**SUP PCSI 2024-2025 Mathématiques Chapitre 4**

**Nombres complexes**

**I Premières définitions.**

1. **Définition de ℂ**

**1Théorème (admis) :** Il existe un unique ensemble, noté ℂ, vérifiant :

 ℂ contient ℝ .

ℂ est muni de deux opérations et prolongeant celles de ℝ et possédant les mêmes propriétés (associativité, commutativité, éléments neutres, symétrique et inverse, distributivité, intégrité).

 ℂ contient un élément noté tel que : .

 Tout élément s’écrit de manière unique sous la forme (dite algébrique) où sont réels.

Tout élément de ℂ est appelé un nombre complexe et ℂ est appelé le corps des complexes ou l’ensemble des nombres complexes.

**2NB :** Soient où et réels deux complexes,

* est l'opposé de
* non nulalorsounon nuls(car est la seule ecriture de 0 sous la forme ) alors

 est l'inverse de

*
* et . Les règles de calcul sur les puissances s’un nombre complexe sont les mêmes que celles sur les réels.
* Soit

**3Sommes et produits finis de complexes** : Soit des nombres complexes.

 et

**En particulier les identités remarquables sont valables dans**

**4** Une différence essentielle entre ℝ et ℂ : ℝ est totalement ordonné mais pas ℂ. Le signe entre deux complexes ne veut rien dire.

**5Exercice corrigé :** Soit un complexe. Résoudre d' inconnue complexe

Ainsi,

1. **Forme algébrique**

**6Définition  :** Soit un nombre complexe. Alors il existe deux uniques réels et tels que .

 **est appelée la forme algébrique de**

 est appelé **la partie réelle de et noté** et est appelé **la partie imaginaire de et noté .**

**7NB  :** ℝ est l’ensemble des complexes de la forme tel que réel.

**8**De **l’unicité de la forme algébrique, je peux énoncer :**Soit et deux nombres complexes.

**9Définition** **:** Le complexe est dit **imaginaire pur** lorsque est de le forme tel que réel (autrement dit, lorsque sa partie réelle est nulle) . On note  **l’ensemble des imaginaires purs** . sont des sous-ensembles de ℂ.

**NB :** Soit est réel si est pair etest imaginaire pur siest impair

**9bisExercices corrigés:** 1)Ecrire sous sa forme algébrique.

.

2) Soit un entier naturel et . Montrer que est un entier multiple de .

. Donc est un entier multiple de .

De l’unicité de la forme algébrique : (unicité des parties réelle et imaginaire de chaque complexe) découlent les **propriétés** suivantes :

**10propriétés :** Soient et deux nombres complexes.

1. si et ssi .
2. est réel si et ssi si et ssi .
3. imaginaire pur si et ssi si et ssi

**10bisProposition :**

* et
* Si alors et.

**Généralisation** : Si les sont réels et les sont des complexes alors

et

**Démo** : Ecrivons et sous forme algébrique : et . Alors par associativité et distributivité,

 . Donc, et

et.

**11ATTENTION :** en général,

1. **Interprétation géométrique**

**12**Désormais le plan géométrique P est muni d’un repère orthonormé direct .

Alors,

1. tout vecteur de P s’écrit de manière unique sous la forme où et réels(sous la forme d’une combinaison linéaire de ), est le couple des composantes (ou coordonnées) de dans la base .
2. tout point de P est associé à un unique couple de réels tels que et ce couple est appelé le couple de coordonnées de dans le repère

**13 Définition**

* A tout point de P de coordonnées on associe le complexe . Ce complexe est alors appelé **l’affixe de , notée**  et **l’image ponctuelle de**  . On notera souvent .
* De même, à tout vecteur de de composantes , on associe le complexe Ce complexe est alors appelé l’affixe de , notée et **l’image vectorielle de**  . On note souvent .
* Réciproquement, à tout complexe , on associe le point de P de coordonnées et le vecteur .

**14NB  :** Pour tout point de P,.

**15Propriétés :** Soit deux points de P, deux vecteurs de P et réels.



1. est sur l’axe des abscisses appelé l’axe réel **sietssi** est réel.
2. est sur l’axe des ordonnées **sietssi** est imaginaire pur.

Cet axe des ordonnées est d’ailleurs appelé **axe imaginaire**.

1. sont symétriques par rapport à O sietssi sietssi .
2. i.e. .
3. i.e. .

