CORRIGE DL 2

Ex 1 A. Cas particulier : Soit $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\binom{k+p}{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - 1\big)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. En déduire la limite de la suite (S_n) quand $n \to +\infty$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$(k+p+1)u_{k+1} - (k+1)u_k = (k+p+1)\frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1)\frac{1}{\binom{k+p}{k}} = (k+p+1)\frac{1}{\binom{k+1+p}{k+1}} - (k+1)\frac{1}{\binom{k+p}{k}}$

$= (k+p+1)\frac{1}{\frac{(k+1+p)!}{p!(k+1)!}} - (k+1)\frac{1}{\frac{(k+p)!}{p!k!}} = (k+p+1)\frac{p!(k+1)!}{(k+1+p)!} - (k+1)\frac{p!k!}{(k+p)!} = \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} - \frac{p!(k+1)!}{(k+p)!} = 0$.

Donc, $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$.

2. On a : $(k+p+1)u_{k+1} = (k+1)u_k$ donc $(k+2)u_{k+1} - (k+1)u_k = (1-p)u_{k+1}$.

Par conséquent, $\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}[(k+2)u_{k+1} - (k+1)u_k]}_{somme\ télescopique} = \sum_{k=0}^{n-1}(p+1)u_{k+1} = (1-p)\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}$.

J'en déduis que : $(n+1)u_n - u_0 = (1-p)\underbrace{\sum_{k=1}^{n}u_k}_{S_n}$.

Ainsi, $S_n = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - u_0\big) = \frac{1}{1-p}\big((n+1)u_n - 1\big)\ car\ u_0 = \frac{1}{\binom{p}{0}} = \frac{1}{1} = 1$.

3. $Soit\ n \in \mathbb{N}. u_n > 0\ et\ \frac{u_n(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}\frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{n!p!}{(n+p)!}\frac{(n+1)(n+2)}{p!} = \frac{(n+2)!}{(n+p)!} \leq 1$ car $p \geq 2$ donc $0 < (n+2)! \leq (n+p)!$. Par conséquent, en multipliant l'inégalité par u_n, j'obtiens : $0 < u_n \leq \frac{p!}{(n+1)(n+2)}$. Par suite, $0 < (n+1)u_n \leq \frac{(n+1)p!}{(n+1)(n+2)} = \frac{p!}{(n+2)}$. Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{p!}{n+2} = 0 = \lim_{n\to+\infty} 0$, le théorème des gendarmes assure que $\lim_{n\to+\infty}(n+1)u_n = 0$. Alors en passant à la limite dans l'égalité obtenue à la question 2., je peux conclure que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{p-1}$.

Ex 2

1. Montrer que : pour tous réels $a,\ b,\ c\ et\ d,\ |ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.
2. Montrer que : $|ac+bd| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ sietssi $((a,b) = (0,0)\ ou\ \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $c = ka\ et\ d = kb)$
3. Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 = 1\}$ et $A = \{x+2y/(x,y) \in C\}$. Montrer que A est bornée et admet un maximum et un minimum.

1. Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, $|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

Prenons $n = 2, a_1 = a,\ a_2 = b, b_1 = c\ et\ b_2 = d$. Alors, l'inégalité de Cauchy Schwarz donne : $|ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$.

2. Rappelons le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$,

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \text{ sietssi } \begin{cases} \forall k, a_k = 0 \\ ou \\ \exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que: } b_k = \lambda a_k \end{cases}.$$

Ici, ce cas d'égalité s'écrit : $|ac+bd| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ sietssi $\begin{cases} a = b = 0 \\ ou \\ \exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : c} = \lambda\text{a et d} = \lambda\text{b} \end{cases}$

sietssi $((a,b) = (0,0)\ ou\ \exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(c,d) = \lambda(a,b)$.

