# TD 4.1
# Forme algébrique, forme trigonométrique d'un nombre complexe. Géométrie avec les nombres complexes.

**$x$ et $y$ désignent des réels, $z$ un complexe, $n$ un entier naturel et $R=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct du plan.**

**EX 1** Soit $z$ un nombre complexe et $x$ un réel. Expliquer pourquoi ces nombres complexes sont réels ou imaginaires purs :

$B=\frac{z-\bar{z}}{z^3+\bar{z}^3}$ $\quad C=\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+2}$ $\quad D=\left(e^{ix}+\frac{1}{e^{ix}}\right)^2$ $\quad et \quad E=\frac{i}{e^{-ix}-e^{ix}}$

**EX 2** Calculer les parties réelle et imaginaire, le module et un argument de chacun des complexes suivants et placer l'image ponctuelle de ce complexe dans le plan ( $x$ et $y$ désignent des paramètres réels) :

1. $\frac{(4i-3)}{(2i-1)^3}$
2. $\left(\frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}\right)^8$
3. $(1-i)^2$
4. $(1+i)^{1999}$
5. $\frac{1}{1+i\tan(x)}$
6. $\frac{1+ix}{1-ix}$
7. $\frac{1+\cos x+i\sin x}{1-\cos x+i\sin x}$
8. $e^{ix}-e^{iy}$
9. $i+1+\sqrt{2}e^{ix}$
10. $1+e^{ix}+e^{2ix}$
11. $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}$
12. $\left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016}$.

**EX 3** Déterminer tous les complexes $z$ tels que :

**1)** $3z^2-5|z^2|+2=0$.
**2)** $z^2=3\bar{z}$.
**3)** $z^5\bar{z}=1$
**4)** $Im\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right)=0$.
**5)** $|z|=|1-z|=\left|\frac{1}{z}\right|$.

**Ex 3 bis** Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ $et$ $z\in\mathbb{C}$ tels que : $ad-bc>0$ $et$ $cz+d\neq 0$. Montrer que : $Im(z)>0\Longrightarrow Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)>0$.

**EX 4** Soient $(u,v,w)\in\mathbb{U}^3$.

1. Montrer que : $|u+v+w|=|uv+vw+wu|$.
2. Montrer que : pour tout complexe $z$ non nul, $\left|u-\frac{1}{\bar{z}}\right|=\frac{|u-z|}{|z|}$.
3. On suppose, ici, que: $1+uv\neq 0$. Montrer que : $\frac{u+v}{1+uv}\in\mathbb{R}$.
4. On suppose, ici, que: $u\neq 1$.
   a. Montrer que $Re\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{1}{2}$.
   b. Pour quelles valeurs de l'entier naturel $n$, le complexe $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n$ est-il réel ?

**Ex 5** Montrer que $f:(z\mapsto|1+iz|^2+|z+i|^2)$ est constante sur $\mathbb{U}$.

**EX 6** Montrer que pour tous complexes $z$ $et$ $w$ ,

1. $1\leq|1+z|+|z|$.
2. $|z|+|z+w|+|w|\leq|2z|+|2w|$.
3. $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$.
4. $1+|zw-1|\leq(1+|z-1|)+(1+|w-1|)$.

**Ex 7** Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|\neq 1$ $et$ $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right|\leq\frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

**Ex 8** Soit $a$ et $b$ deux complexes de module strictement inférieur à 1. Montrer que : $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1$.

**Ex 9** Soit $u$ un nombre complexe distinct de 1 et $z$ un complexe non réel. Montrer que : $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow|u|=1$.

**EX 10** Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que les racines complexes de $P(z)=z^n-z-1$ sont de module strictement compris entre 0 et 2.

**EX 11** Déterminer les entiers $n$ tels que : $\left(\sqrt{3}-i\right)^n$ soit réel. Représenter les points d'affixe $z_k=\left(\sqrt{3}-i\right)^k$ tq $k\in[\![0,5]\!]$.

**EX 12** Déterminer une fonction polynômiale $P$ tel que **:** pour tout réel $x$, $\sin(7x)=P(\sin(x))$ .

**EX 13** Retrouver la relation entre $\cos(3t)$, $\cos^3(t)$ $et$ $\cos(t)$.

**EX 14** Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2(5t)dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos(2t)\sin^3(3t)dt$ .

