CORRIGE DU TD

Forme algébrique, forme trigonométrique d'un nombre complexe. Géométrie avec les nombres complexes.

x et y désignent des réels, z un complexe, n un entier naturel et $R=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct du plan.

Soit z un nombre complexe et x un réel. Expliquer pourquoi ces nombres complexes sont réels ou imaginaires purs :

$$B=(z-\bar{z})/(z^3+\bar{z}^3) \qquad C=\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+2} \qquad D=\left(e^{ix}+\frac{1}{e^{ix}}\right)^2 \quad et \quad E=\frac{i}{e^{-ix}-e^{ix}}$$

$B=\frac{z-\bar{z}}{z^3+\bar{z}^3}=\frac{2iIm(z)}{z^3+\overline{z^3}}=\frac{2iIm(z)}{2Re(z^3)}=\underbrace{\frac{Im(z)}{Re(z^3)}}_{\in\mathbb{R}}i\in i\mathbb{R}.$

$C=\frac{z^2-\bar{z}^2}{z\bar{z}+2}=\frac{z^2-\overline{z^2}}{|z|^2+2}=\frac{2iIm(z^2)}{|z|^2+2}=\underbrace{\frac{2Im(z^2)}{|z|^2+2}}_{\in\mathbb{R}}i\ \in i\mathbb{R}$

$D=\left(e^{ix}+\frac{1}{e^{ix}}\right)^2=(e^{ix}+e^{-ix})^2=(2\cos(x))^2\in\mathbb{R}^+.$

$E=\frac{i}{e^{-ix}-e^{ix}}=\frac{i}{2isin(-x)}=-\frac{1}{2\sin(x)}\in\mathbb{R}$

Calculer les parties réelle et imaginaire, le module et un argument de chacun des complexes suivants et placer l'image ponctuelle de ce complexe dans le plan

1. $\frac{(4i-3)}{(2-i)^3}$
2. $\left(\frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}\right)^8$
3. $(1-i)^2$
4. $(1+i)^{1999}$
5. $\frac{1}{1+itan(x)}$
6. $\frac{1+ix}{1-ix}$
7. $\frac{1+cosx+isinx}{1-cosx+isinx}$
8. $e^{ix}-e^{iy}$
9. $i+1+\sqrt{2}e^{ix}$
10. $1+e^{ix}+e^{2ix}$
11. $\sum_{k=0}^{n-1}e^{ikx}$
12. $\left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016}$.

1. $z=\frac{(4i-3)}{(2-i)^3}=\frac{(4i-3)(2-\bar{i})^3}{|(2-i)^3|^2}=\frac{(4i-3)(2-\bar{i})^3}{(|2-i|^2)^3}=\frac{1}{5^3}(4i-3)(2^3+3.2^2(-i)+3.2(-i)^2+(-i)^3)$
$=\frac{1}{5^3}(4i-3)(8-12i-6+i)=\frac{1}{5^3}(4i-3)(2-11i)=\frac{1}{5^3}(41i+38)$. Donc, $Re(z)=\frac{41}{5^3}$ et $Im(z)=\frac{38}{5^3}$.

$|z|=\frac{|4i-3|}{|2-i|^3}=\sqrt{\frac{25}{5^3}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. *Notons θ l'argument principal de z. Alors* $z=\sqrt{\frac{1}{5}}\left(\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{5^3}\times 38}_{\cos(\theta)}+\underbrace{\frac{\sqrt{5}}{5^3}\times 41\,i}_{\sin(\theta)}\right)$. Donc, $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(\theta)=\frac{41}{38}$.

Ainsi, $\theta=Arctan\left(\frac{41}{38}\right)$.

2. $z=\left(\frac{i-1}{1-i\sqrt{3}}\right)^8=\left(\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^8=\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^8=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^8=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^8=\frac{1}{16}e^{i8\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{16}e^{i\left(\frac{26\pi}{3}\right)}=\frac{1}{16}e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{16}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+isin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\frac{-1}{32}+\frac{i\sqrt{3}}{32}.$
Ainsi, $Re(z)=\frac{-1}{32}, Im(z)=\frac{\sqrt{3}}{32}$, $|z|=\frac{1}{16}$ *et* $arg(z)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

3. $z=(1-i)^2=-2i=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Ainsi, $Re(z)=0, Im(z)=-2$, $|z|=2$ *et* $arg(z)\equiv\frac{-\pi}{2}[2\pi]$.

4. $z=(1+i)^{1999}=\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^{1999}=\left[\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{1999}=[\sqrt{2}]^{1999}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^{1999}=\sqrt{2}[\sqrt{2}]^{1998}e^{i(1999)\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.2^{999}.e^{i\left((2000)\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}.2^{999}.e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
$=\sqrt{2}.2^{999}.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sqrt{2}.2^{999}.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=2^{999}-i2^{999}$. Ainsi, $Re(z)=2^{999}, Im(z)=-2^{999}$, $|z|=\sqrt{2}.2^{999}$ *et* $arg(z)\equiv\frac{-\pi}{4}[2\pi]$.

5. $z=\frac{1}{1+itan(x)}=\frac{1}{1+\frac{isin(x)}{\cos(x)}}=\frac{\cos(x)}{\cos(x)+isin(x)}=\frac{\cos(x)}{e^{ix}}=\cos(x)e^{-ix}=\cos(x)(\cos(x)-isin(x))=cos^2(x)-isin(x)\cos(x).$

Ainsi, $Re(z)=cos^2(x), Im(z)=-\sin(x)\cos(x)$, $|z|=|\cos(x)|$ *et* $arg(z)\equiv\begin{cases}-x\ [2\pi]\ si\ cos(x)>0\\ n'existe\ pas\ si\ \cos(x)=0\\ -x+\pi\ [2\pi]\ si\ cos(x)<0\end{cases}$.

6. $z=\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{(1+ix)^2}{1+x^2}=\frac{1-x^2+2ix}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}+i\frac{2x}{1+x^2}$. Donc, $Re(z)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ *et* $Im(z)=\frac{2x}{1+x^2}$.
Posons $\theta=Arctan(x)$. Alors $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *et* $x=tan(\theta)$.

Par suite, $z=\frac{1+itan(\theta)}{1-itan(\theta)}=\frac{1+\frac{isin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-\frac{isin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{1+i\frac{sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)+isin(\theta)}{\cos(\theta)-isin(\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{i2\theta}=e^{i2Arctan(x)}$. Donc, $|z|=1$ *et* $\arg(z)\equiv Arctan(x)[2\pi]$

7. $z=\frac{1+cosx+isinx}{1-cosx+isinx}=\frac{1+e^{ix}}{1-e^{-ix}}=\frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}{-2isin\left(-\frac{x}{2}\right)e^{-i\frac{x}{2}}}=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{ix}}{isin\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}=cotan\left(\frac{x}{2}\right)e^{i}=cotan\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+icotan\left(\frac{x}{2}\right)sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
$z=cotan\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x)-icotan\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)$. Donc $Re(z)=\ cotan\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x)$ *et* $Im(z)=-cotan\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)$.

Et $|z|=\left|cotan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$. Et $\arg(z)\equiv\begin{cases}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]\ si\ cotan\left(\frac{x}{2}\right)>0\\ nexiste\ pas\ si\ cotan\left(\frac{x}{2}\right)=0\\ \left(x+\frac{\pi}{2}\right)\ [2\pi]\ si\ cotan\left(\frac{x}{2}\right)<0\end{cases}$.

8. $e^{ix}-e^{iy}=e^{iy}\left(e^{i(x-y)}-1\right)=e^{iy}\left(2isin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)=2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)}$. Donc, $Re(z)=2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)$ *et* $Im(z)=2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y+\pi}{2}\right)$.

Et $|z|=\left|2sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$. Et $\arg(z)\equiv\begin{cases}\frac{x+y+\pi}{2}\ [2\pi]\ \ si\ sin\left(\frac{x-y}{2}\right)>0\\ nexiste\ pas\ si\ sin\left(\frac{x-y}{2}\right)=0\\ \frac{x+y-\pi}{2}[2\pi]\ \ si\ sin\left(\frac{x-y}{2}\right)<0\end{cases}$.

