DS 1

CALCULATRICE NON AUTORISEE. DUREE 4 HEURES.

Le sujet comporte 2 pages (1 feuille recto-verso). Les quatre exercices sont indépendants.

QUELQUES CONSIGNES :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
- Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

•Vous n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?

•Le raisonnement est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).

•Les liens logiques (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …, ⟺,⟹) sont utilisés et utilisés à bon escient.

•La phrase réponse, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ??), n'hésitez pas à demander au professeur-surveillant.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 6u_n + 2 \\ u_0 = 1 \; et \; u_1 = 2 \end{cases}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 6v_n + 2$.
2. En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.
3. Déterminer l'expression (explicite) de v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression (explicite) de u_n en fonction de n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2. Calcul de $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ par deux méthodes.

Pour tout entier naturel n, on pose : $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$. Dans cet exercice, vous allez démontrer par deux méthodes, le résultat (donné mais non prouvé en classe) suivant : « $T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ». Vous n'avez donc pas le droit d'utiliser ce résultat dans cet exercice.

Par contre, vous pouvez utiliser les résultats (prouvés en classe) donnant $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

A. Première méthode :

Soit n un entier naturel fixé. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

1. Reconnaitre (factoriser) $k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.
2. En déduire S_n.
3. Rappeler, sans démonstration, les valeurs des sommes : $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
4. En déduire l'écriture de S_n en fonction de T_n et n.
5. En déduire que $T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

B. Deuxième méthode

Soit n un entier naturel fixé.

6. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer, en utilisant la formule de Pascal, que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
7. Retrouver $\sum_{k=0}^{n} k$, grâce à la somme précédente. <u>Indication</u> : choisir judicieusement la valeur de p.
8. Déterminer trois entiers a , b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$.
9. Retrouver alors la valeur de T_n (déjà trouvée au $A.5$).

Exercice 3

Notons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}$ et $v_n = (\sqrt{3}-1)^{2n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n v_n$ est un entier naturel que l'on explicitera.
2. Trouver deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\alpha+\beta\sqrt{3}\right)^n et\ v_n = \left(\alpha-\beta\sqrt{3}\right)^n$.
3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers a_n et b_n tels que $u_n = a_n + \sqrt{3}\, b_n$. On exprimera a_{n+1} en fonction de a_n et b_n et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que ces entiers a_n et b_n sont les seuls entiers vérifiant $u_n = a_n + \sqrt{3}\, b_n$.
   d. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes.
   e. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2 - 3\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2 = 1$.
   f. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a_n - \sqrt{3}\, b_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer, en développant $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$, que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
   b. En déduire que 2^{n+1} divise $u_n + v_n$.
   c. En déduire que l'entier $\lfloor u_n \rfloor + 1$ est un multiple de 2^{n+1}.

Exercice 4 Encadrement et limite de somme.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_1^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Déterminer deux entiers a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = \left(a\sqrt{n}+b\sqrt{n+1}\right)^2$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sqrt{k}-\sqrt{k-1} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.
3. En déduire un encadrement de (S_n) puis la limite de la suite (S_n).
4. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$.

Fin.