\frac{1}{x}, |\ln(x)|, 3e^x, e^{-x}, \sqrt{2-x}, |x+1| - 1, \frac{1}{3-x}, \frac{\sqrt{x}}{2}, \sqrt[3]{2x}, \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.
2) Tracer rapidement la courbe de f telle que : $f(x) = \frac{2-3x}{3-x}$ en décomposant f en éléments simples.

II. Sinus et cosinus d'un nombre réel.

1. Définitions et premières formules de trigonométrie

8 **Définition :** Soit θ un réel. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{j})$, on note $M(\theta)$ le point tel que : $OM = 1$ et $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right) = \theta$. Par définition, $\cos(\theta)$ *est l'abscisse de* $M(\theta)$ *et* $\sin(\theta)$ *est l'ordonnée de* $M(\theta)$.



$$cos\theta = \cos(\theta) \underbrace{=}_{def} abscisse\ de\ M(\theta)$$

$$sin\theta = \sin(\theta) \overset{def}{=} ordonnée\ de\ M(\theta)$$

9 **Exercice** : avec cette définition , résoudre les équations suivantes d'inconnue θ réelle.

1. $\cos(\theta) = 0$
2. $\sin(\theta) = 0$
3. $\sin(\theta) = 1$
4. $\cos(\theta) = -1$

On en déduit les propriétés suivantes (à savoir retrouver sur le cercle trigonométrique) :

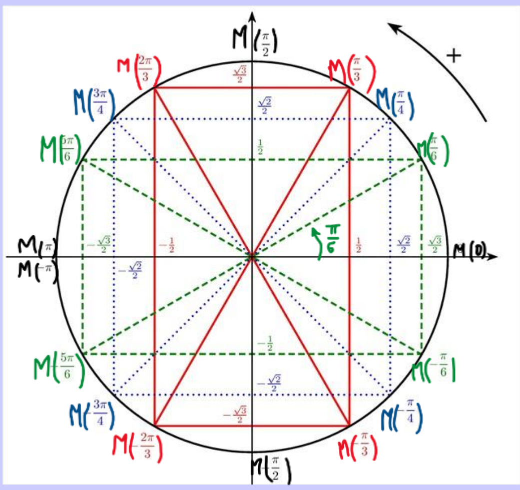
10 **Premières formules de trigonométrie :** Soit θ un réel et k un entier relatif.

1. $|sin\theta| \leq 1$ et $|cos\theta| \leq 1$
2. $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$
3. $\cos(\theta + 2k\pi) = cos\theta$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = sin\theta$
4. $\cos(-\theta) = cos\theta\ et \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
5. $\cos(\theta + \pi) = -cos\theta\ et \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$
6. $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k cos\theta\ et \sin(\theta + k\pi) = (-1)^k \sin(\theta)$
7. $\cos(\pi - \theta) = -cos\theta\ et \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
8. $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$ et $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$

A savoir retrouver très rapidement grâce au cercle trigonométrique

11 **Quelques valeurs à connaitre :**

θ	$cos\theta$	$sin\theta$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1



12 **Exercice** :Calculons $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right), \sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{87\pi}{4}\right)$

2. Equations et inéquations trigonométriques

13**Rappel :** On dit que « x est **congru à a modulo 2π** » lorsqu'il existe un entier k dans $\mathbb{Z}$ tel que : $x = a + k2\pi$.
On note alors : $x \equiv a[2\pi]$

14**Equations** :
1.Soit x et a des réels.
$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x\ est\ de\ la\ forme\ a + 2k\pi$ **ou** $-a + 2k\pi\ tq\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ /x = a + 2k\pi$ **ou** $x = -a + 2k\pi$
$\Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ **ou** $x \equiv -a[2\pi]$
$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x\ est\ de\ la\ forme\ a + 2k\pi$ **ou** $\pi - a + 2k\pi\ tq\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/x = a + 2k\pi$ **ou** $x = \pi - a + 2k\pi$
$\Leftrightarrow x \equiv a[2\pi]$ **ou** $x \equiv \pi - a[2\pi]$

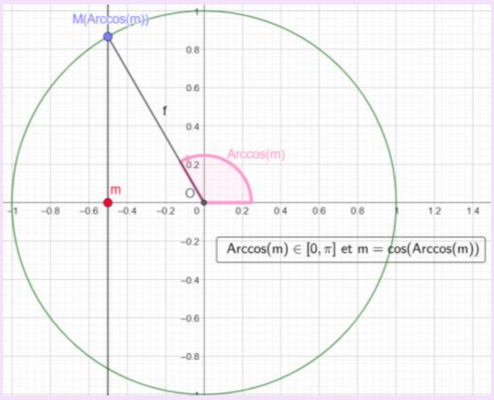
Lire les solutions sur le cercle trigonométrique.

