# Corrigé du DS 1

**Exercice 1**

Soit $(u_n)$ la suite définie par : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 6u_n + 2 \\ u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 2 \end{cases}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que $\forall n, v_{n+1} = 6v_n + 2$.
2. En déduire que $(u_n)$ est strictement croissante.
3. Déterminer l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
4. En déduire l' expression de $u_n$ en fonction de $n$.
5. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

**1.** $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = 7u_{n+1} - 6u_n + 2 - u_{n+1} = 6(u_{n+1} - u_n) + 2 = 6v_n + 2$.

**2.** Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ par récurrence sur $n$.

Init° : $v_0 = u_1 - u_0 = 1 > 0$.

Propag° : Soit $n$ un entier naturel. Je suppose que $v_n > 0$. Alors $v_{n+1} = 6v_n + 2 > 0$.

CCL° : le théorème de récurrence simple permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ $i.e.$ $u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)$ est donc strictement croissante.

**3.** $v$ est donc arithmético-géométrique. Déterminons son expression :

$i)$ Cherchons $L$ tel que $L = 6L + 2$. $L = -\frac{2}{5}$ convient.

$ii)$ Posons $x_n = v_n + \frac{2}{5} = v_n - L$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = v_{n+1} - L = 6v_n + 2 - (6L + 2) = 6(v_n - L) = 6x_n$. Donc la suite $(x_n)$ est géométrique de raison 6.

$iii)$ Alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 6^n x_0 = 6^n \left(v_0 + \frac{2}{5}\right) = 6^n \left(\frac{7}{5}\right)$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 6^n \left(\frac{7}{5}\right) - \frac{2}{5}$.

**4.** $\forall k \in \mathbb{N}, v_k = u_{k+1} - u_k$. Donc , $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(6^k\left(\frac{7}{5}\right) - \frac{2}{5}\right) = 1 + \frac{7}{5}\sum_{k=0}^{n-1} 6^k - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{5} = 1 + \frac{7}{5}\frac{6^n - 1}{6-1} - \frac{2n}{5} = \frac{7}{25}6^n - \frac{2n}{5} + \frac{18}{25}$.

Cette formule est encore vraie pour n=0 car $\frac{7}{25}6^0 - \frac{2\times 0}{5} + \frac{18}{25} = \frac{25}{25} = 1 = u_0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{7}{25}6^n - \frac{2n}{5} + \frac{18}{25}$.

**5.** Alors , $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{7}{25}6^k - \frac{2k}{5} + \frac{18}{25}\right) = \frac{7}{25}\sum_{k=0}^{n} 6^k - \frac{2}{5}\sum_{k=0}^{n} k + \frac{18}{25}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{7}{25}\frac{6^{n+1}-1}{5} - \frac{n(n+1)}{5} + \frac{18}{25}(n+1)$.

**Exercice 2. Calcul de $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$ par deux méthodes.**

**Pour tout entier naturel $n$, on pose : $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.**

A. Soit $n$ un entier naturel fixé. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.

1. Soit $k$ un entier. Reconnaitre (factoriser) $k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.
2. En déduire la valeur de $S_n$.
3. Rappeler la valeur des sommes $\sum_{k=0}^{n} k$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2$.
4. En déduire l'écriture de $S_n$ en fonction de $T_n$ et $n$.
5. En déduire que $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

B. Soit $n$ un entier naturel fixé.

1. Enoncer la formule de Pascal .
2. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Montrer, en utilisant 1., que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Retrouver $\sum_{k=0}^{n} k$, grâce à la somme précédente.
4. Déterminer trois entiers $a$ , $b$ et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}, k^3 = a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1}$.
5. Retrouver alors la valeur de $T_n$ trouvée au $A.5$.