**EX 15** Soit $x$ *et* $y$ des réels, $n$ un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

1. $D_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{D_n}{n}$.
2. $R_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx+y)$ et $S = cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$.
3. $S_n = \sum_{k=0}^{n} sin^2(kx)$ , $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} cos^3(kx)$ , $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{cos^k(x)}$ et $X_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.
4. $V_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(2kx)$ , $W_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} sin^2(kx)$.

**EX 16** 1) Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire : $S_n = \sum_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}(-1)^k$ et $T_n = \sum_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1}(-1)^k$.

2) On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

**a.** Calculer $j^p$ suivant les valeurs de l'entier naturel $p$ et placer les points $M_p$ d'affixe $j^p$ dans le plan complexe.

**b.** En déduire les valeurs des sommes : $U_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{3n}{3k}$ , $V_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{3n}{3k+1}$ et $W_n = \sum_{0\le k\le n} \binom{3n}{3k+2}$.

**EX 17** Soit $\alpha$ un réel fixé . Déterminer le lieu géométrique des points $M$ d'affixe $z$ telle que :

1. $|2z - iz + 1| = 3$
2. $\left|\frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z}\right| = 1$
3. $\left|\frac{z+1-i}{2i-\bar{z}}\right| = 2$
4. $arg(\bar{z}-1) = \frac{\pi}{3}[\pi]$
5. $\arg\left((2\bar{z}-i)(iz-1)\right) = 0[\pi]$
6. $arg\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
7. $arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$
8. $\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^{-*}$
9. $\frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}} \in i\mathbb{R}$.
10. $Re\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = 0$

**EX 18 1)** Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe complexe $z$ tels que : $M, P$ d'affixe $z^2$ et $Q$ d'affixe $z^3$ soient les sommets d'un triangle rectangle (puis isocèle).

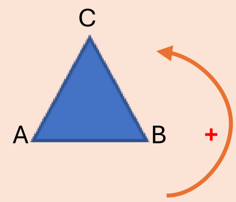
2) Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^4)$ sont alignés.

3) Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que les points $M(z)$, $A(1)$ et $P(1+z^2)$ sont alignés.

**EX 19** Soit $a, b$ *et* $c$ trois complexes distincts et $A, B$ *et* $C$ leurs images ponctuelles respectives. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $j^3$ *et* $1+j+j^2$. Quel est le lien entre $\bar{j}$ *et* $j^2$?
2. Montrer que : le triangle $ABC$ est équilatère direct ($Cf$ dessin)si et ssi $a + bj + cj^2 = 0$.

Triangle ABC direct :




**EX 20**

1) Soit $\alpha = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$. Représenter les points $M_n$ d'affixe $\alpha^n$ tq $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}i$ et $u_n$ affixe de $M_n$ .
   a) Montrer que tous les points $M_n$ sont alignés.
   b) Exprimer $u_n$ *en fonction de* $n$. Déterminer la limite des suites $Re(u_n)$ *et* $Im(u_n)$.
3) Soit $(z_n)$ la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n+2(1-i)}{z_n-3i}$ $(**)$.

   On note $M_n$ le point image de $z_n$.
   a) Calculer $z_1$ *et* $z_2$ .
   b) Trouver deux suites constantes égales à $p$ *et* $q$ (telles que $|p| > |q|$.)qui vérifient la même relation de récurrence $(**)$ que la suite $(z_n)$ .
   c) Montrer que la suite $\left(\frac{z_n-p}{z_n-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   d) En déduire $z_n$ en fonction de $n$ et Déterminer la limite des suites $Re(z_n)$ *et* $Im(z_n)$.

