Programme de colle 4

CHAP 2 : Inégalités et premières fonctions réelles.

VI Fonctions polynomiales réelles.

- Fonction polynomiale de degré 2 : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b,et c réels et $a \neq 0$.
  - Factorisation dans $\mathbb{R}$, racine(s) réelle(s) et signe. Allure de la courbe.
  - Somme et produit des racines réelles.
  - Résolution d'un système NON linéaire de la forme $\begin{cases} x+y=\alpha \\ xy=\beta \end{cases}$.
  - Méthodes de factorisation :
    - ✓ Factorisation évidente (exemples : $c = 0$ ou identité remarquable) .
    - ✓ Recherche d'une racine x_1 évidente parmi les réels $-2, -1, 0, 1, 2$ puis de l'autre racine x_2 en utilisant $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ou $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
    - ✓ Recherche de deux réels x_1 et x_2 (souvent entiers) tels que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ou $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.
    - ✓ Utilisation de Δ ....
- Fonction polynomiale de degré n (**résultats admis**)
  - Définition (forme développée) , coefficients, degré, racines
  - Théorème de division euclidienne polynomiale.
  - Théorème de factorisation connaissant une racine.

VII Fonctions rationnelles réelles.

- Définition comme quotient $\frac{A}{B}$ de deux fonctions polynomiales A et B. Définition de la partie entière : quotient de la division euclidienne de A par B. Ecrire que $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ où $degR < degB$
- Décomposition en éléments simples de $\frac{R}{B}$ avec où $0 \leq degR < degB \leq 4$.
- Application au calcul d'une somme.

CHAP 3 : Trigonométrie.

I Fonctions paires, impaires et périodiques.

- Définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire et d'une fonction périodique.
- Propriétés :
  - fonctions impaires : $f(0) = 0$ si $f(0)$ existe.
  - fonctions périodiques : une fonction T-périodique, où $T \in \mathbb{R}^{+*}$, est aussi kT −périodique pour tout $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k \in \mathbb{Z}$ lorsque Df n'est ni minoré, ni majoré)
- Réduction du domaine d'étude des propriétés des fonctions paires , impaires ($f(0) = 0$ si $f(0)$ existe) ou périodiques.
- Produit, quotient, combinaison linéaire des deux fonctions paires (resp. impaires, resp . périodiques).
- Relation entre la courbe de f et la courbe de g dans les cas suivants (a désigne un réel non nul) :
  - $g(x) = f(x) + a$
  - $g(x) = f(a + x)$
  - $g(x) = f(-x)$
  - $g(x) = -f(x)$
  - $g(x) = |f(x)|$
  - $g(x) = f(a - x)$
  - $g(x) = af(x)$
  - $g(x) = f(ax)$

II Sinus et cosinus

- Définition du sinus et cosinus d'un réel à partie du cercle trigonométrie.
- Premières formules de trigonométrie liées aux définitions de cos, sin.
- Valeurs particulières.
- Equations et inéquations trigonométriques ; définition de $Arccos(m)$ et de $Arcsin(m)$ d'un réel $m \in [-1,1]$.
- Autres formules de trigonométrie : formules d'addition, d'angle double.
- Formules à savoir retrouver : formules de factorisation et de linéarisation.
- Si a et b sont deux réels tq $a^2 + b^2 = 1$ alors il existe un réel θ (unique si $\theta \in]-\pi; \pi]$) tel que $cos\theta = a$ et $sin\theta = b$. Savoir exprimer θ. En fonction de $Arccos(a)$ ou $Arcsin(b)$ ou $Arctan\left(\frac{b}{a}\right)$)
- Méthode pour écrire $Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ sous la forme $Ccos(\omega t + \varphi)$.
- Fonctions sinus et cosinus: parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.

III Tangente

- Définition de la tangente d'un réel distinct des valeurs $\frac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$. Représentation.
- Valeurs particulières.
- Formules de trigonométrie dont formules d'addition, d'angle double, relation entre $tan^2(x)$ et $cos^2(x)$ puis entre $tan(x)$ et $tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
- Equations et inéquations trigonométriques ; définition de $Arctan(m)$ d'un réel m.
- Fonction tangente : parité, périodicité, continuité, dérivabilité, courbe.

CHAP 4 Nombres complexes

I Forme algébrique

- Ensemble $\mathbb{C}$:
  - définition, forme algébrique (existence et unicité) , partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur
  - Règles de calculs : égalité de deux complexes, parties réelle et imaginaire d'une somme de nombres complexes.
- Représentation d'un nombre complexe :
  - Définition de l'affixe d'un point, d'un vecteur, images ponctuelle et vectorielle d'un complexe
  - Affixe de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, affixe de $\overrightarrow{MM'}$ .Caractérisation par les complexes de deux points symétriques par rapport à O .
- Conjugué d'un nombre complexe :
  - définition et image ponctuelle du conjugué
  - propriétés :
    - ✓ écriture des parties réelle et imaginaire de z à l'aide de z et de son conjugué
    - ✓ caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur grâce au conjugué.
    - ✓ conjugué d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes
    - ✓ le produit d'un complexe par son conjugué.

II Forme trigonométrique

- Module : 4 définitions équivalentes : par les parties réelle et imaginaire - par le conjugué - par une distance - par une norme de vecteur .

  Propriétés du module :
  - module d'un réel
  - comparaison entre $|Re(z)|$ et $|z|$, entre $|Im(z)|$ et $|z|$
  - module de l'inverse d'un complexe, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance de complexes
  - module de $\frac{z}{|z|}$
  - inégalités triangulaires, cas d'égalité dans la première inégalité triangulaire.
  - Applications « géométriques » Distance entre deux points . Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
- Exponentielle imaginaire.
  - Définition
  - Caractérisation (écriture) des complexes de module 1.
  - Propriétés :
    - ✓ égalité de deux exponentielles imaginaires
    - ✓ produit et quotient d'exponentielle imaginaire
    - ✓ formules de Moivre
    - ✓ Formule d'Euler
    - ✓ Identités du losange.
- La forme trigonométrique et les arguments d'un nombre complexe non nul :
  - Définition (géométrique) d'un argument d'un complexe non nul
  - Forme trigonométrique d'un complexe non nul : existence et unicité.
  - Caractérisation de l'égalité de deux complexes non nuls.
  - Forme quasi-trigonométrique
  - Propriétés des arguments : $arg(zz')$, $arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $arg\left(\frac{z'}{z}\right)$, $arg(z^n)$ où $n \in \mathbb{Z}$, $arg(\bar{z})$.
- Applications « algébriques »
  - Identités du losange généralisées : $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ et $e^{i\theta} - e^{i\theta'}$.
  - Quotient et puissance de complexes
  - Linéarisation d' un produit de sinus et cosinus
  - Calcul de $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$, $\sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

Enoncer et démontrer les résultats suivants:

1) **Relations entre $tan^2(x)$ et $cos^2(x)$ puis entre $tan(x)$ et $tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.**
2) **La formule d'addition de la fonction tangente**
3) $\forall (z, z^2) \in \mathbb{C}^2, \frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z)\ et\ \frac{z+\bar{z}}{2i} = Im(z),\quad \overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'}\ \ et\ \ \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ **et si** $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.
4) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ |z \times z'| = |z| \times |z'|$ **et si** $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\ \ et\ \ \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$.
5) **Les deux inégalités triangulaires:** $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \big||z| - |z'|\big| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$ **.**
6) **Formule d'Euler et identités du losange.**

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.