A. Première méthode :

1. $k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = (k+1)^4$.
2. Alors, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^4 - k^4 \underbrace{=}_{\substack{en\ posant \\ u_k = k^4}} \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k \underbrace{=}_{télescopage} u_{n+1} - u_0 = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4$.
3. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = S_n = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 4T_n + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$

   $S_n = 4T_n + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1$
5. Donc, $4T_n = S_n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$

   $4T_n = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) = (n+1)[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] = (n+1)[n^3 + n^2]$
   $= n^2(n+1)^2$

   Ainsi, $T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

B. Deuxième méthode :

1. $\forall(k,p)\in\mathbb{N}^2, \binom{k}{p}+\binom{k}{p+1}=\binom{k+1}{p+1}$.
2. Soit $p\in[\![0,n]\!]$. $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}-\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$.
3. Prenons $p=1$. $\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}=\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$.
4. $a\binom{k}{3}+b\binom{k}{2}+c\binom{k}{1}=\frac{ak(k-1)(k-2)}{6}+\frac{bk(k-1)}{2}+ck=\frac{a}{6}k^3+\left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)k^2+\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c\right)k$.

Donc, pour que $\forall k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, k^3=a\binom{k}{3}+b\binom{k}{2}+c\binom{k}{1}$, il suffit de choisir $a$, $b$ et $c$ tels que : $\begin{cases}\frac{a}{6}=1\\ -\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=0\\ \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=0\end{cases}$ i.e. $\begin{cases}a=6\\ b=6.\\ c=1\end{cases}$

Ainsi, $\forall k\in\mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}, k^3=6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$. Je remarque que cette égalité reste vraie pour $k=1$ ou $2$.

Par suite, $\forall n\geq 1, \sum_{k=1}^{n}k^3=6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3}+6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$.

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{6(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}+\frac{6(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n+1}{4}[n(n-1)(n-2)+4n(n-1)+2n]=\frac{n+1}{4}[n^3+n^2]=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

**Exercice 3** Notons $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\sqrt{3}+1)^{2n}$ et $v_n=(\sqrt{3}-1)^{2n}$.

Notons $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\sqrt{3}+1)^{2n}$ et $v_n=(\sqrt{3}-1)^{2n}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$ . Montrer que $u_nv_n$ est un entier naturel que l'on explicitera.
2. Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\left(a+b\sqrt{3}\right)^n et\ v_n=\left(a-b\sqrt{3}\right)^n$.
3. a. Montrer que pour tout entier naturel $n$, il existe deux entiers $a_n$ et $b_n$ tels que $u_n=a_n+\sqrt{3}\,b_n$. On exprimera $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$ et $b_{n+1}$ en fonction de $a_n$ et $b_n$.
   c. Montrer que ces entiers $a_n$ et $b_n$ sont les seuls entiers vérifiant $u_n=a_n+\sqrt{3}\,b_n$.
   d. En déduire que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont strictement croissantes.
   e. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, \left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2-3\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2=1$.
   f. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=a_n-\sqrt{3}\,b_n$.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$ .
   a. Montrer, en développant $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
   b. En déduire que $2^{n+1}$ divise $u_n+v_n$.
   c. En déduire que $2^{n+1}$ divise l'entier $\lfloor(\sqrt{3}+1)^{2n}\rfloor+1$.

1. $u_nv_n=(\sqrt{3}+1)^{2n}(\sqrt{3}-1)^{2n}=[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)]^{2n}=[3-1]^{2n}=2^{2n}=4^n\in\mathbb{N}$.
2. $u_n=(\sqrt{3}+1)^{2n}=, u_n=\left((\sqrt{3}+1)^2\right)^n=\left((3+2\sqrt{3}+1)\right)^n=\left(4+2\sqrt{3}\right)^n$ . De même, $v_n=\left((\sqrt{3}-1)^2\right)^n=\left((3-2\sqrt{3}+1)\right)^n=\left(4-2\sqrt{3}\right)^n$. Donc $a=4$ et $b=2$ conviennent.
3. a. Posons $H(n)$ la propriété : « il existe deux entiers $a_n$ et $b_n$ tels que $u_n=a_n+\sqrt{3}\,b_n$ ».