9. $i+1+\sqrt{2}e^{ix}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}e^{ix}=\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{ix}\right)=\sqrt{2}e^{ix}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}+1\right)=\sqrt{2}e^{ix}2\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)}.$

Donc, $Re(z)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$ *et* $Im(z)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)$. *Et* $|z|=\left|2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\right|$. Et $\arg(z)\equiv\begin{cases}\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\ [2\pi]\ si\ \cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)>0\\ nexiste\ pas\ si\ \cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)=0\\ \frac{9\pi}{8}+\frac{x}{2}[2\pi]\ si\ \cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)<0\end{cases}$.

10. $1+e^{ix}+e^{2ix}=\ 1+e^{2ix}+e^{ix}=2\cos(x)e^{ix}+e^{ix}=(2\cos(x)+1)e^{ix}$. Donc, $Re(z)=(2\cos(x)+1)\cos(x)$ *et* $Im(z)=(2\cos(x)+1)\sin(x)$. *Et* $|z|=|2\cos(x)+1|$. Et $\arg(z)=\begin{cases}x\ si\ \ 2\cos(x)+1>0\\ nexiste\ pas\ si\ \ 2\cos(x)+1=0\\ x+\pi\ si\ \ 2\cos(x)+1<0\end{cases}$.

11. $Soit\ n \in \mathbb{N}^*. z = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^k = \begin{cases} n\ si\ e^{ix} = 1 \\ \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}\ \ si\ e^{ix} \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} n \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{2isin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}}{2isin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases} = \begin{cases} n \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{i\frac{(n-1)}{2}x}}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases}.$

Donc, $Re(z) = \begin{cases} n \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)}{2}x\right)\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases}$ $et\ Im(z) = \begin{cases} 0 \quad si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)}{2}x\right)\ \ si\ x \equiv 0[2\pi] \end{cases}.$

$Et\ |z| = \begin{cases} n\ si\ x \equiv 0[2\pi] \\ \left|\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|\ \ si\ x \not\equiv 0[2\pi] \end{cases}$ et si $x \not\equiv 0\ [2\pi] alors\ \arg(z) \equiv \begin{cases} n'existe\ pas\ si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 0 \\ x \quad [2\pi] \quad si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} > 0 \\ x + \pi\ [2\pi] \quad si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} < 0 \end{cases}$ et si $x \equiv 0\ [2\pi] alors\ \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]\ car\ n \neq 0.$

12. $\left(\frac{2e^{ix}-2}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016} = \left(\frac{2(e^{ix}-1)}{e^{i2x}-e^{i\frac{x}{2}}}\right)^{2016} = \left(\frac{4isin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{\frac{i3}{2}x}-1)}\right)^{2016} = \left(\frac{4isin\left(\frac{x}{2}\right)}{2isin\left(\frac{3}{4}x\right)e^{i\frac{3}{4}x}}\right)^{2016} = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}e^{-i\frac{3}{4}x}\right)^{2016} = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} e^{-i\frac{3(2016)}{4}x} = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} e^{-i162x}$. Donc, $Re(z) = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} \cos(162x)\ et\ Im(z) = -\left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016} \sin(162x).\ Et\ |z| = \left(2\frac{sin\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{3}{4}x\right)}\right)^{2016}$ et $\arg(z) \equiv \begin{cases} -162x \quad [2\pi]\ si\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \\ n'existe\ pas\ si\ sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \end{cases}$

Déterminer tous les complexes z tels que :

1) $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0.$

2) $z^5\bar{z} = 1$

3) $Im\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0.$

4) $|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|.$

1) $3z^2 - 5|z^2| + 2 = 0 \Leftrightarrow 3z^2 - 5|z|^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + (iy)^2 + 2ixy) - 5(x^2+y^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - y^2 + 2ixy) - 5(x^2+y^2) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2x^2 - 8y^2 + 2i6(xy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6xy = 0 \\ 2 - 2x^2 - 8y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0\ ou\ y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} ou \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2} \end{cases} ou \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$

Ainsi, $Sol = \left\{1, -1, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\right\}$.

2) Si $z^5\bar{z} = 1 alors\ z \neq 0$. Désormais $z \neq 0$. Posons $z = re^{ia}$.

Alors, $z^5\bar{z} = 1 \Leftrightarrow (re^{ia})^5\overline{(re^{ia})} = 1 \Leftrightarrow r^5e^{i5a}re^{-ia} = 1 \Leftrightarrow r^6e^{i4a} = 1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^6 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/4a = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}/a = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/z = e^{i\frac{k\pi}{2}}.$

Ainsi, $Sol = \{1, -1, i, -i\}$.

3) $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm\frac{2i\pi}{3}} \Leftrightarrow z = j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\ ou\ z = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Désormais $z \in \mathbb{C}\backslash\{j\,;j^2\}$.

$Im\left(\frac{1}{z^2+z+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z^2+z+1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z = \overline{z^2 + z} \Leftrightarrow z^2 + z = \bar{z}^2 + \bar{z} \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + (z - \bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}) + (z-\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[(z+\bar{z}) + 1] = 0 \Leftrightarrow (z = \bar{z}\ ou\ z + \bar{z} = -1) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R}\ \ ou\ 2Re(z) = -1) \Leftrightarrow \left(z \in \mathbb{R}\ \ ou\ Re(z) = -\frac{1}{2}\right).$

Ainsi, $Sol = \mathbb{R} \cup \left\{-\frac{1}{2} + ix/x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}\right\}$.

4) Soit z un complexe non nul.

$|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z| = |1-z| = \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z| = |1-z| \end{cases} \overset{Aff(A)=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ OM = AM \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ M \in med[0,A] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in C(O,1) \\ M \in med[0,A] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} Im^2(z) + Re^2(z) = 1 \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Im(z)^2 = \frac{3}{4} \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Im(z) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ Re(z) = \frac{1}{2} \end{cases}$. Ainsi, $Sol = \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{-i\pi}{3}}\right\}$.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ et\ z \in \mathbb{C}$ tels que : $ad - bc > 0\ et\ cz + d \neq 0$. Montrer que : $Im(z) > 0 \Rightarrow Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0.$

$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)((c\bar{z}+d)} = \frac{ac|z|^2+adz+bc\bar{z}+bd}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2+(ad+bc)Re(z)+bd}{|cz+d|^2} + i\underbrace{\frac{(ad-bc)}{|cz+d|^2}Im(z)}_{=Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}$. Comme $ad - bc > 0\ \ et\ |cz+d|^2 > 0$, $Im(z) > 0 \Rightarrow Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) > 0.$

Soient $(u, v, w) \in U^3$.

1. Montrer que : $|u + v + w| = |uv + vw + wu|$.
2. Montrer que : pour tout complexe z non nul, $\left|u - \frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{|u-z|}{|z|}$.
3. On suppose, ici, que : $1 + uv \neq 0$. Montrer que : $\frac{u+v}{1+uv} \in \mathbb{R}$.
4. On suppose, ici, que : $u \neq 1$. Montrer que $Re\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$.
5. On suppose, encore, que : $u \neq 1$. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, le complexe $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n$ est-il réel ?

Comme u, v et w sont de module 1, nous pouvons poser $u = e^{ia}$,$v = e^{ib}\ \ et\ w = e^{ic}$ tels que a, b et c réels.

1. Alors, $|u+v+w|^2 = (u+v+w)\overline{(u+v+w)} = (u+v+w)\ \ (\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}) = (e^{ia}+e^{ib}+e^{ic})(e^{-ia}+e^{-ib}+e^{-ic})$

$= 1 + e^{i(a-b)} + e^{i(a-c)} + e^{i(b-a)} + 1 + e^{i(b-c)} + e^{i(c-a)} + e^{i(c-b)} + 1$

$= 3 + 2\cos(a-b) + 2\cos(a-c) + 2\cos(b-c)$.

