Préparation du DC 4

I COURS à savoir énoncer ou retrouver rapidement :

FORMULES DE TRIGONOMETRIE Soit θ , a et b , p et q des réels.

1. $|sin\theta| \leq 1$ et $|cos\theta| \leq 1$
2. $cos^2\theta + sin^2 = 1$
3. $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$
4. $\cos(-\theta) = cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
5. $\cos(\pi + \theta) = -cos\theta$ et $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$ et $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(\theta + k\pi) = (-1)^k\cos(\theta)$ et $\sin(\theta + k\pi) = (-1)^k\sin(\theta)$
6. $\cos(\pi - \theta) = -cos\theta$ et $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
7. $cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = sin\theta$ et $sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta$
8. $cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -sin\theta$ et $sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = cos\theta$
9. $cosb = cosa \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ b = a + 2k\pi\ ou\ b = -a + 2k\pi$
10. $sinb = sina \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ b = a + 2k\pi\ ou\ b = \pi - a + 2k\pi$
11. Si $a \in [-1; 1]$, alors $Arccos(a)$ est le seul réel de $[0; \pi]$ $dont\ le\ cosinus\ vaut\ a.$
12. Si $b \in [-1; 1]$,alors $Arcsin(b)$ est le seul réel de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $dont\ le\ sinus\ vaut\ b.$
13. $cosx = sina \Leftrightarrow cosx = cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \Leftrightarrow$
14. $\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a + b) = \sin(a)cos(b) + \sin(b)cos(a) \end{cases}$
15. $\begin{cases} \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{cases}$
16. $\begin{cases} \cos(2\theta) = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta \\ \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$

<u>Si, pour chaque égalité, toutes les tangentes qui apparaissent dans la formule existent</u> , on a la relation :

17. $\forall k \in \mathbb{Z},\ \tan(\theta + k\pi) = \tan(\theta)$ valable dès que $\tan(\theta)$ existe.
18. $\tan(-\theta) = -tan\theta$ valable dès que $\tan(\theta)$ existe.
19. $1 + tan^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$ valable dès que $\tan(\theta)$ existe.
20. $tan(b) = tan(a) \Leftrightarrow il\ existe\ k \in \mathbb{Z}\ tq :\ b = a + k\pi$.
21. $\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ valable dès que $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a + b)$ existent.
22. $\tan(a - b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$ valable dès que $\tan(a)$, $\tan(b)$ et $\tan(a - b)$ existent.
23. $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ valable dès que $\tan(a)$ et $\tan(2a)$ existent.
24. $tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{tan\theta}$ valable dès que $\tan(\theta)$ et $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ existent.
25. $tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{tan\theta}$ valable dès que $\tan(\theta)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ existent.
26. Si $c \in \mathbb{R}$, alors $Arctan(c)$ est le seul réel de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ $dont\ la\ tangente\ vaut\ c.$

A SAVOIR RETROUVER PAR LE CALCUL OU SUR LE CERCLE TRIGONOMATRIQUE

27. $\begin{cases} cosacosb = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)] \\ sinasinb = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)] \\ sinacosb = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)] \end{cases}$
28. $\begin{cases} cos(p) + cos(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ cos(p) - cos(q) = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ sin(p) + sin(q) = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{cases}$

32. $\cos(b) = a \Leftrightarrow \begin{cases} impossible\ si\ a \notin [-1; 1] \\ b = Arccos(a) + 2k\pi\ \ ou\ b = -Arccos(a) + 2k\pi\ \ si\ a \in [-1; 1] \\ tq\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
33. $\sin(b) = a \Leftrightarrow \begin{cases} impossible\ si\ a \notin [-1; 1] \\ b = Arcsin(a) + 2k\pi\ \ ou\ b = \pi - Arcsin(a) + 2k\pi\ \ si\ a \in [-1; 1] \\ tq\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
34. $\tan(b) = a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/b = Arctan(a) + k\pi$
35. Pour tous réels a et b non tous nuls, il existe toujours un réel θ tel que : $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+b^2}}$.

Si $\theta \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ [\ alors\ \ \theta = arctan\frac{b}{a} + 2k\pi$.

Si $\theta \in]\ \frac{\pi}{2}\ \ + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\ [\ alors\ \theta = \pi + arctan\frac{b}{a}[2\pi]$.

II Exercices à savoir refaire

TD 2 Ex 7 Déterminer les réels a qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R},\ -3 < \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2$.

TD 2 Ex 62 Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{2k+1}{k^3-k^2-4k+4}$.

TD 2 Ex 33 Démontrer que pour tous réels x et y , pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\sqrt[n]{|x \pm y|} \leq \sqrt[n]{|x|} + \sqrt[n]{|y|}$.

TD 3 Ex 2 Résoudre l'équation $\sin(x) - cos(x) > 1$ d' inconnue x réelle.

TD 3 Ex 4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

1. $4cos^2(x) + 2(1+\sqrt{2})\sin(x) - 4 - \sqrt{2} = 0$
2. $\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x) + \sin(8x) + \sin(10x) = 0$.

~~**TD 3 Ex 9** Montrer que pour tout réel x de $[0,\pi]$ et tout entier naturel n , $|\sin(nx)| \leq nsin(x)$.~~

TD 3 Ex 10 Soit n un entier naturel, x un réel et $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

1) Calculer $S_n(x)\ pour\ x \equiv 0[2\pi]$.
2) Soit $x \not\equiv 0[2\pi]$. Linéariser $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(kx)$ et en déduire $S_n(x)$.