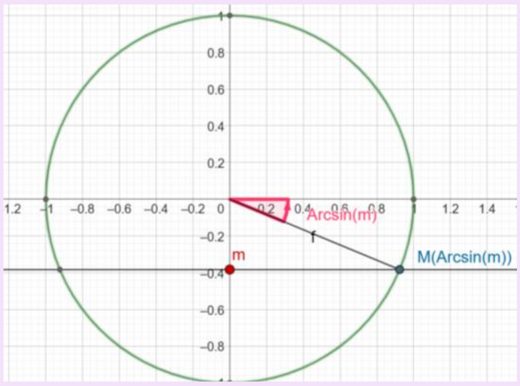
2.Soit m un réel. Résolvons l'équation $\cos(x) = m$, d'inconnue x réelle.
- si $|m| > 1$ alors l'équation $\cos(x) = m$ n'a aucune solution.
- si $|m| \leq 1$ alors l'équation $\cos(x) = m$ a une unique solution dans $[0, \pi]$ et a une infinité de solutions réelles .

Def : $Arccos(m)$, l'arccosinus du réel $m\ tq\ |m| \leq 1$, est l'unique solution dans $[0, \pi]$ de l'équation $\cos(x) = m$.
$Arccos(m)$ n'esiste que si $m \in [-1,1]$ et, $lorsqu'$il existe, est l'unique réel de $[0, \pi]$ vérifiant $\cos(Arccos(m)) = m$.
Ainsi, si $|m| \leq 1$ alors $[\cos(x) = m \Leftrightarrow x = Arccos(m)[2\pi]$ **ou** $x \equiv -Arccos(m)[2\pi]]$

3.Soit m un réel. Résolvons l'équation $\sin(x) = m$, d'inconnue x réelle.
- si $|m| > 1$ alors l'équation $\sin(x) = m$ n'a aucune solution
- si $|m| \leq 1$ alors l'équation $\sin(x) = m$ a une unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et a une infinité de solutions réelles .

Def : $Arcsin(m)$, l'arcsinus du réel $m\ tq\ |m| \leq 1$, est l'unique solution dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\sin(x) = m$. $Arcsin(m)$ n'esiste que si $m \in [-1,1]$ et, le cas échéant, est l'unique réel de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\sin(Arcsin(m)) = m$.
Ainsi, si $|m| \leq 1$ alors $[\sin(x) = m \Leftrightarrow x = Arcsin(m)[2\pi]$ **ou** $x \equiv \pi - Arcsin(m)[2\pi]]$





15**Exercice** :
1) Résolvons $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
2) Résolvons $\begin{cases} \sin(x) = -\frac{1}{8} \\ \cos(x) = -\frac{\sqrt{63}}{8} \end{cases}$.
3) Résolvons $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(2x)$

16 **Inéquations** : Lire les solutions sur le cercle trigonométrique
17**Exercice :** Résolvons $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. D'autres formules de trigonometrie

18**Formules d'addition** Soit $a\ et\ b$ des réels. $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(a-b) = cosacosb + sinasinb \\ \sin(a-b) = sinacosb - sinbcosa \end{cases}$

Formules d'angle double : Soit θ un réel. $\begin{cases} \cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta \\ \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$

19**Exercices** 1. Calculons $cos\frac{\pi}{12}$ et $cos\frac{\pi}{8}$.
2.Calculer $\int_0^{\pi} sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

20**Théorème :** Si f est continue sur **un intervalle I** alors
- f admet une primitive F sur cet intervalle et pour tous réels a et b de I, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$
- les primitives de f sur I sont les fonctions $F + cste$
- pour chaque $a \in I\ et\ b \in \mathbb{R}, f$ admet une unique primitive H qui vérifie $H(a) = b$.

21Linéarisation et factorisation A SAVOIR QUE CES FORMULES EXISTENT ET SAVOIR RETROUVER

Soit $a\ et\ b, p\ et\ q$ deux réels. $\begin{cases} \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \end{cases}$ et $\begin{cases} cos(p) + cos(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ cos(p) - cos(q) = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ sin(p) + sin(q) = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$.