Ainsi, comme u, v et w sont des complexes de modules 1 quelconques, on a prouvé que pour tous réels A,B et C , $\left|e^{iA} + e^{iB} + e^{iC}\right|^2 = 3 + 2\left[\cos(A-B) + \cos(A-C) + \cos(B-C)\right]$

$|uv + vw + wu|^2 = \left|e^{i(a+b)} + e^{i(c+b)} + e^{i(a+c)}\right|^2 \overset{\substack{en\ appliquant\ le\ résultat \\ précédent\ à\ A=a+b, \\ B=b+c\ et\ C=c+a}}{\cong} 3 + 2\left[\cos\left((a+b)-(c+b)\right) + \cos\left((a+b)-(c+a)\right) + \cos\left((b+c)-(c+a)\right)\right]$

$= 3 + 2[\cos(a-c) + \cos(b-c) + \cos(b-a)] \underbrace{=}_{\substack{car\ \forall t \in \mathbb{R}, \\ \cos(t)=\cos(-t)}} 3 + 2[\cos(a-c) + \cos(b-c) + \cos(a-b)] = |u+v+w|^2.$

Comme les deux réels $|u+v+w|\ et\ |uv+vw+wu|$ sont positifs et ont le même carré, je peux conclure que $|uv+vw+wu| = |u+v+w|$.

OU BIEN

$$|u+v+w| = |\overline{u+v+w}| = |\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}| \overset{\substack{car\ u,v\ et\ w\ sont\ de\ module\ 1. \\ Donc\ u=e^{ia}\ et\ \bar{u}=e^{-ia}=\frac{1}{e^{ia}}=\frac{1}{u}}}{\triangleq} \left|\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right|$$

$$= \left|\frac{vw+uw+uv}{uvw}\right| \overset{\substack{propriété \\ du\ module}}{\triangleq} \frac{|vw+uw+uv|}{|uvw|}$$

$$\overset{\substack{propriété \\ du\ module}}{\triangleq} \frac{|vw+uw+uv|}{|u||v||w|} \underbrace{=}_{\substack{car \\ u,v\ et\ w\ sont \\ de\ module\ 1}} \frac{|vw+uw+uv|}{1} = |vw+uw+uv|$$

2. Soit z un complexe non nul. Alors $\bar{z} \neq 0\ et\ |z| \neq 0$.

$$\left|u-\frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{u\bar{z}-1}{\bar{z}}\right| \overset{car\ \left|\frac{w}{w'}\right|=\frac{|w|}{|w'|}}{\triangleq} \frac{|u\bar{z}-1|}{|\bar{z}|} \overset{\substack{car\ |u|=1 \\ donc\ u\neq 0}}{\triangleq} \frac{\left|u\left(\bar{z}-\frac{1}{u}\right)\right|}{|z|} \overset{car\ |ww'|=|w||w'|}{\triangleq} \frac{|u|\left|\left(\bar{z}-\frac{\bar{u}}{|u|^2}\right)\right|}{|z|} \overset{car\ |u|=1}{\triangleq} \frac{|(\bar{z}-\bar{u})|}{|z|} = \frac{|\overline{z-u}|}{|z|} \overset{car\ |w|=|\bar{w}|}{\triangleq} \frac{|z-u|}{|z|} \overset{car\ |w|=|-w|}{\triangleq} \frac{|u-z|}{|z|}.$$

3. On suppose que $1+uv \neq 0$. Alors, $\frac{u+v}{1+uv} = \frac{e^{ia}+e^{ib}}{1+e^{i(a+b)}} = \frac{e^{ia}(1+e^{i(b-a)})}{1+e^{i(a+b)}} \frac{e^{ia}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{b-a}{2}}}{2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)e^{i\frac{b+a}{2}}} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}.\ e^{i\left[a+\left(\frac{b-a}{2}\right)-\left(\frac{b+a}{2}\right)\right]} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} e^{i0} = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \in \mathbb{R}.$

4. On suppose, ici, que: $u \neq 1$.

Alors $\frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-e^{ia}} = \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{\frac{ia}{2}}} = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\left(\frac{a+\pi}{2}\right)}} = \frac{-e^{-i\left(\frac{a+\pi}{2}\right)}}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\left(\cos\left(-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{a}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{-1}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\left(-\sin\left(\frac{a}{2}\right)-i\cos\left(\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}cotan\left(\frac{a}{2}\right).$

Ainsi, $Re\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$

5. $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n = \left(\frac{e^{ia}+1}{e^{ia}-1}\right)^n = \left(\frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}}{2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}}\right)^n = \left(\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right)^n = \left(-\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}i\right)^n = \left(-\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right)^n i^n = \left(-cotan\left(\frac{a}{2}\right)\right)^n i^n.$

   Ou bien $cotan\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ i.e. $\exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2}+k\pi$ i.e. . $\exists k \in \mathbb{Z}/\ a = \pi+2k\pi$ i.e. $u=-1$ alors $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n = 0 \in \mathbb{R}$.

   Ou bien $cotan\left(\frac{a}{2}\right) \neq 0$ i.e. $u \neq -1$ alors $\left(\frac{u+1}{u-1}\right)^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n\ pair$.

Montrer que $f: (z \mapsto |1+iz|^2+|z+i|^2)$ est constante sur U.

version géométrique

Soit $z \in U$. On note M le point d'affixe z . Alors M est sur le cercle trigonométrique.
On note A le point d'affixe i est B celui d'affixe $-i$. Alors $[A,B]$ est un diamètre du cercle trigonométrique.
Par conséquent, $(MA) \perp (MB)$.

$$f(z) = |1+iz|^2+|z+i|^2 = |i(-i+z)|^2+|z+i|^2 = |i|^2|-i+z|^2+|z+i|^2$$

$$f(z) = |z-i|^2+|z+i|^2 = MA^2+MB^2 \overset{\substack{Pythagore \\ dans\ ABM \\ rectangle\ en\ M}}{\triangleq} AB^2 = 4.$$ Donc f est constante égale à 4 sur U.

OU BIEN (en version algébrique)

Soit $z \in U$. Alors il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.

Par conséquent, $f(z) = \left|1+ie^{i\theta}\right|^2+\left|e^{i\theta}+i\right|^2$

$$= \left|1+e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\theta}\right|^2+\left|e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2$$

$$= \left|1+e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right|^2+\left|e^{i\theta}\left(1+e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right)\right|^2$$

$$= \left|2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right|^2+\left|e^{i\theta}2\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\right|^2$$

$$= \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2+\left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2$$

$$= 4\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right|^2\left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2+4\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2\left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|^2$$

$$= 4\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{=}_{\cos(t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} 4\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{=}_{\cos^2(t)+\sin^2(t)=1} 4\underbrace{\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right]}_{=1} = 4.$$

Montrer que pour tous complexes $z\ et\ w$,

1. $1 \leq |1+z|+|z|$.
2. $|z|+|w|+|z+w| \leq |2z|+|2w|$
3. $|z| \leq |z|^2+|1-z|$
4. $1+|zw-1| \leq (1+|z-1|)+(1+|w-1|)$.
5. $|z+w|^2+|z-w|^2 = 2(|z|^2+|w|^2)$.

1. $1 = |1| = |(1+z)-z| \underbrace{\leq}_{1ère\ I.T} |1+z|+|z|$.
2. $|z+w| \leq |z|+|w|\ .Donc, |z|+|w|+|z+w| \leq 2(|z|+|w|) = 2|z|+2|w| \overset{car\ 2\ \in\mathbb{R}^+}{\triangleq} |2z|+|2w|$.
3. $Posons\ t = z-1\ et\ s = w-1$. Alors,
 $1+|zw-1| = 1+|(t+1)(s+1)-1| = 1+|s+t+st| \leq 1+|s|+|t|+|st| = 1+|s|+|t|+|s||t| = (1+|s|)(1+|t|) = (1+|z-1|)+(1+|w-1|)$.
4. **1er cas** $|z| \geq 1$. Alors $|z|^2 \geq |z|\ donc\ |z|^2+|1-z| \geq |z|\ car\ |1-z| \geq 0$.
   2ème cas $|z| < 1$. Alors $0 < 1-|z| = |1|-|z| \underbrace{\leq}_{2\ ème\ IT} |1-z|\ donc\ |z|(1-|z|) \leq |z||1-z| \underbrace{\leq}_{car\ |z|\leq 1} |1-z|$ et par conséquent, $|z|-|z|^2 \leq |1-z|$. J'en conclus
   que $|z| \leq |z|^2+|1-z|$.
5. $|z+w|^2+|z-w|^2 = (z+w)(\overline{z+w})+(z-w)(\overline{z-w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w})+(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = 2z\bar{z}+2w\bar{w} = 2(|z|^2+|w|^2)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1\ et\ n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Comme $|z| \neq 1, z \neq 1$. $\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \left|\frac{(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n)}{1-z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \overset{1ère\ IT}{\leqq} \sum_{k=0}^{n}|z^k| = \sum_{k=0}^{n}|z|^k \underbrace{=}_{car\ |z|\neq 1} \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Soit a et b deux complexes de module strictement inférieur à 1. Montrer que : $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$.