**Démo :** 1. est sur l’axe des abscisses appelé l’axe réel **sietssi** l’ordonnée de est nulle **sietssi** réelle.

1. est sur l’axe imaginaire **sietssi** l’abscisse de est nulle **sietssi**  **sietssi**  est imaginaire pur.
2. sont symétriques par rapport à O **sietssi** abscisses de et sont opposées et leurs ordonnées aussi sietssi .
3. Soit et .

Alors )(+.

Donc, .

1. .
2. **Conjugué**

**16Définition** : Soit où réels. est le complexe appelé le **conjugué de**

**17Remarques** :1)en physique est noté

2)Le point d’affixe est le symétrique par rapport à l’axe des abscisses du point d’affixe Par conséquent,

**18Prop**  sont symétriques par rapport à l’axe des abscisses **sietssi**

**19Propriétés** Soit deux complexes.

1.
2. sietssi .
3. sietssi .
4. .
5. et et .
6. Si
7. Généralisation : et et

**19bisExercice corrigé :** Trouver tous les complexes tels que .

Ainsi, .

**II Forme trigonométrique.**

1. **Module**

**20Définition  :** Soit un nombre complexe. Le module de , noté , est le réel positif défini par :

 où .

**21Théorème**  Alors, .

Ainsi,

**22Description de lieux géométriques** Soit et deux points d’affixe le point d'affixe et un réel strictement positif **. On note**  le cercle de centre et de rayon et la médiatrice du segment

* P /P/ }
* P /}.

**23Exercice corrigé** : Décrire géométriquement ={/ et .

1. Ainsi,
2. . Ainsi,

**24Propriétés** Soient deux complexes d’images respectives .

 Si est un réel alors le module de est égal à la valeur absolue de .

 **est un réel positif et et .**

**si et ssi .**

**4).**

 **(formule permettant d’obtenir la forme algébrique de ).**

 **et .**

 **Première inégalité triangulaire :**

**et son cas d’égalité : si et ssi**

 **si et ssi sont sur une même demi-droite d’origine O.**

**Deuxième inégalité triangulaire :   .**

**Généralisation : et et**

**24bisConséquences**: ● s

 ● est de module 1.

 **24ter** **Exercice corrigé** : Soit . Montrer que si z est racine de alors .

Supposons que soit une racine de . Alors . Par suite, en appliquant la 1ère Inégalité triangulaire,

 Donc,

Posons . Etudions pour savoir où elle est négative. est polynomiale donc dérivable sur Et Donc

Comme est croissante sur et est strictement positive sur . Par suite, Alors, comme je peux conclure que .

. D’où le tableau des variations de suivant :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

1. **Complexes de module 1**

**25Introduction –Définition :** Soit un point du cercle trigonométrique et un réel tel que : .

 D’après le cours de trigonométrie, est le couple des coordonnées de dans le repère

Donc, Alors est alors appelé un **argument** de

**26Définition :** Pour tout réel , on pose . est appelée **l’exponentielle imaginaire** d’argument .

**27Valeurs particulières  :**

**28Caractérisation :** Les complexes de la forme sont les affixesdes points du cercle trigonométrique. Les complexes de module 1 sont les complexes de la forme . On note  **l’ensemble des complexes de module 1.**

**29Propriétés**Soient deux réels.

1. si et ssi (deux arguments d’une même exponentielle imaginaire sont égaux modulo .
2. .
3. et
4. **Formules d’Euler** : et
5. **Identités du Losange** : et
6. **Formule de Moivre** :, ie

**Conséquences :** toute puissance, tout produit fini et tout inverse et tout conjugué de complexes de module 1 est un complexe de module 1. On dit que est stable par produit et par passage à l’inverse et par passage au conjugué.

**30bisExercice corrigé**: Soit et . Montrer que : .

Comme posons Alors.

1. **Arguments et forme trigonométrique d’un complexe non nul**

**31Définition**: Soit un nombre complexe non nul affixe du point et du vecteur . Tout réel tel que :

 est appelé **un argument de** On noteun argument quelconque de .

**32Conséquences immédiates :**

Soient deux complexes non nuls d’images respectives et . Soit un argument de

1. Soit est un argument de **sietssi** .

Autrement dit, **les arguments de sont tous les réels de la forme tel que**

1. sont sur une même demi-droite d'origine
2. . De même, **sietssi** .
3. . Et, .