22**Exercices** 1. Déterminer la primitive de $(t \mapsto cos(3t+1)sin(1-2t))$ qui s'annule en 0.
2.Chercher le signe de $f: \left(x \mapsto \cos(2x) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right)$.

5. Ecriture de $Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ sous la forme $Ccos(\omega t + \varphi)$

23**Propriété :** Si $a\ et\ b$ sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe un réel θ tel que : $a = \cos(\theta)\ et\ b = \sin(\theta)$ et il existe un seul $\theta \in [0,2\pi[$ tel que : $a = \cos(\theta)\ et\ b = \sin(\theta)$.

24**Théorème:** Soit ω, A et B des réels (indépendants de t).

Alors il existe un réel φ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ Acos(\omega t) + Bsin(\omega t) = \sqrt{A^2+B^2}cos(\omega t + \varphi)$

NB : l'angle φ vérifie $cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $sin\varphi = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

25**Exercices** : 1) Résoudre l'équation $cost - sint = 1$ d'inconnue t réelle.
2) Chercher le signe de $f: (x \mapsto \sqrt{3}\cos(t) - \sin(t))$ sur $[0,2\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$..

26**Pour écrire $f(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ sous la forme $Ccos(\omega t + \varphi)$:**

1. Je factorise $f(t)$ par $\sqrt{A^2+B^2}$
2. Je trouve φ tel que : $cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $sin\varphi = \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$
3. J'applique la formule d'addition du cos.

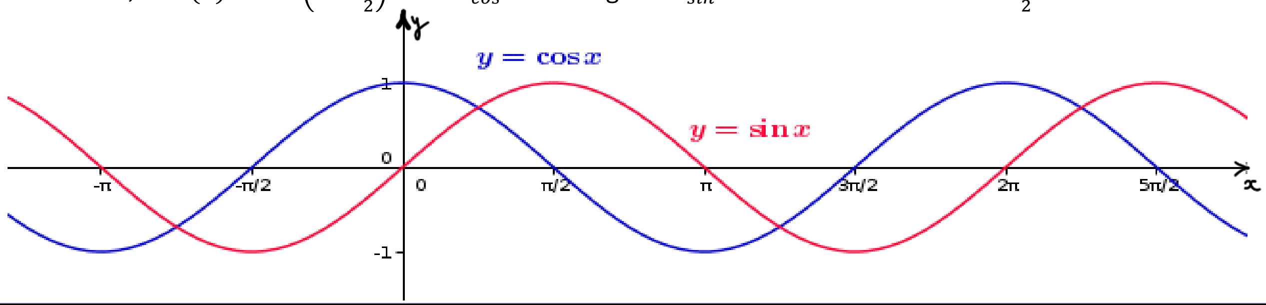
6. Fonctions sinus et cosinus

26On définit ainsi **les fonctions sinus $sin: (x \mapsto \sin(x))$ et cosinus $cos: (x \mapsto \cos(x))$**

27**Théorème** Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables donc continues sur $\mathbb{R}$
et $\forall x \in \mathbb{R}, sin'(x) = \cos(x)$ et $cos'(x) = -sin(x)$. En particulier, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$.

28**Représentation des fonctions sinus et cosinus :**

Pour tout réel x , $\cos(x) = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ donc C_{cos} est l'image de C_{sin} la tanslation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$.



29**Théorème :** $\forall x \in \mathbb{R}, |sin(x)| \leq |x|$.

30**Pour montrer une inégalité de la forme $\forall x, f(x) \leq g(x)$,** je peux étudier (variations et valeurs) la fonction h définie par : $h(x) = g(x) - f(x)$ dans le but de connaitre son signe.