Tout d'abord, $|1-\bar{a}b| \geq \left||1|-|\bar{a}b|\right| = \left||1|-|\bar{a}||b|\right| = \left|1-|a||b|\right|$. Or, $|a|<1$ *et* $|b|<1$. Donc, $|a||b|<1$ *et aisni* $\left|1-|a||b|\right|>0$ et par suite $|1-\bar{a}b|>0$.

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1 \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}<1 \underset{|1-\bar{a}b|>0}{\overset{car}{\Leftrightarrow}} |a-b|<|1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a-b|<|1-\bar{a}b| \Leftrightarrow |a-b|^2<|1-\bar{a}b|^2.$$

$$Or, |1-\bar{a}b|^2-|a-b|^2 = (1-\bar{a}b)\left(\overline{1-\bar{a}b}\right)-(a-b)\left(\overline{a-b}\right) = (1-\bar{a}b)\left(1-a\bar{b}\right)-(a-b)\left(\bar{a}-\bar{b}\right) = 1+a\bar{a}b\bar{b}-a\bar{a}-b\bar{b}$$

$$= 1+|a|^2|b|^2-|a|^2-|b|^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2) \underbrace{\geq}_{\substack{car\ |a|<1\ donc\ |a|^2<1 \\ idem\ pour\ b}} 0.$$

J'en déduis que $|a-b|^2<|1-\bar{a}b|^2$ et par conséquent, l'inégalité $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1$qui lui est équivalente est vraie aussi.

Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ *et* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que : $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u|=1$.

$$\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-u\bar{z}}{1-u} = \overline{\left(\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\right)} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\overline{\left(\frac{z-u\bar{z}}{1-u}\right)}=\frac{\overline{z-u\bar{z}}}{\overline{1-u}}=\frac{\bar{z}-\overline{u\bar{z}}}{1-\bar{u}}=\frac{\bar{z}-\bar{u}\bar{\bar{z}}}{1-\bar{u}}=\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}} \frac{z-u\bar{z}}{1-u} = \frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}} \Leftrightarrow (z-u\bar{z})(1-\bar{u}) = (1-u)(\bar{z}-\bar{u}z) \Leftrightarrow z-z\bar{u}-u\bar{z}+u\bar{u}\bar{z} = \bar{z}-\bar{u}z-u\bar{z}+u\bar{u}z$$

$$\Leftrightarrow z-\bar{z}-|u|^2(z-\bar{z})=0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(1-|u|^2)=0 \Leftrightarrow \underbrace{z=\bar{z}}_{\substack{impossible \\ car\ z\notin\mathbb{R}}}\ ou\ |u|^2=1 \Leftrightarrow |u|^2=1 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car\ |u|\ est \\ un\ réel\ positif}} |u|=1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que les racines complexes de $P(z)=z^n-z-1$ sont de module strictement compris entre 0 et 2.

Soit z une racine complexe de P. *Alors* $P(z)=z^n-z-1=0$. Donc $z^n=z+1$ et par conséquent, $|z|^n=|z^n|=|z+1|\leq|z|+1$.

Soit $\varphi:(t\mapsto t^n-t-1)$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ *et* $\forall t\geq 0, \varphi'(t)=nt^{n-1}-1$. Donc $\varphi'(t)\geq 0 \Leftrightarrow nt^{n-1}\geq 1 \Leftrightarrow t^{n-1}\geq\frac{1}{n} \Leftrightarrow t\geq\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

t	0		$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$		2		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$-$		$+$			
$\varphi(t)$		$\searrow$		$\nearrow$			

$2>1>\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ Donc φ est strictement croissante *sur* $[2,+\infty[$.

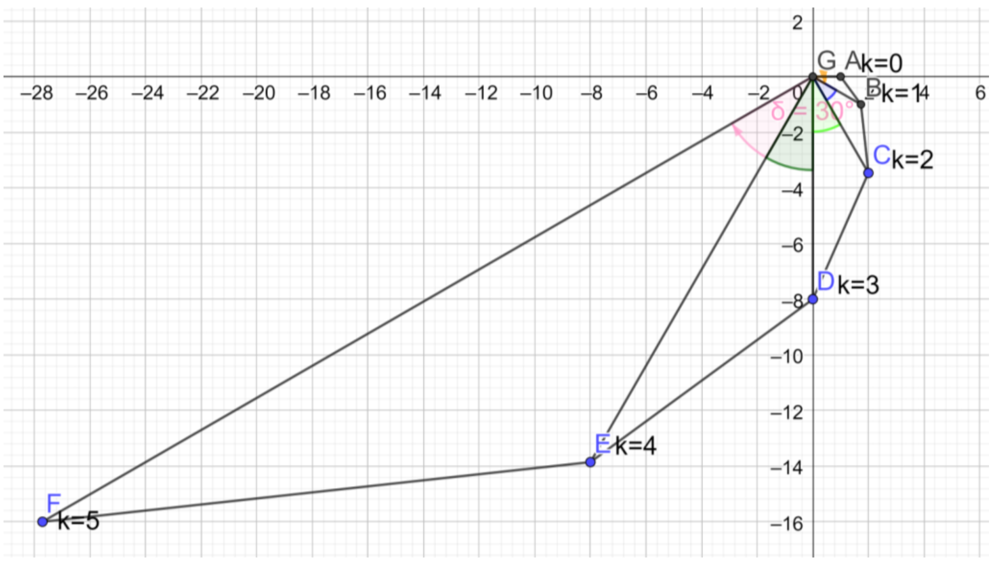
Comme $\varphi(2)>0, \forall t\geq 2, \varphi(t)>0$.

Alors par contraposée, puisque $\varphi(|z|)\leq 0$, nécessairement $|z|<2$.

Déterminer les entiers n tels que : $\left(\sqrt{3}-i\right)^n$soit réel. Représenter les points d'affixe $z_k=\left(\sqrt{3}-i\right)^k$tq $k\in[\![0,5]\!]$.

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^n = \left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)^n = \left(2e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^n = 2^n e^{-in\frac{\pi}{6}}.$$

Donc, $\left(\sqrt{3}-i\right)^n\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\arg\left(\left(\sqrt{3}-i\right)^n\right)=k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/-n\frac{\pi}{6}=k\pi \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/n=-6k \Leftrightarrow$ *n est un multiple de 6.*



Déterminer une fonction polynômiale P tel que : pour tout réel x, $sin(7x)=P(\sin(x))$.