**Init° :** $u_0=1=1+0\sqrt{3}$. Donc, $a_0=1$ et $b_0=\sqrt{3}$ conviennent.

**Propag° :** Soit $n$ un entier naturel. Je suppose que $H(n)\ est\ vraie$. Sous cette hypothèse, prouvons $H(n+1)$. Je cherche donc deux entiers $a_{n+1}\ et\ b_{n+1}$ tels que : $u_{n+1}=a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}$

Nous avons : $u_{n+1}=(\sqrt{3}+1)^{2(n+1)}=(\sqrt{3}+1)^{2n}(\sqrt{3}+1)^2=u_n\times(\sqrt{3}+1)^2\overset{car\ H(n)vraie}{\widehat{=}}\left(a_n+\sqrt{3}\,b_n\right)\left(4+2\sqrt{3}\right)$

Donc, $u_{n+1}=4a_n+6b_n+(2a_n+4b_n)\sqrt{3}$.

Posons $a_{n+1}=4a_n+6b_n$ et $b_{n+1}=2a_n+4b_n$. Alors, comme $a_n\in\mathbb{N}$ et $b_n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}\in\mathbb{N}$ et $b_{n+1}\in\mathbb{N}$ ; de plus, $u_{n+1}=a_{n+1}+\sqrt{3}\,b_{n+1}$.Donc $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ conviennent. Ainsi, $H(n+1)$ est vraie dès que $H(n)$ est vraie.

**CCL° :** le théorème de récurrence simple assure que pour tout entier $n$, $H(n)\ est\ vraie$

b.Fixons $n$ entier naturel. Soit $x$ et $y$ deux autres entiers tels que $u_n=x+y\sqrt{3}$.

Alors $a_n+\sqrt{3}\,b_n=u_n=x+\sqrt{3}\,y$. Donc $a_n-x\overset{**}{\widehat{=}}\sqrt{3}(y-b_n)$. Si $(y-b_n)\neq 0$ alors $\sqrt{3}(y-b_n)$, étant le produit d'un irrationnel et d'un entier, est un irrationnel alors que $a_n-x$ est un entier donc l'égalité $**$ est impossible. J'en déduis que : $y-b_n=0\ i.e.\ y=b_n$ et par suite en remplaçant dans $**$, j'obtiens$a_n-x=0$i.e. $x=a_n$. D'où l'unicité de l'écriture $u_n=a_n+\sqrt{3}\,b_n$ avec $a_n et\ b_n$ entiers.

D'après ce qui précède, les suites des réels $a_n\ et\ b_n$ sont entièrement définies par :

$a_0=1$ et $b_0=0$ et pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1}=4a_n+6b_n$ et $b_{n+1}=2a_n+4b_n$.

d. On montre facilement par récurrence simple que $\forall n, a_n>0\ et\ b_n>0$.

Par suite, $\forall n, a_{n+1} - a_n = 3a_n + 6b_n > 0$ $et$ $b_{n+1} - b_n = 2a_n + 3b_n > 0$. Les suites $a$ et $b$ sont donc strictement croissantes.

e. Montrons que la suite $T = \left(\left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2 - 3\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

$$T_{n+1} - T_n = \left(\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}\right)^2 - 3\left(\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}\right)^2 - \left[\left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2 - 3\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2\right] = \left(\frac{4a_n + 6b_n}{2^{n+1}}\right)^2 - 3\left(\frac{2a_n + 4b_n}{2^{n+1}}\right)^2 - \left[\left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2 - 3\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2\right]$$

$$= \left(\frac{2a_n + 3b_n}{2^n}\right)^2 - 3\left(\frac{a_n + 2b_n}{2^n}\right)^2 - \left[\left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2 - 3\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2\right] = \frac{1}{2^{2n}}\left[(2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 - {a_n}^2 + 3b_n^2\right]$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\left[4a_n^2 + 9b_n^2 + 12a_nb_n - 3a_n^2 - 12b_n^2 - 12a_nb_n - {a_n}^2 + 3b_n^2\right] = 0.$$

La suite $T$ est donc constante. Elle est alors constante égale à l'un de ces termes, par exemple $T_0$. Or, $T_0 = 1^2 - 3 \times 0^2 = 1$. J'en conclus que $\forall n, T_n = \left(\frac{a_n}{2^n}\right)^2 - 3\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2 = 1$. Par conséquent, $\forall n,\ a_n^2 - 3b_n^2 = 4^n$.