**33Théorème et définition :** Tout complexe non nul s’écrit sous la forme .

Cette écriture de est  **l**a forme trigonométrique ou forme exponentielle de .



**35NB:**Soit

.

**36Théorème :** Soit un nombre complexe non nul. Soit un réel strictement positif et un réel. Alors,

 sietssi arg(et

Dans ce cas, est un couple de coordonnées polaires du point d’affixe .

**34Interprétation géométrique :**

Si alors =où .

**37Théorème :** Soient deux complexes non nuls. sietssi .

**38Méthode pour passer la forme algébrique à la forme trigonométrique:** Soit . Comme est de module 1 i.e.il existe un réel tq . Alors, pour obtenir la forme trigonométrique de :

1. Mettre en facteur dans . L’autre facteur est nécessairement est un argument de .
2. Reconnaitre .

**39Exemples**

●

●

● et

●. Donc

●Notons un Alors, . Donc

**40Relation forme trigonométrique et forme algébrique** Soit un complexe non nul **.** Alors s’écrit sous forme algébrique ET sous forme trigonométrique : =

Par unicité de la forme algébrique : et . De plus,

Donc , et et alors

 et si alors

**41Définition perso  :** j’appelle **forme quasi-trigonométrique** toute écriture de de la formeavec et réels. On obtient une telle forme lorsque l’on applique, par exemple, les identités du Losange. Dans ce cas, si alors la forme trigonométrique de est . Une forme quasi-trigo suffit bien souvent !! Elle est très utile pour obtenir sous forme (quasi-)trigo des produits, quotients ou puissances de nombres complexes. Cette forme quasi-trigonométrique permet aussi d’obtenir la forme algébrique  . Il suffit pour l’obtenir d’écrire sous sa forme algébrique.

**42Méthode pour passer de la forme (quasi-)trigonométrique à la forme algébrique : si il suffit d’écrire** sous sa forme algébrique et de distribuer . En effet,

**43Exemple :** dc

 Forme trigonométrique de .

**44Propriétés des arguments  :** Soient deux complexes non nuls et un entier relatif.

Même propriétés que le logarithme

1. **Des applications algébriques et des méthodes à connaitre ( savoir-faire !! )**

**45 Factorisation d’une somme ou différence d’exponentielles imaginaires** (méthode à retenir) :

 et .

**46Exercice corrigé** : Montrons que est imaginaire pur.

Donc est imaginaire pur.

**47 Puissances, produit ou quotient de nombres complexes :**

Les **Identités du Losange** sont très utiles pour obtenir la **forme (quasi-)trigo** puis la forme algébrique d’une puissance ou d’un quotient de complexes. La forme quasi-trigonométrique d’un complexe est le nom que je donne à l’écriture qu’un complexe sous la forme la forme trigonométrique d’un complexe non nul est l’écriture de ce complexe sous la forme

**48Exercice corrigé**: Ecrivons  sous forme algébrique.

 .

**49Linéarisation (transformation d’un produit en somme) d’un produit de sin et de cos (dans le but d’intégrer par exemple).**

Et**,**

**50Exercice**: et déduisons-en une primitive de .

**51Ecriture de polynôme en**

 et

Donc, et

Ainsi, et

**52Exercice** : Montrons qu’il existe deux fonctions polynômiales et tel que : .

**53 Calculs de , et d’autres sommes :**

.

**Exercice corrigé** : Calculer . Alors,

 alors

 alors

 .

Ainsi,

1. **Application à la géométrie**

**54Théorème** :

Soit deux points du plan d’affixes respectives . Alors,

Soit deux vecteurs non nuls d’affixes respectives . Alors,

**55Corollaire :** Soit quatre points distincts d’affixes respectives Alors,

**56Applications à l’alignement, l’orthogonalité et la cocyclicité :** Soient quatre points distincts , , et .

**A SAVOIR**

**RETROUVER**

* sont alignés **sietssi** .
* est sur le cercle de diamètre **sietssi** .
* sont cocycliques **sietssi** **sietssi**

**56bisExercice corrigé :** Chercher les points M d’affixe z tels que .

Soit z un complexe distinct de et de Soit A et B les points d’affixe

**57Application à différentes transformations du plan :**

La **translation** de vecteur d’affixe est l’application du plan dans lui-même qui associe, à chaque point le point tel que  **.** Donc la translation de vecteur est .