$sin(7x)=Im(e^{i7x})=Im((e^{ix})^7)=Im((\cos(x)+isin(x))^7)$.

$$\text{Or, } \left(\cos(x)+isin(x)\right)^7 \overset{FBN}{=} (\cos(x))^7+7(\cos(x))^6\left(isin(x)\right)+21(\cos(x))^5\left(isin(x)\right)^2+35(\cos(x))^4\left(isin(x)\right)^3+35(\cos(x))^3\left(isin(x)\right)^4+21(\cos(x))^2\left(isin(x)\right)^5+7(\cos(x))^1\left(isin(x)\right)^6+\left(isin(x)\right)^7.$$

$$\left(\cos(x)+isin(x)\right)^7 = \left[(\cos(x))^7-21(\cos(x))^5\left(sin(x)\right)^2+35(\cos(x))^3\left(sin(x)\right)^4-7(\cos(x))^1\left(sin(x)\right)^6\right] +i\left[7(\cos(x))^6\left(sin(x)\right)-35(\cos(x))^4\left(sin(x)\right)^3+21(\cos(x))^2\left(sin(x)\right)^5-\left(sin(x)\right)^7\right].$$

Donc, $sin(7x)=7(\cos(x))^6\left(sin(x)\right)-35(\cos(x))^4\left(sin(x)\right)^3+21(\cos(x))^2\left(sin(x)\right)^5-\left(sin(x)\right)^7$

$=7(\cos^2(x))^3\left(sin(x)\right)-35(\cos^2(x))^2\left(sin(x)\right)^3+21(\cos(x))^2\left(sin(x)\right)^5-\left(sin(x)\right)^7$

$=7(1-\sin^2(x))^3\left(sin(x)\right)-35(1-\sin^2(x))^2\left(sin(x)\right)^3+21(1-\sin^2(x))\left(sin(x)\right)^5-\left(sin(x)\right)^7$

$=7[1-3\sin^2(x)+3sin^4(x)-sin^6(x)]\sin(x)-35[1-2\sin^2(x)+sin^4(x)]sin^3(x+21[1-\sin^2(x)]sin^5(x)-sin^7(x)$

$=7(sin(x)-3\sin^3(x)+3sin^5(x)-sin^7(x))-35(sin^3(x)-2\sin^5(x)+sin^7(x))+21(\sin^5(x)-\sin^7(x))-\sin^7(x)$.

Ainsi, $sin(7x)=7\sin(x)-56sin^3(x)+112sin^5(x)-64sin^7(x)=P(\sin(x))$ où $P(t)=-64t^7+112t^5-56t^3+7t$.

Retrouver la relation entre $cos(3t), cos^3(t)$et $cos(t)$.

$$cos^3(t)=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{i3t}+3e^{-it}e^{2it}+3e^{it}e^{-2it}+e^{-3it}\right)=\frac{1}{8}\left(e^{i3t}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}\right)=\frac{1}{8}\left(2\cos(3t)+6\cos(t)\right)=\frac{1}{4}\left(\cos(3t)+3cost(t)\right)$$

Calculer $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(3t)\,sin^5(2t)dt$.

$$\cos(3t)\,sin^5(2t) \overset{Euler}{\triangleq} \left(\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{2(2i)^5}(e^{i3t}+e^{-i3t})(e^{i2t}-e^{-i2t})^5$$

$$\overset{FBN}{\triangleq} \frac{1}{2^6 i^4 i}(e^{i3t}+e^{-i3t})[(e^{i2t})^5+5(e^{i2t})^4(-e^{-i2t})^1+10(e^{i2t})^3(-e^{-i2t})^2+10(e^{i2t})^2(-e^{-i2t})^3+5(e^{i2t})^1(-e^{-i2t})^4+(-e^{-i2t})^5]$$

$$= \frac{1}{2^6 i}(e^{i3t}+e^{-i3t})(e^{i10t}-5e^{i6t}+10e^{i2t}-10\,e^{-i2t}+5e^{-i6t}-e^{-i10t})$$

$$= \frac{1}{2^6 i}(e^{i13t}-5e^{i9t}+10e^{i5t}-10\,e^{it}+5e^{-i3t}-e^{-i7t}+e^{i7t}-5e^{i3t}+10e^{-it}-10e^{-i5t}+5e^{-i9t}-e^{-i13t})$$

$$= \frac{1}{2^6 i}(e^{i13t}-5e^{i9t}+10e^{i5t}-10\,e^{it}+5e^{-i3t}-e^{-i7t}+e^{i7t}-5e^{i3t}+10e^{-it}-10e^{-i5t}+5e^{-i9t}-e^{-i13t})$$

$$\overset{Euler}{\triangleq} \frac{1}{2^6 i}[2isin(13t)-10isin(9t)+20i\sin(5t)-10i\sin(3t)-20isin(t)+2isin(7t)]$$

$$= \frac{1}{2^5}[sin(13t)-5sin(9t)+10\sin(5t)-5\sin(3t)-10sin(t)+sin(7t)]$$

Donc, $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2^5}[sin(13t)-5sin(9t)+10\sin(5t)-5\sin(3t)-10sin(t)+sin(7t)]dt$

$$I = \frac{1}{2^5}[-\frac{1}{13}cos(13t)+\frac{5}{9}cos(9t)-2\cos(5t)+\frac{5}{3}\cos(3t)+10cos(t)-\frac{1}{7}cos(7t)]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \frac{1}{2^5}\left[-\frac{1}{13}cos\left(13\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{9}cos\left(9\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right)+\frac{5}{3}\cos\left(3\frac{\pi}{3}\right)+10cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{7}cos\left(7\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\frac{1}{13}+\frac{5}{9}-2+\frac{5}{3}+10-\frac{1}{7}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2^5}\left[-\frac{1}{13}cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{5}{9}-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{5}{3}+10cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{7}cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\frac{1}{13}+\frac{5}{9}+\frac{5}{3}+8-\frac{1}{7}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2^5}\left[\left(-\frac{1}{13}-\frac{1}{7}+8\right)\frac{1}{2}-\frac{5}{9}-\frac{5}{3}+\left(\frac{1}{13}-\frac{5}{9}-\frac{5}{3}-8+\frac{1}{7}\right)\right] = \frac{1}{2^5}\left[\frac{1}{26}-4+\frac{1}{14}-\frac{40}{9}\right] = -\frac{3413}{13104}$$

Soit x et y des réels, n un entier naturel non nul. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.
2. $R_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx+y)$
3. $S = cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)+cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)+cos\left(\frac{7\pi}{11}\right)+cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$.
4. $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{cos^k(x)}$
5. $X_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}} sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$.
6. $V_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} cos(2kx)$
7. $S_n = \sum_{k=0}^n sin^2(kx)$
8. $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} cos^3(kx)$
9. $W_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} sin^2(kx)$.

1. $S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right) = \sum_{k=1}^n Im\left(e^{i\frac{k}{n}\pi}\right) = Im\left[\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k\right]$. Or, $\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \begin{cases} n \ si \ e^{i\frac{\pi}{n}} = 1 \\ \frac{\left(e^{i\frac{\pi}{n}}\right)^n-1}{e^{i\frac{\pi}{n}}-1} e^{i\frac{\pi}{n}} \ si \ e^{i\frac{\pi}{n}} \neq 1 \end{cases}$ $Or,\ \frac{\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \underbrace{\pi \equiv 0[2n\pi]}_{impossible}$.

$$\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \frac{e^{i\pi}-1}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(2isin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} e^{i\frac{\pi}{n}} = \frac{-2}{2isin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} e^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right) + i\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$\sum_{k=1}^n (e^{i\frac{\pi}{n}})^k = \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right) + i\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = -1 + icotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Ainsi, $S_n = cotan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{ntan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\frac{\pi}{2n}}{tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right]$. Comme $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2n} = 0 \\ \lim_{x\to0}\frac{\tan(x)}{x} = 1 \ donc \ \lim_{x\to0}\frac{x}{\tan(x)} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$, je peux conclure , en composant, que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 1$ $et\ \ par\ s$

$$\sum_{k=1}^n Im(z_k) = Im\left[\sum_{k=1}^n z_k\right]$$
$$\sum_{k=1}^n Re(z_k) = Re\left[\sum_{k=1}^n z_k\right]$$

2. $R_n = \sum_{k=1}^n \sin(kx+y) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Im}\left(e^{i(kx+y)}\right) = Im\left(\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)}\right)$. Or, $\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = \sum_{k=1}^n e^{ikx}e^{iy} = e^{iy}\sum_{k=1}^n (e^{ix})^k = e^{iy} \times \begin{cases} \frac{(e^{ix})^n-1}{e^{ix}-1} e^{ix} \ si \ e^{ix} \neq 1 \\ n \ si \ e^{ix} = 1 \end{cases}$.

Or, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi$.