III. Tangente d'un nombre réel.

1. Définitions de premières propriétés

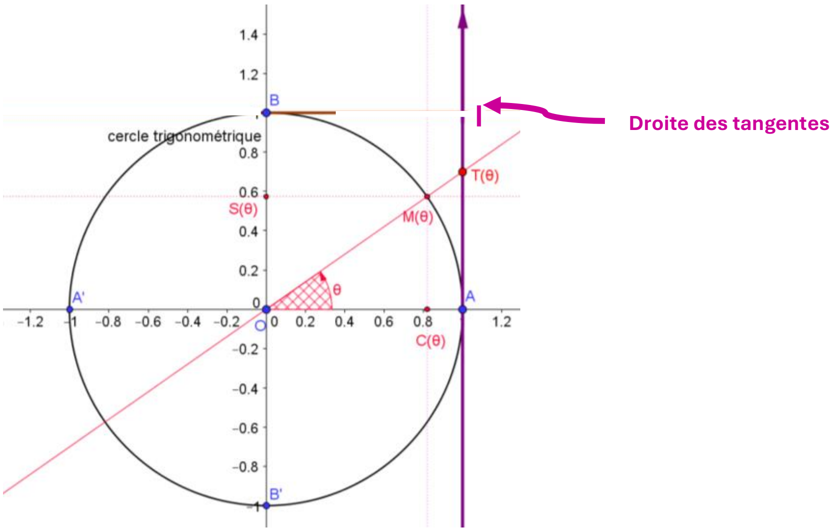
31**Définition :** La tangente d'un réel θ distinct de toutes les valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi\ tel\ que\ k \in \mathbb{Z}$ est le réel : $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

32**NB** :pour tout X réel, $cos(X)$ et $sin(X)$ existent.
$\tan(X)$ existe $\Leftrightarrow$ X est un réel distinct de tous les réels $\frac{\pi}{2} + k\pi\ tel\ que\ k \in \mathbb{Z}$.

33**Complément :** La cotangente d'un réel θ distinct de toutes les valeurs $k\pi\ tel\ que\ k \in \mathbb{Z}$ est le réel $cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

34 Lecture de $\tan(\theta)$ sur le cercle trigonométrique :

$cos\theta = \overline{OC}$
$sin\theta = \overline{OS}$
$tan\theta = \overline{AT}$



2. Formules de trigonométrie

35 Premières formules de trigonométrie : Soit θ un réel et k un entier relatif

1. Si $\tan(\theta)$ *existe* alors $\tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$
2. Si $\tan(\theta)$ *existe* alors $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
3. Si $\tan(\theta)$ *existe* alors $\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$
4. Si $\tan(\theta)$ *existe* alors $1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$
5. Si $\tan(\theta)$ *et* $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ *existent* alors $tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{tan\theta}$
6. Si $\tan(\theta)$ *et* $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ *existent* alors $tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{tan\theta}$

36 Quelques valeurs à connaitre :

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{tan\theta}$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	N'existe pas

37 Formules d'addition Soit a *et* b des réels. Si $tan(a+b)$, $tan(a)$ et $tan(b)$ existent, *alors* $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

38 Formules d'angle double : Soit θ un réel. Si $tan(\theta)$ et $tan(2\theta)$ existent, *alors* $\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan(\theta)^2}$.

39 Exercice : Complétons $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \tan(\dots)$

3. Equations et inéquations trigonométriques

40 Equations

1) Soit x et a des réels.

$tan(x) = tan(a) \Leftrightarrow x\ est\ de\ la\ forme\ a + k\pi\ \ tq\ k \in \mathbb{Z}.\quad \Leftrightarrow \exists k \in \frac{\mathbb{Z}}{x} = a + k\pi \ \Leftrightarrow (x \equiv a[\pi])$

2) Soit m un réel. L'équation $\tan(x) = m$, d'inconnue réelle x, a une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et a une infinité de solutions dans $\mathbb{R}$.

Def : Soit m un réel. $Arctan(m)$, l'arctangente du réel m, est l'unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan(x) = m$.

$Arctan(m)$ *existe pour tout réel m et*, est l'unique réel de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut m.

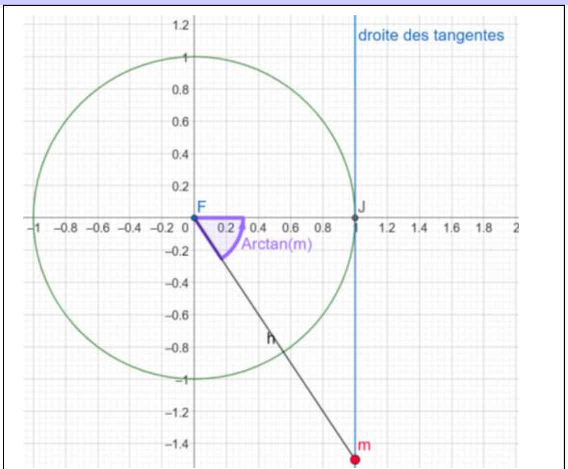
$Arctan(m)$ *existe pour tout réel m et*, est l'unique antécédent dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de m par la fonction tangente.