**Ex 21** Résoudre le système $(S)\begin{cases} x + jy + j^2z = 0 \\ j^2x + y + jz = 0 \\ jx + j^2y + z = 0 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

# TD 4.2
# Exponentielles complexes-Equations polynomiales-Racines $n^{\text{ièmes}}$ complexes.

**Ex 1** Donner les racines *carrées* complexes des nombres complexes $a$ suivants :

1. $a=-1$
2. $a=-3$
3. $a=2$
4. $a=cos^2(\alpha)-1$ où $\alpha$ réel.
5. $a=-2i$
6. $a=\frac{1}{4}i$
7. $a=j$
8. $a=\frac{-1-\sqrt{3}i}{i-1}$
9. $a=-12+16i$
10. $a=-2+i$

**Ex 2** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z$ complexe ou $(z,w)$ couple de complexes :

1. $Im\left(\frac{1}{1+z+z^2}\right)=0$
2. $e^{\bar{z}}=-5.$
3. $e^{2z}+e^z+1=0$
4. $e^{3z}+3e^{2z}+24e^{-z}=-8$
5. $e^{z^2}=1$
6. $(-4-2i)z^2+(7-i)z+1+3i=0$
7. $\begin{cases} z+\bar{w}=-1+2i \\ \bar{z}w=1+7i \end{cases}$
8. $\begin{cases} e^z+e^w=2 \\ e^{z+w}=2 \end{cases}$
9. $z^4+119-120i=0$
10. $z^4-14iz^2+32=0$
11. $z^3-(16-i)z^2+(89-16i)z+89i=0$
12. $z^2\left(1+tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)+4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)z-4=0$ où $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$
13. $(3z^2+z+1)^2+(z^2+2z+2)^2=0$
14. $z^4+6z^3+9z^2+100=0$

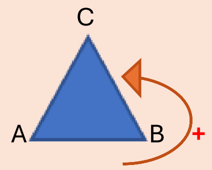
**Ex 3** Donner les racines $n^{\text{ièmes}}$ des complexes $a$ suivants et les représenter dans le plan complexe (i.e. le plan muni d'un repère orthonormé direct) :

1. $a=-1$ $\quad n=8$
2. $a=7-24i$ $\quad n=4$ .
3. $a=-8i$ $\quad n=6$
4. $a=j$ $\quad n=10$
5. $a=\frac{1+i}{3-i\sqrt{3}}$ $\quad n=5$
6. $a=e^{2ix}-1$ $\quad n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,\pi[$
7. $a=\frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}$ $\quad n=6$

**Ex 4** Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z$ complexe ($n$ désigne un entière naturel non nul ):

1. $(z-1)^n=(z+1)^n$ $où\, n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$
2. $1-i(1-z)^4=0$
3. $z^n=3^n$
4. $z^8=\bar{z}$
5. $64(z-1)^6+(z+1)^6=0$
6. $z^4-z^3+z^2-z+1=0$
7. $z^8+z^4+1=0$
8. $(z-i)^3+(z-i)^2(z+i)+(z-i)(z+i)^2+(z+i)^3=0$
9. $(1-i)\bar{z}^8+(1-i\sqrt{3})z=0$
10. $z^5+z^6+\cdots.+z^n=0$ $où\, n\geq 5.$
11. $z^6+z^3(1+z)^3+(1+z)^6=0$
12. $z^{2n}-2z^n\cos(\alpha)+1=0$ où $\alpha\in[0,\pi]$
13. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=2\cos(\alpha)$ où $\alpha\in[0,\pi]$

Triangle ABC direct :




**Ex 5** Soit $a,b\ et\ c$ trois complexes distincts et $A,B\ et\ C$ leurs images ponctuelles respectives.
Montrer que : le triangle $ABC$ est équilatère direct ($Cf$ dessin)si et ssi $a+bj+cj^2=0$

**Ex 6**
1. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^4)$ sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que les points $M(z)$, $A(1)$ et $P(1+z^2)$ sont alignés.

**Ex 7** Calculer $j^p$ suivant les valeurs de l'entier naturel $p$ puis placer les points $M_p$ d'affixe $j^p$ dans le plan complexe. En déduire les valeurs des sommes : $U_n=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k}$ , $V_n=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k+1}$ et $W_n=\sum_{0\leq k\leq n}\binom{3n}{3k+2}$.

**Ex 8** Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ telle que $f(z)=z(1-z)$.
Démontrer, en utilisant la forme canonique de $f$, que : $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow\left|f(z)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

**Ex 9** Soit $\alpha\in]-\pi,\pi[$. On considère l'équation $z^2-2^{\alpha+1}cos(\alpha)z+2^{2\alpha}=0$.
1. Résoudre cette équation ; on note $z_1\ et\ z_2$ les solutions.
2. Soit $A$ , $B$ et $O$ les points d'affixe $z_1,z_2\ et\ 0$. Déterminer les valeurs de $\alpha$ pour que $OAB$ soit équilatéral.