1[er] cas : $\forall k \in \mathbb{Z}, x \neq 2k\pi$. $\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = e^{iy}\frac{(e^{ix})^n-1}{e^{ix}-1}e^{ix} = \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}e^{i(x+y)} = \frac{2isin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{\frac{inx}{2}}}{2isin\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{ix}{2}}}e^{i(x+y)} = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{nx}{2}-\frac{x}{2}+x+y\right)} = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\left(\frac{(n+1)}{2}x+y\right)}$.

$$e^{i\theta}+1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$
$$e^{i\theta}-1 = 2\,i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Donc, $R_n = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\left(\frac{(n+1)}{2}x+y\right)\right)$.

2[ème] cas : $\exists k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi$. $\sum_{k=1}^n e^{i(kx+y)} = ne^{iy}$. Donc, $R_n = ncos(y)$.

3. $S = cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)+cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)+cos\left(\frac{7\pi}{11}\right)+cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \sum_{k=1}^4 \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{11}\right) = \sum_{k=1}^4 \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}}\right) = Re\left(\sum_{k=1}^4 e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}}\right)$.

Et $\sum_{k=1}^4 e^{i\frac{(2k+1)\pi}{11}} = e^{i\frac{\pi}{11}}\sum_{k=1}^4\left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^k = e^{i\frac{\pi}{11}}\frac{\left(e^{i\frac{2\pi}{11}}\right)^4-1}{e^{i\frac{2\pi}{11}}-1}e^{i\frac{2\pi}{11}} = \frac{\left(e^{i\frac{8\pi}{11}}\right)-1}{e^{i\frac{2\pi}{11}}-1}e^{i\frac{3\pi}{11}} = \frac{2isin(\frac{4\pi}{11})\left(e^{i\frac{4\pi}{11}}\right)}{2isin(\frac{\pi}{11})\left(e^{i\frac{\pi}{11}}\right)}e^{i\frac{3\pi}{11}} = \frac{sin(\frac{4\pi}{11})}{sin(\frac{\pi}{11})}e^{i\frac{6\pi}{11}}$. Donc, $S = \frac{\sin(\frac{4\pi}{11})}{\sin(\frac{\pi}{11})}\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right)$.

4. $S_n = \sum_{k=0}^n sin^2(kx) \overset{\substack{je\ linéarise \\ sin^2(kx) \\ avec\ \cos(2\theta)=1-2sin^2(\theta)}}{\triangleq} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n[1-cos(2kx)] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n 1 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}Re\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right)$.

$Or, \sum_{k=0}^n e^{2ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{2ix})^k = \begin{cases} \frac{(e^{2ix})^{n+1}-1}{e^{2ix}-1} \ si \ e^{2ix} \neq 1 \\ n+1 \ si \ \ e^{2ix} = 1 \end{cases}$. De plus, $e^{2ix} = 1 \Leftrightarrow 2x \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$.

Si $x \equiv 0[\pi]$ alors $Re\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) = n+1\ et\ S_n = 0$.

Si $x \not\equiv 0[\pi]$ alors $\sum_{k=0}^n e^{2ikx} = \frac{(e^{2ix})^{n+1}-1}{e^{2ix}-1} = \frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{2ix}-1} = \frac{2i\sin((n+1)x)\,e^{i(n+1)x}}{2isin\,(x)e^{ix}} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i((n+1)x-x)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i(nx)} = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}[\cos(nx)+isin(nx)]$.

Donc, $Re\left(\sum_{k=0}^n e^{2ikx}\right) = \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\cos(nx)$. Alors $S_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\cos(nx)$.

5. $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} cos^3(kx)$.

Linéarisons $cos^3(kx)$:

$$\cos(3kx) \overset{Euler}{\triangleq} \left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)^3 \overset{FBN}{\triangleq} \frac{1}{8}\left((e^{ikx})^3+3(e^{ikx})^2e^{-ikx}+3e^{ikx}(e^{-ikx})^2+(e^{-ikx})^3\right) = \frac{1}{8}(e^{i3kx}+3e^{ikx}+3e^{-ikx}+e^{-3ikx}) = \frac{1}{8}(2\cos(3kx)+6\cos(kx))$$

$\cos(3kx) = \frac{1}{4}(\cos(3kx)+3\cos(kx))$.

Donc, $T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4}(\cos(3kx)+3\cos(kx)) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(3kx) + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx)$.

Calculons plus généralement $S(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)$:

$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right)=Re\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}\right]$ et $\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\theta}\right)^k=\begin{cases}\frac{\left(e^{i\theta}\right)^n-1}{e^{i\theta}-1} & si\ e^{i\theta}\neq 1\\ n & si\ e^{i\theta}=1\end{cases}$. Or, $e^{i\theta}=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\theta=2k\pi$

<u>1er cas :</u> $\boldsymbol{\exists k\in\mathbb{Z}/\theta=2k\pi}$. Alors, $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=n$

<u>2ème cas :</u> $\boldsymbol{\forall k\in\mathbb{Z},\theta\neq 2k\pi}$. Alors, $\frac{\left(e^{i\theta}\right)^n-1}{e^{i\theta}-1}=\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=\frac{2i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)e^{\frac{in\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}}=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}$; donc $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)$.

Retour à T_n :

<u>1er cas :</u> $\exists k\in\mathbb{Z}/\boldsymbol{x=2k\pi}$. Alors $3x=2k\pi$ donc $T_n=\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}n=n.$

<u>2ème cas :</u> $\boldsymbol{\exists k\in\mathbb{Z}/3x=2k\pi\ \ et\ \forall p\in\mathbb{Z}/x\neq 2p\pi}$. Alors $T_n=\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)$.

<u>3ème cas :</u> $\boldsymbol{\forall p\in\mathbb{Z}/3x\neq 2k\pi\ \ et\ x\neq 2p\pi}$. Alors $T_n=\frac{1}{4}\frac{\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}\cos\left(\frac{3(n-1)x}{2}\right)+\frac{3}{4}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)$.

si $\boldsymbol{\alpha\in\mathbb{R}}$ et $\boldsymbol{z\in\mathbb{C}}$,
alors
$\boldsymbol{Re(\alpha z)=\alpha Re(z)}$
et $\boldsymbol{Im(\alpha z)=\alpha Im(z)}$.

6. $U_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{Im}\left(e^{ikx}\right)}{\cos^k(x)}\overset{car\ \frac{1}{\cos^k(x)}\in\mathbb{R}}{=}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right)=Im\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}\right)$.

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{ikx}}{\cos^k(x)}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k=\begin{cases}\frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n-1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)}-1} & si\ \frac{e^{ix}}{\cos(x)}\neq 1\\ n & si\ \frac{e^{ix}}{\cos(x)}=1\end{cases}$. Or $\frac{e^{ix}}{\cos(x)}=1\Leftrightarrow e^{ix}=\cos(x)\Leftrightarrow\cos(x)+i\sin(x)=\cos(x)\Leftrightarrow\sin(x)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/x=k\pi.$

<u>1er cas :</u> $\boldsymbol{\forall k\in\mathbb{Z},x\neq k\pi}$.

$\frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n-1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)}-1}=\frac{\frac{e^{inx}}{(\cos(x))^n}-1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)}-1}=\frac{e^{inx}-(\cos(x))^n}{e^{ix}-\cos(x)}\frac{1}{(\cos(x))^{n-1}}=\frac{1}{(\cos(x))^{n-1}}\frac{\cos(nx)-(\cos(x))^n+i\sin(nx)}{\cos(x)+i\sin(x)-\cos(x)}=\frac{1}{(\cos(x))^{n-1}}\frac{\cos(nx)-(\cos(x))^n+i\sin(nx)}{i\sin(x)}$

$\frac{\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^n-1}{\frac{e^{ix}}{\cos(x)}-1}\overset{car\ \frac{1}{i}=-i}{=}\frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}}(-i)[\cos(nx)-(\cos(x))^n+i\sin(nx)]=\frac{1}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}}[\sin(nx)-i(\cos(nx)-(\cos(x))^n)]$. Donc, $U_n=\frac{\cos(nx)-(\cos(x))^n}{\sin(x)(\cos(x))^{n-1}}$.