Les solutions de l'équation $\tan(x) = m$ sont tous les réels $a + k\pi$ tq $k \in \mathbb{Z}$ où a est une solution particulière de l'équation ; $a = Arctan(m)$ convient.

41 Application : on a démontré qu'il existe toujours un réel θ tel que : $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Si $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ *alors* $\theta = arctan\frac{b}{a}[2\pi]$.

Si $\theta \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$ *alors* $\theta = \pi + arctan\frac{b}{a}[2\pi]$.



3) **La fonction tangente**

On définit ainsi **la fonction réelle : tangente ($x \mapsto \tan(x)$)**

42**Théorème :**

- $D_{tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$.
- Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} tan(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tan(x) = +\infty$. La courbe de tan a une infinité d' asymptotes verticales.
- La fonction tangente est dérivable donc continue sur D_{tan}.
- $\forall x \in D_{tan}, tan'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$.
- La fonction tangente est strictement croissante sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

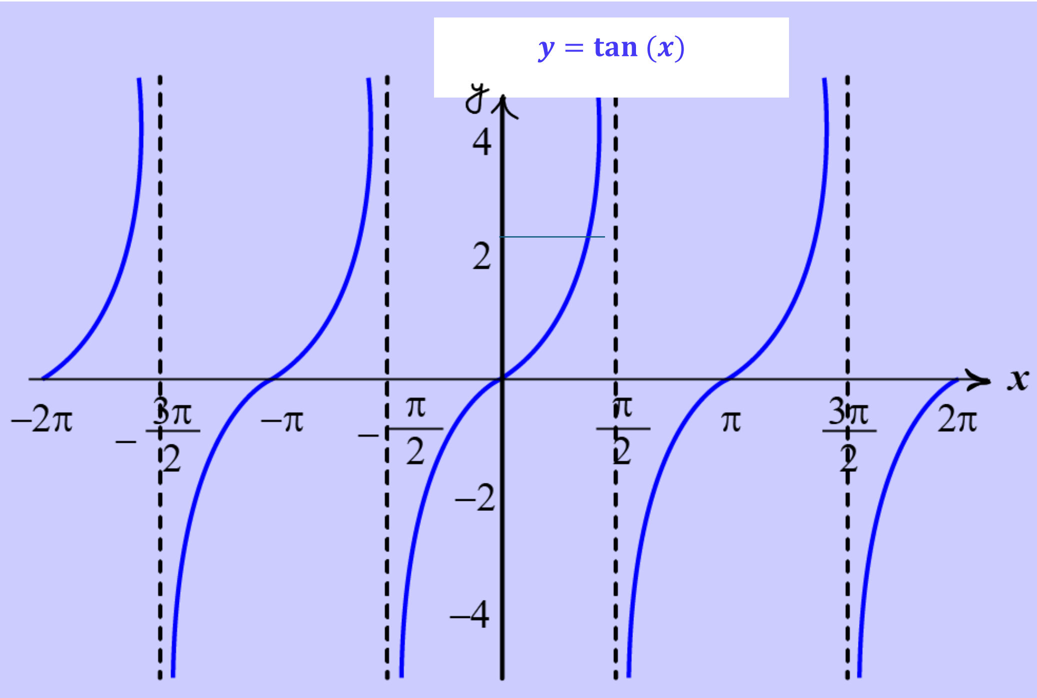
43**A NOTER :**

1) La fonction tan est continue sur tout son domaine de définition et pourtant sa courbe a des trous ! La raison : le domaine de définition de tan n'est pas un intervalle, ce domaine de définition a des trous donc la courbe a des trous.
2) La dérivée de tan est strictement positive et pourtant la fonction tangente n'est pas strictement croissante sur D_{tan} (car $-\frac{3\pi}{4} < -\frac{\pi}{4}$ et $\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1 > -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$). La raison : le domaine de définition de tan n'est pas un intervalle . Le théorème qui relie le signe de la dérivée et la monotonie d'une fonction n'est valable que sur un intervalle .

44**Théorème « Dérivation et monotonie »**

- Si f est dérivable sur un **intervalle** I et $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
- Si f est dérivable sur un **intervalle** I et $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) et f'ne s'annule qu'en des points isolés alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

45 **Représentation de la fonction tangente.**



46**Théorème :** $\forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[, |tan(x)| \geq |x|$.