L’**homothétie** de centre et de rapport le réel non nul est l’application du plan dans lui-même qui associe, à chaque point le point tel que  **.**Donc, l’homothétie de centre O et de rapport est .

La **rotation** de centre et d’angle le réel est l’application du plan dans lui-même qui associe à chaque point le point tel que  **et .**.Donc, la rotation de centre O et d’angle est .

**58Composition** : Soit un complexe non nul. Alors Alors est la composée commutative de et de . Autrement dit, si un point du plan d’affixe non nulle alors point d’affixe est le point du plan tel que : .

****

**59Construction géométrique  :** pour passer de , on fait subir à la rotation de centre O et d’angle , on obtient , et ensuite on fait subir à l’homothétie de centre O et de rapport et on obtient ainsi.

1. **Exponentielle complexe**

On connait désormais l’exponentielle réelle tel que réel et l’exponentielle imaginaire tel que réel . On va grâce à ces deux exponentielles définir l’exponentielle complexe de la manière suivante :

**60Définition  :** Soit un nombre complexe. **L’exponentielle (complexe) de** est .

Autrement dit : .

**61Propriétés** : Soit deux nombres complexes et un entier relatif .

* ,
* et .
* , , , , .

**62Conséquence :** L’exponentielle complexe n’est pas injective, l’exponentielle imaginaire non plus alors que l’exponentielle réelle l’est.

**63Méthode  :** on cherche à résoudre une équation de la forme où complexe donné (fixé) et l’inconnue complexe.

Ou bien . Alors il n’y a pas de solution.

Ou bien On va mettre sous forme trigonométrique et on cherche sous forme algébrique . Alors ⟺.

Car deux complexes sont égaux sietssi ils ont même module et argument égaux modulo

**64Exercice corrigé** : Résolvons d’inconnue complexe.

Soit un complexe ( où et réels).

. Donc, ⟺.

Sol={

 **III Racines carrées ou deuxièmes et équations polynomiales**

1. **Racines carrées**

**65Théorème .** Soit un nombre complexe .

Ou bien alors il existe un et un seul complexe tel que qui est : .

Ou bien alors et il existe exactement deux complexes tels que qui sont distincts et opposés :

 et

Ces complexes tels que sont appelés les racines carrées ou deuxièmes (complexes) de

**66Méthode pour trouver les racines deuxièmes complexes de dans le cas où  :**

1. **Lorsque**  a une forme trigonométrique «sympa» (ie. a un argument simple) alors on donnera ses racines carrées sous forme trigonométrique comme dans le théorème et . Il est parfois utile d’avoir la forme algébrique (obtenue à partir de la forme trigo). Cf équation du second degré.

**67Exemples classiques**  : 1) 2)

1. Lorsque n’a pas un argument simple alors on cherchera ses racines carrées sous forme algébrique ie. on cherche tel que . En identifiant parties réelles et imaginaires et module , est équivalente au système . De (1) et (3) ,on tire et de (2) , on sait si sont de même signe ou non . On trouve deux solutions opposées : .

**68Exemple**: Cherchons les racines carrées de . On cherche tel que .

1. **Equation du second degré dans ℂ et complément dans ℝ**

**69Théorème** Soit des complexes tels que .

1. Soit une équation du second degré .On pose . Soit une racine carrée de .

 a une unique solution et si alors a deux solutions distinctes .

 Ces solutions (confondues si ) sont .

2) Pour tous complexes ,

3).

4) Raciproquement, si alors sont les racines de

**69bis Exercice à compléter** Résoudre d’inconnue réelle.

.

Alors

**70Théorème  :** Soient et trois réels tels que non nul et Alors,

**Si** , alors a deux racines complexes conjuguées .

**On a toujours :**  et

**71Réciproquement**  Soit deux complexes. Si sont deux complexes tels quealors sont les solutions de

1. **Fonction polynomiale à coefficients complexes**

**72Rappels :**

1. Si et sont deux fonctions polynomiales à coefficients complexes telles non nulle alors il existe deux uniques fonctions polynomiales complexes et telles que :
2. Si est une fonction polynomiale complexe de degré et est **racine** de alors il existe une fonction polynomiale complexe de degré telle que : pour tout réel ,

**73 Théorème** : Si est une racine complexe non réelle d’une fonction polynomiale **réelle** alors est aussi racine de .