<u>2ème cas :</u> $\boldsymbol{\exists k\in\mathbb{Z},x=k\pi}$. $U_n=Im(n)=0.$

7. $X_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}Im\left(e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)\overset{car\ \frac{1}{2^{k+1}}\in\mathbb{R}}{=}\sum_{k=1}^{n-1}Im\left(\frac{1}{2^{k+1}}e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)=Im\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}e^{i\frac{k\pi}{3}}\right)$.

Or, $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}e^{i\frac{k\pi}{3}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^k=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{n-1}-1}{\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)-1}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right]=\frac{1}{2^n}\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}-2}=\frac{1}{2^n}\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}-2}=\frac{1}{2^n}\frac{\left[\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}e^{i\frac{\pi}{3}}\right]\left[e^{-i\frac{\pi}{3}}-2\right]}{\left|e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|^2}$

$\underbrace{=}_{\substack{e^{i\frac{\pi}{3}}-2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-2=\frac{-3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\ donc\ \left|e^{i\frac{\pi}{3}}-2\right|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}=3}}\frac{1}{2^n}\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{n-1}-2\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n-2^{n-1}+2^n e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}=\frac{1}{3\times 2^n}\left[e^{i(n-1)\frac{\pi}{3}}-2e^{in\frac{\pi}{3}}-2^{n-1}+2^n e^{i\frac{\pi}{3}}\right].$

Donc $X_n=\frac{1}{3\times 2^n}\left[\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)+2^n\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{3\times 2^n}\left[\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)+2^{n-1}\sqrt{3}\right].$

Vérification : $X_2=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{2^{k+1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}$ et $\frac{1}{3\times 2^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\right]=\frac{1}{3\times 4}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{\sqrt{3}}{8}$. Ok !!

$X_3=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2^{k+1}}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)=\frac{1}{2^2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2^3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{16}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ et $\frac{1}{3\times 2^3}\left[\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right)+2^2\sqrt{3}\right]=\frac{1}{3\times 8}\left[9\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{3\sqrt{3}}{16}$. Ok !!

8. $V_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2kx)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Re\left(e^{i2kx}\right)\overset{car\ \binom{n}{k}\in\mathbb{R}}{=}\sum_{k=0}^{n}Re\left(\binom{n}{k}e^{i2kx}\right)=Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i2kx}\right)$.

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i2kx}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i2x}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i2x}\right)^k 1^{n-k}\overset{FBN}{=}\left(1+e^{i2x}\right)^n=\left(2\cos(x)e^{ix}\right)^n=2^n\cos(x)^n e^{inx}$. Donc, $V_n=2^n\cos(x)^n\cos(nx)$.

9. $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)\overset{\substack{je\ linéarise\\ \sin^2(kx)\\ avec\ \cos(2\theta)=1-2\sin^2(\theta)}}{=}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}[1-\cos(2kx)]=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}1-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}Re\left(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}\right)$.

en appliquant le résultat précédent

$Or,\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}=\sum_{k=0}^{n}\left(e^{2ix}\right)^k=\begin{cases}\frac{\left(e^{2ix}\right)^{n+1}-1}{e^{2ix}-1} & si\ e^{2ix}\neq 1\\ n+1 & si\ e^{2ix}=1\end{cases}$. De plus, $e^{2ix}=1\Leftrightarrow 2x\equiv 0[2\pi]\Leftrightarrow x\equiv 0[\pi]$.

Si $x\equiv 0[\pi]$ alors $Re\left(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}\right)=n+1\ et\ S_n=0.$

Si $x\not\equiv 0[\pi]$ alors $\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}=\frac{\left(e^{2ix}\right)^{n+1}-1}{e^{2ix}-1}=\frac{e^{2i(n+1)x}-1}{e^{2ix}-1}=\frac{2i\sin((n+1)x)e^{i(n+1)x}}{2i\sin(x)e^{ix}}=\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i((n+1)x-x)}=\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}e^{i(nx)}=\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}[\cos(nx)+i\sin(nx)].$

Donc, $Re\left(\sum_{k=0}^{n}e^{2ikx}\right)=\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\cos(nx)$. Alors $S_n=\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}\cos(nx)$.

10. $T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos^3(kx)$. •**Linéarisons $\boldsymbol{\cos^3(kx)}$:**

$\cos(3kx)\overset{Euler}{=}\left(\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\right)^3\overset{FBN}{=}\frac{1}{8}\left(\left(e^{ikx}\right)^3+3\left(e^{ikx}\right)^2e^{-ikx}+3e^{ikx}\left(e^{-ikx}\right)^2+\left(e^{-ikx}\right)^3\right)=\frac{1}{8}\left(e^{i3kx}+3e^{ikx}+3e^{-ikx}+e^{-3ikx}\right)=\frac{1}{8}(2\cos(3kx)+6\cos(kx))$

$\cos(3kx)=\frac{1}{4}(\cos(3kx)+3\cos(kx))$.

Donc, $T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4}(\cos(3kx)+3\cos(kx))=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(3kx)+\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(kx)$.

•**Calculons plus généralement $\boldsymbol{S(\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)}$:**

$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right)=Re\left[\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}\right]$ et $\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i\theta}\right)^k=\begin{cases}\frac{\left(e^{i\theta}\right)^n-1}{e^{i\theta}-1} & si\ e^{i\theta}\neq 1\\ n & si\ e^{i\theta}=1\end{cases}$. Or, $e^{i\theta}=1\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/\theta=2k\pi$

<u>1er cas :</u> $\boldsymbol{\exists k\in\mathbb{Z}/\theta=2k\pi}$. Alors, $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=n$

<u>2ème cas :</u> $\boldsymbol{\forall k\in\mathbb{Z},\theta\neq 2k\pi}$. Alors, $\frac{\left(e^{i\theta}\right)^n-1}{e^{i\theta}-1}=\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}=\frac{2i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)e^{\frac{in\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}}=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{\frac{i(n-1)\theta}{2}}$; donc $\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)$.

si $\boldsymbol{\alpha\in\mathbb{R}}$ et $\boldsymbol{z\in\mathbb{C}}$,
alors
$\boldsymbol{Re(\alpha z)=\alpha Re(z)}$
et $\boldsymbol{Im(\alpha z)=\alpha Im(z)}$.

Retour à T_n :

<u>1er cas :</u> $\exists k\in\mathbb{Z}/\boldsymbol{x=2k\pi}$. Alors $3x=2k\pi$ donc $T_n=\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}n=n.$

<u>2ème cas :</u> $\boldsymbol{\exists k\in\mathbb{Z}/3x=2k\pi\ \ et\ \forall p\in\mathbb{Z}/x\neq 2p\pi}$. Alors $T_n=\frac{1}{4}n+\frac{3}{4}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)$.

11. $W_n \underbrace{=}_{\substack{car\\ le\ terme\\ k=0\\ est\ nul.}} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} sin^2(kx) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1-\cos(2kx)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(2kx) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right] - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} cos(2kx)\right]$

$W_n = \frac{1}{2}[2^n] + \frac{1}{2}[2^n \cos(2x)^n \cos(2nx)\ ] = 2^{n-1} + 2^n \cos(2x)^{n-1}\cos(2nx)$

1) Calculer de deux manières $(1+i)^n$ et en déduire : $S_n = \sum_{0\le 2k\le n}\binom{n}{2k}(-1)^k$ et $T_n = \sum_{0\le 2k+1\le n}\binom{n}{2k+1}(-1)^k$.

2) On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

a. Calculer $1 + j + j^2$ *et* j^p suivant les valeurs de l'entier naturel p puis placer les points M_p d'affixe j^p dans le plan complexe.

b. En déduire les valeurs des sommes : $U_n = \sum_{0\le k\le n}\binom{3n}{3k}$, $V_n = \sum_{0\le k\le n}\binom{3n}{3k+1}$ et $W_n = \sum_{0\le k\le n}\binom{3n}{3k+2}$.

1) D'une part, $z = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. Donc $\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = Re(z) et \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = Im(z)$.

