TD 3

Caractérisation d'une fonction bornée par la valeur absolue :
f est bornée sur Df lorsque :
……………………………………………………

Ex 0 Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a et b deux réels.

1. Montrer que si f et g sont bornées alors $af + bg$ et fg sont bornées… qu'en est-il de $\frac{f}{g}$, ?
2. Montrer que si f et g sont croissantes et a et b sont positifs alors $af + bg$ est croissante, $-f$ est décroissante … qu'en est-il de fg ?
3. Montrer que si f et g sont impaires alors $af + bg$ est impaire et fg et $\frac{f}{g}$ sont paires.
4. Montrer que si f et g sont T-périodiques alors $af + bg$ et fg et $\frac{f}{g}$ sont T-périodiques.
5. Montrer que si f est croissante et périodique alors f est constante.
6. Montrer que si $f \circ f \circ f$ *est* strictement décroissante et $f \circ f$ est croissante alors f est strictement monotone.
7. Prenons $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ *et* $g(x) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$. Montrer que $\sqrt{2}f - \pi g$ est périodique et bornée.
8. Prenons $f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Tracer la courbe de f.

Ex 1 Calculons $\tan\left(\frac{35\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{103\pi}{8}\right)$.

Ex 2 Résoudre les deux équations **1)** $\sin(x) - cos(x) > 1$ **2)** $\sqrt{6}\sin(2x) - \sqrt{2}\cos(2x) = 2$.

Faire un cercle trigo. pour placer $Arccos(a)$, $Arcsin(b)$ ou $Arctan(c)$, pour résoudre $cos(x) = a$ …, $\sin(x) < b$ ….

Ex 3 Résoudre les deux équations : **1)** $\begin{cases} x \in \left[-\frac{3}{2}\pi, -\pi\right[\\ \cos(2x) = -\frac{47}{49}. \end{cases}$ **2)** $4cos(3x) - 3\sin(3x) = 5$

Ex 4 Résoudre les (in-)équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $4cos^2(x) + 2(1 + \sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$
2. $2cos^3(x) - sin^2(x) \geq 5\cos(x) - 3$
3. $|[\sin(x)]| = 1$
4. $cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + sin^2(2x) = 1$
5. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$
6. $cos^2(x) > \frac{3}{4}$
7. $tan(3x) < 1$
8. $\cos(x) - \sin(x) = \frac{1}{2\cos(x)}$
9. $cos(2x) - tan(x) > 1$
10. $\cos(x) - \sin(x) \geq 1.$

Bien connaitre les formules de trigo.

■ $cos^2(x) = \cdots$ … . … . $\overset{si\ x \ldots\ldots\ldots}{\triangleq}$ … … . .

■ $\cos(2x) = \cdots$ … … . . $= \cdots$ … … … …

■ $\sin(2x) = \cdots$ … … … … ..

■Si x … … … … … … *alors*

$tan(2x) = \cdots$ … . .

■ $\cos(x + y) = \cdots$ … … … … … … …

■ $\sin(x + y) = \cdots$ … … … … ….

■Si x *et* y … … … … … … … . . . alors

$\tan(x + y) = \cdots$ … . . ….

Ex 5 Soit x un réel tel que $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ existe. Exprimer $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$ en fonction de t.
En déduire les solutions de l'équation : $(1 - \sqrt{3})\cos(x) = (1 + \sqrt{3})(1 - \sin(x))$ d'inconnue x réelle.

Ex 6 Justifier que pour tout réel x élément de D , $\frac{\sin x + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$
où D est le domaine de « définition » de cette formule que l'on déterminera.

Ex 7 Soit $a = \frac{\pi}{20}$ et $S = \tan(a) - \tan(3a) - \tan(7a) + \tan(9a)$.

1. Montrer que $tan(9a) = \frac{1}{tan(a)}$ *et* $tan(7a) = \frac{1}{tan(3a)}$. En déduire que : $S = 2\left(\frac{1}{sin(2a)} - \frac{1}{sin(6a)}\right)$.
2. En déduire que : $S = 4$.

Ex 8 Montrer que : $\forall n \geq 2, cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots\ldots}}}}}_{n-1\ radicaux\ superposés}$.

Ex 9 Montrer que pour tout réel x de $[0,\pi]$ et tout entier naturel n , $|\sin(nx)| \leq nsin(x)$.

Ex 10 Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

1) Calculer $S_n(x)$ *pour* $x \equiv 0[2\pi]$.
2) Soit $x \not\equiv 0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$.

Ex 11 Justifier que : l'égalité $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)}$ est vraie pour tout réel x du domaine D de définition.
En déduire $S(n) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \tan(2^k x)$ où $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathbb{R}\backslash\{p\frac{\pi}{2^k} / p \in \mathbb{Z}$ *et* $k \in \mathbb{N}\}$.

Ex 12 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(a) = \prod_{k=0}^{n} cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$. Calculer $sin\left(\frac{a}{2^n}\right)P_n(a)$. En déduire la limite de $P_n(a)$ quand $n \to +\infty$.

Ex 13 **1.** Exprimer $cos(4x)$ en fonction de $cos(x)$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ tel que : $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Exprimer α en fonction de $Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

3. Montrer que : $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$. En déduire la valeur de α.

Ex 14 Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \sqrt{\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$ et $g(x) = \frac{1}{cos(x)cos(7x) - cos(3x)cos(5x)}$

Ex 15 Pour tout réel x de $[0,\pi]$, $sin^2x \leq \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$ et pour tout x de $]0,\pi/2[$, $\sin(x) > \frac{2}{\pi}x$.

Ex 16 Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
2. En déduire la limite de S_n quand $n \to +\infty$.

Ex 17 1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \cos(3t) = 4\cos^3(t) - 3\cos(t)$. *En déduire* $I = \int_0^{\pi} cos^3\left(\frac{x}{2}\right) dx$

2.Calculer $J = \int_0^{\pi} sin(mx)\sin(px)\, dx$ où $(m,p) \in \mathbb{N}^2$.

Ex 18 **a.** Rappeler $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ en fonction du paramètre réel a *et* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$.

b. Montrer que $\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\tan^2(x)}$.