**74Exercice** : Factorisons

**IV Racines ièmes (complexes) d’un complexe.**

**75Définition** Soit un nombre complexe et un entier naturel non nul .

Les racines ièmes (complexes) de sont tous les nombres complexes tels que .

Les racines ièmes (complexes) de sont toutes les racines complexes de la fonction polynomiale : .

**76Exemples** : 0 est l’unique racine ième de . Tout réel est l’unique racine ère de . Tout réel non nul a exactement deux racines carrées complexes .

Nous allons démontrer que si le complexe est non nul alors admet exactement racines ièmes. Commençons par

1. **Racines ièmes de l’unité où un entier naturel non nul .**

**77**Le nombre complexe est appelé l’unité . Les racines ièmes de l’unité sont tous les complexes tels que

De manière évidente , 1 est toujours racine ième de l’unité quelle que soit la valeur de .

**78Théorème** Soit un entier naturel non nul et .

Il existe exactement racines ièmes de l’unité (ie. complexes tels que qui sont les complexes les complexes :

tq .

On note l’ensemble des racines nièmes de l’unité.

**79NB** Remarquons que . Par conséquent, …

**80Propriété :** La somme des racines ièmes de l’unité est nulle dès que .

**81Prop :** Les complexes tq sont les solutions de .

**82Illustration**On note le point d’affixe . Alors le polygone est régulier et inscrit dans le cercle trigonométrique, son centre est O et l’un de ses sommets est le point d’affixe 1 .

 

**83 impair**

1 est la seule racine ième réelle de l’unité .

Les conjugués des complexes tq sont les complexes tq .

**84Définition :** on note

**85 Prop** Les racines troisièmes de l’unité sont 1 , et Leurs images forment un triangle équilatéral. Et,

 et

 ****

 **85 pair**

1 et -1 sont les racines ièmes réelles de l’unité et les conjugués des complexes tq sont les complexes tq .

**86Exemples :**

* Les racines carrées de l’unité sont 1 et -1 .
* Les racines 4èmes de l’unité sont . Leurs images forment un carré .

****

1. **Racines ièmes d’un nombre complexe non nul .**

**87Théorème :** Tout complexe non nul possède exactement racines ièmes qui sont les complexes tel que .

**88Propriété :** Si est une racine ième particulière de , alors les racines ièmes de sont les complexes obtenus en multipliant par les racines ièmes de l’unité .

**89Remarque :** La somme des racines ièmes de est nulle dès que et les points d’affixe tel que forment un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon .

**90Méthode pour trouver les racines ièmes d’un complexe  non nul avec (pou , paragraphe )**

1. J’écris sous forme trigonométrique .
2. Je cherche une racine ième particulière de  : convient (car ).
3. Je multiplie cette racine nième particulière par les racines ièmes de l’unité. J’obtiens alors complexes qui sont les racines ièmes de .

**91Exemple** : Déterminons les racines 6ièmes (complexe) de .

1. .
2. Donc, est une racine 6ième particulière de .
3. Ainsi les racines de sont les 6 complexes : tq .

**JE SAIS MAINTENANT RESOUDRE TOUTE EQUATION DE LA FORME d’inconnue Z complexe.**

**92Exemple**  : Soit Résolvons d’inconnue complexe.

Je remarque que 1 n’est pas solution de cette équation . Soit

z solution sietssi sietssi

sietssi

Soit .

 sietssi sietssi.

Donc je dois ôter la valeur pour avoir le droit de diviser .

De plus , pour , Donc le cas « k=0» est impossible .... mais ce n’est pas grave il nous reste les autres cas qui, eux, n’aboutissent pas à une impossibilité !!

sietssi où

sietssi est une racine nième de l’unité.

sietssi ou

sietssi il existe tel que .

sietssi il existe tel que

sietssi il existe tel que

sietssi il existe tel que

sietssi il existe tel que .

**93Dans ce chapitre, nous avons défini les objets : ,,et où (éventuellement non nul).**

 **Par contre, si alors les objets suivants n’existent pas :**

**~~cos(z)~~,~~tan(z)~~, ~~sin(z)~~ , ~~ln(z)~~,**

[Cette photo](https://en.wikipedia.org/wiki/File%3ASingapore_Road_Signs_-_Warning_Sign_-_Other_Dangers.svg) par Auteur inconnu est soumise à la licence [CC BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)