3. $A = \{x+2y/(x,y) \in \mathbb{R}^2\ et\ x^2+y^2 = 1\}$. <u>Montrons que A est bornée.</u>

Soit $t \in A$. Alors il existe x et y réels tels que $t = x+2y\ et\ x^2+y^2 = 1$.

Alors $|t| = |1x+2y| \overset{d'après\ 1}{\leq} \sqrt{1^2+2^2} \times \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \times \sqrt{1} = \underbrace{\sqrt{5}}_{indépendant\ de\ t}$. Autrement dit, $-\sqrt{5} \leq t \leq \sqrt{5}$.

Donc A est bornée et $\sqrt{5}$ majore $A\ et -\sqrt{5}$ minore A.

De plus d'après 2, $|1x+2y| = \sqrt{1^2+2^2} \times \sqrt{x^2+y^2}$ sietssi $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $x = \lambda \times 1$ et $y = \lambda \times 2$.

Cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $x = \lambda \times 1$ et $y = \lambda \times 2$ et $x^2+y^2 = 1$.

$\lambda^2 + (2\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow 5\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Prenons $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}},\ x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Alors $t = x+2y = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \in A\ \ (car\ x^2+y^2 = 1)$. Donc le majorant $\sqrt{5}$ de A appartient à A. J'en conclus que $\sqrt{5} = \max(A)$.

Prenons $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}},\ x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Alors $t = x+2y = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5} \in A\ \ (car\ x^2+y^2 = 1)$. Donc le minorant $-\sqrt{5}$ de A appartient à A. J'en conclus que $-\sqrt{5} = \min(A)$.

Ex 3 Soit $A = \left\{\frac{q}{2^n} / (n,q) \in \mathbb{N}^2 et\ 0 \leq q \leq 2^n\right\}$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists!\ q \in [\![0, 2^n]\!] / \ 0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$.
2. En déduire qu'entre deux réels de $[0,1]$,il y a toujours un élément de A.

1. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. je cherche $q \in [\![0, 2^n]\!]$ tel que : $0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n}$. Soit q un entier.

$0 \leq x - \frac{q}{2^n} < \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow 0 \leq 2^n x - q < 1 \Leftrightarrow q \leq 2^n x < q + 1 \Leftrightarrow q = \lfloor 2^n x \rfloor$.

Donc, $\lfloor 2^n x \rfloor$ est la seule solution possible, mais cette solution est-elle comprise entre 0 et 2^n ?

Je sais que $x \in [0,1]$ donc $0 \leq 2^n x \leq 2^n$ et par suite, $0 \leq \lfloor 2^n x \rfloor \leq 2^n x \leq 2^n$. Ainsi, $q = \lfloor 2^n x \rfloor$ convient et est le seul entier qui convienne.

2. Soit x et y deux réels tels que $0 \leq y < x \leq 1$. Posons $a = x - y$. Cherchons un entier naturel n tel que $\frac{1}{2^n} < a$.

$\frac{1}{2^n} < a \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car \\ \frac{1}{2^n} > 0\ et\ a > 0}} 2^n > \frac{1}{a} \Leftrightarrow nln(2) > \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \Leftrightarrow n > -\frac{\ln(a)}{\ln(2)}$. Prenons $n_0 = \max\left(\left\lfloor -\frac{\ln(a)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1; 0\right)$. Alors $\frac{1}{2^{n_0}} < a$.

D'après 1., il existe un unique $q_0 \in [\![0, 2^{n_0}]\!]$ tel que : $0 \leq x - \frac{q_0}{2^{n_0}} < \frac{1}{2^{n_0}}$. Et par suite, $0 \leq x - \frac{q_0}{2^{n_0}} < a = x - y$.

Alors, en soustrayant x de part et d'autre de cette inégalité puis en multipliant cette inégalité par -1, nous obtenons : $y < \frac{q_0}{2^{n_0}} \leq x$.

Ainsi, $\frac{q_0}{2^{n_0}}$ est un élément de A compris entre x et y.