**Ex 10 1)** Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z)=2z^3-(4+2i)z^2-(34-10i)z+56+72i$ sachant que $P$ a une racine réelle.
**2)** Factoriser, dans $\mathbb{C}$, $P(z)=z^4+(1-\sqrt{3})z^3+(2-\sqrt{3})z^2+(1-\sqrt{3})z+1$ en utilisant $Z=z+\frac{1}{z}$.

**Ex 11** Calculer de deux manières les racines quatrièmes de $1+i\sqrt{3}$. En déduire les valeurs de $cos\frac{13\pi}{12}$ et $sin\frac{13\pi}{12}$ .

**Ex 12** Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MQ}$ où $P$ et $Q$ sont les points images des racines carrées complexes de $z$ .

**Ex 13** Soit $\boldsymbol{a}$ un réel et $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$. Notons $(\boldsymbol{e})$ l'équation : $(1-ia)(1+iz)^n = (1+ia)(1-iz)^n$

1. Montrer, géométriquement, que toutes les solutions de $(e)$ sont réelles.
2. Justifier qu'il existe un et un seul réel $\alpha$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = a$. Qui est $\alpha$ ?
3. Résoudre $(e)$ dans $\mathbb{C}$, donner les solutions de $(e)$ en fonction de $\alpha$ et sous une forme qui permette de lire qu'elles sont réelles.

**Ex 14** Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$. Pour tout $k$ de $\{0\,;1\,;\dots\,;n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $S(p) = \sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^p$.
5. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ \sum_{k=1}^{n} (z+\omega_k)^n = n(z^n+1)$.

**Ex 15** Pour quels entiers naturels non nuls $n$ et $p$, le système $(S)$ : $\begin{cases} z^n = 1 \\ (1+z)^p = 1 \end{cases}$ a-t-il au moins une solution ?

**Ex 16** Soit $a$ un complexe de module 1. $n$ un entier strictement positif. On note $u_1, u_2, \dots, u_n$ ,les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $a$ et $z_k = (1+u_k)^n$.Montrer que les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ d'affixes respectives $z_1, z_2, \dots, z_n$ sont sur une même droite passant par O.

**Ex 17** Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$, $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ les images ponctuelles de ces racines $n^{\text{ièmes}}$.

1. Montrer que $\forall M \in \mathscr{P}, \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} = n\overrightarrow{MO}$. En déduire l'ensemble des points $M$ tels que : $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = n$.
2. Montrer que $\forall M \in \mathscr{P}, \sum_{k=0}^{n-1} {MA_k}^2 = nMO^2 + n$. En déduire l'ensemble des points $M$ tels que : $\sum_{k=0}^{n-1} {MA_k}^2 = 2n$.

**Ex 18** Soit $\boldsymbol{a}$ ***et*** $\boldsymbol{b}$ deux paramètres complexes distincts et $\boldsymbol{n}$ un entier naturel non nul.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z-a)^n = (z-b)^n$
2. Montrer que les points images des solutions sont alignés sur la médiatrice de $[A,B]$ où $A$ est l'image ponctuelle de $a$ et $B$ celle de $b$ .
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que toutes les solutions soient réelles. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir qu'elles sont réelles).
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour toutes les solutions soient imaginaires pures. On pose alors $a = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une expression simplifiée des solutions (qui permette de voir clairement qu'elles sont imaginaires pures)

**Ex 19** Soit l'équation $(E)$ : $z^5 - 1 = 0$

1. Résoudre $(E)$ dans $\mathbb{C}$ .
2. En déduire la valeur de la somme : $S = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$
4. En déduire des expressions par radicaux de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
5. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$et$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs au cercle $(C)$ de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et à l'axe réel.
6. Déduire de ce qui précède une construction à la règle et au compas des sommets d'un pentagone régulier.

**Ex 20** Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

1. Calculer $1 + u + u^2 + \dots + u^6$.
2. Calculer $\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}$.
3. En déduire $\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}$
4. On pose $S = u + u^2 + u^4$.
5. Exprimer $\bar{S}$ en fonction de $u$. En déduire $S + \bar{S}$ *et* $S\bar{S}$ .
6. En déduire $S$ sous forme algébrique.
7. Calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$.