f. $u_nv_n = 4^n$ donc $u_n \neq 0$ $et$ $v_n \neq 0$ . Par suite, $v_n = \frac{4^n}{u_n} = \frac{4^n}{a_n + \sqrt{3}\,b_n} = \frac{4^n(a_n - \sqrt{3}\,b_n)}{(a_n + \sqrt{3}\,b_n)(a_n - \sqrt{3}\,b_n)} \frac{4^n(a_n - \sqrt{3}\,b_n)}{a_n^2 - 3\,b_n^2} = \frac{4^n(a_n - \sqrt{3}\,b_n)}{4^n} = a_n - \sqrt{3}\,b_n$.

4.a. $\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}(-\sqrt{3})^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k(1 + (-1)^k)$

$$= \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k}\sqrt{3}^k 2 = 2\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-2p}\sqrt{3}^{2p} = 2\underbrace{\left[\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \binom{n}{2p} 2^{n-2p}3^p\right]}_{=a\in\mathbb{N}.}.$$

J'en conclus que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

4.b. $u_n + v_n = (\sqrt{3}+1)^{2n} + (\sqrt{3}-1)^{2n} =$

$$= \left((\sqrt{3}+1)^2\right)^n + \left((\sqrt{3}-1)^2\right)^n = (4+2\sqrt{3})^n + (4-2\sqrt{3})^n = 2^n(2+\sqrt{3})^n + 2^n(2-\sqrt{3})^n$$

$$= 2^n\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] = 2^n\left[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] = 2^{n+1}a.$$

Ainsi, $2^{n+1}$ divise $u_n + v_n$ .

4.c.Soit $n \in \mathbb{N}^*, u_n + v_n = 2^{n+1}\,a$ ( où $a$ est l'entier défini au 4.a) donc, $u_n + 1 = \underbrace{2^{n+1}a}_{\in\mathbb{N}} + (1 - v_n)$. Comme $0 < \sqrt{3} - 1 < 1, 0 < v_n <$ 1 et alors $0 < 1 - v_n < 1$. Par conséquent, $\lfloor u_n + 1\rfloor = 2^{n+1}\,a$. Ainsi, $\lfloor u_n\rfloor + 1 = 2^{n+1}\,a$ avec $a \in \mathbb{N}$. J'en conclus que :
$2^{n+1}$divise $\lfloor (\sqrt{3}+1)^{2n} \rfloor + 1$.

**Exercice 4 : Une somme.**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_1^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Déterminer deux entiers $a$ et $b$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n + 1 - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = \left(a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}\right)^2$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comparer $\sqrt{k} - \sqrt{k-1},\ \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ et $\frac{1}{2\sqrt{k}}$.
3. En déduire un nouvel encadrement de $(S_n)$ puis la limite de la suite $(S_n)$.
4. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)$.

1. $2n + 1 - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = n + (n+1) - 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)^2$. Donc, $a = 1$ $et$ $b = -1$ conviennent.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comparons $\sqrt{k} - \sqrt{k-1},\ \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ et $\frac{1}{2\sqrt{k}}$.

$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \underset{\substack{car\\ \sqrt{k-1}\le\sqrt{k}}}{\ge} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$ et $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \underset{\substack{car\\ \sqrt{k+1}\ge\sqrt{k}}}{\le} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} = \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Ainsi, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \le \frac{1}{2\sqrt{k}} \le \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ .

3. Par conséquent, $\sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \le \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{k}} \le \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. Les deux sommes de droite et gauche étant télescopiques, j'en déduis que : $\sqrt{n+1} - \sqrt{1} \le S_n \le \sqrt{n} - \sqrt{0}$ . Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - 1 \le S_n \le \sqrt{n}$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - 1 = +\infty$, $le$ théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\sqrt{n} > 0$, $\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} \le S_n \le 1$. Or, $\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$, $le$ théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 1$.