D'autre part, $z = (1+i)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} i^p = \sum_{\substack{p=0\\ p\ pair}}^{n}\binom{n}{p} i^p + \sum_{\substack{p=0\\ p\ impair}}^{n}\binom{n}{p} i^p = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2k+1} i^{2k+1}$

$z = (1+i)^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}(-1)^k + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n}{2k+1}(-1)^k i = S_n + iT_n$. Comme S_n *et* T_n sont des réels, $S_n = Re(z)$ *et* $T_n = Im(z)$. Alors par unicité des parties réelle et im

d'un complexe, $S_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ et $T_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

2)

a. $j^p = e^{2ip\frac{\pi}{3}} = \begin{cases} 1 & si\ p \equiv 0[3] \\ e^{2i\frac{\pi}{3}} & si\ p \equiv 1[3] \\ e^{4i\frac{\pi}{3}} & si\ p \equiv 2[3] \end{cases} = \begin{cases} 1 & si\ p \equiv 0[3] \\ j & si\ p \equiv 1[3] \\ j^2 & si\ p \equiv 2[3] \end{cases}$.

b. $(1+j)^{3n} = \sum_{p=0}^{3n}\binom{3n}{p} j^p = \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 0[3]}}^{3n}\binom{3n}{p} j^p + \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 1[3]}}^{3n}\binom{3n}{p} j^p + \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 2[3]}}^{3n}\binom{3n}{p} j^p = \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 0[3]}}^{3n}\binom{3n}{p} + \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 1[3]}}^{3n}\binom{3n}{p} j + \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 2[3]}}^{3n}\binom{3n}{p} j^2$

$(-j^2)^{3n} = U_n + V_n j + W_n j^2$ .Donc, $(-1)^{3n} j^{6n} = U_n + V_n j + W_n j^2$.

Donc, $(-1)^n = U_n + V_n j + W_n j^2 = U_n + V_n\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + W_n\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n + i\frac{\sqrt{3}}{2}[V_n - W_n]$.Donc, par unicité des parties réelles et imaginaires d'un complexe, $U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n = (-1)^n$ et $V_n - W_n = 0$. De plus, $U_n + V_n + W_n = \sum_{p=0}^{3n}\binom{3n}{p} = 2^{3n} = 8^n$. Ainsi U_n, V_n *et* W_n vérifient le système linéaire :

$\begin{cases} V_n - W_n = 0. \\ U_n + V_n + W_n = 8^n \\ U_n - \frac{1}{2}V_n - \frac{1}{2}W_n = (-1)^n \end{cases}$. Donc $\begin{cases} V_n = W_n. \\ U_n + 2V_n = 8^n \\ U_n - V_n = (-1)^n \end{cases}$ Donc $\begin{cases} V_n = W_n. \\ 3V_n = 8^n - (-1)^n \\ 3U_n = 8^n + 2(-1)^n \end{cases}$. Ainsi, $\begin{cases} V_n = \frac{1}{3}[8^n - (-1)^n]. \\ V_n = \frac{1}{3}[8^n - (-1)^n] \\ U_n = \frac{1}{3}[8^n + 2(-1)^n] \end{cases}$.

Soit α un réel fixé . Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z telle que :

1. $|2z - iz + 1| = 3$

2. $\left|\frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z}\right| = 1$

3. $\left|\frac{z+1-i}{2i-\bar{z}}\right| = 2$

4. $arg(\bar{z} - 1) = \frac{\pi}{3}[\pi]$

5. $\arg((2\bar{z} - i)(iz - 1)) = 0[\pi]$

6. $arg\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

7. $arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

8. $\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^{-*}$

9. $\frac{2+\bar{z}}{1-\bar{z}} \in i\mathbb{R}$.

10. $Re\left(\frac{i-z}{2z+3-i}\right) = 0$

2. $|2z - iz + 1| = 3 \Leftrightarrow |(2-i)z + 1| = 3 \Leftrightarrow \left|(2-i)\left[z + \frac{1}{2-i}\right]\right| = 3 \Leftrightarrow |(2-i)|\left|z + \frac{1}{2-i}\right| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{5}\left|z + \frac{1}{2-i}\right| = 3 \Leftrightarrow \left|z + \frac{1}{2-i}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{Aff(A)=\frac{-1}{2-i}=-\left(\frac{2+i}{5}\right)} MA = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre A et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

6. Soit $M(z)$ un point tel que : $\bar{z} - 3i \neq 0$ *et* $5 + i - \bar{z} \neq 0$ i.e. $z \neq -3i$ *et* $z \neq -5 - i$ i.e.

$arg\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow arg\overline{\left(\frac{\bar{z}-3i}{5+i-\bar{z}}\right)} = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-3i}{5+i-z}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow M \neq B$ *et* $M \neq A$ *et* M *est sur le demi − cercle supérieur de diamètre et délimité par* $[A, B]$.

7. $arg\left(\frac{1-(1-i)z}{2+i(z-1)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow 1 - (1-i)z \neq 0 et\ 2 + i(z-1) \neq 0\ et\ arg\left(\frac{1-i}{i} \times \frac{\frac{1}{1-i} - z}{\frac{2}{i} - 1 + z}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow z \neq \frac{1}{(1-i)} = \frac{1+i}{2}\ et\ z \neq 1 + 2i\ et\ arg\left((1+i) \times \frac{z - \frac{1+i}{2}}{z-(1+2i)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow z \neq \frac{1+i}{2}\ et\ z \neq 1 + 2i\ et\ arg(1+i) + \arg\left(\frac{z - \frac{1+i}{2}}{z-(1+2i)}\right) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\overset{\substack{Aff(A)=(1+2i)\\ Aff(B)=\frac{1+i}{2}}}{\Leftrightarrow} \quad M \neq B\ et\ M \neq A\ et\ \frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow M \neq B\ et\ M \neq A\ et\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow M \neq B$ *et* $M \neq A$ *et* M *est sur le demi − cercle supérieur de diamètre et délimité par* $[A, B]$.

8. Soit z un complexe tel que $1 - 2i - \left(1 + i\sqrt{3}\right)z \neq 0$ *i.e.* $z = \frac{1-2i}{(1+i\sqrt{3})}$.

$\left|\frac{2iz+1}{1-2i-(1+i\sqrt{3})z}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2i\left(z+\frac{1}{2i}\right)}{(1+i\sqrt{3})\left(\frac{1-2i}{1+i\sqrt{3}} - z\right)}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2i|}{|1+i\sqrt{3}|}\left|\frac{z+\frac{1}{2i}}{\frac{1-2i}{1+i\sqrt{3}} - z}\right| = 1 \overset{|2i|=2=|1+i\sqrt{3}|}{\Leftrightarrow} \left|\frac{z - \frac{1}{2}i}{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i - z}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\left|z - \frac{1}{2}i\right|}{\left|\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)i - z\right|} = 1 \overset{\substack{Aff(A)=\frac{1}{2}i\\ Aff(B)=\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)i}}{\Leftrightarrow} \frac{MA}{MB} = 1$

$\Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in med[A, B]$.

9. Soit z un complexe tel que : $z \neq 3i$.

$\frac{z+2+5i}{z-3i} \in \mathbb{R}^{-*} \Leftrightarrow z = -2 - 5i$ et $\arg\left(\frac{z+2+5i}{z-3i}\right) \equiv \pi[2\pi] \overset{\substack{Aff(B)=-2-5i\\ Aff(A)=3i}}{\Leftrightarrow} M \neq B$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow M \neq B$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \pi[2\pi]$

$\Leftrightarrow M \in [A, B]\backslash\{A, B\}$

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe complexe z tels que : M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle (puis isocèle).
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $P(z^2)$ et $Q(z^4)$ sont alignés.
3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points $M(z)$, $A(1)$ et $P(1+z^2)$ sont alignés.

1) Alors, $M = P \; ou \; P = Q \; ou \; M = Q \Leftrightarrow z = z^2 ou \; z^2 = z^3 ou \; z = z^3 \Leftrightarrow z(1-z) = 0 \; ou \; z^2(1-z) = 0 \; ou \; z(1-z)(1+z) = 0 \Leftrightarrow z \in \{-1,1,0\}$.
Désormais $z \notin \{-1,1,0\}$. (sinon MPQ n'est pas un triangle !!)

<u>TRIANGLE RECTANGLE</u> :

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en M

$\Leftrightarrow (PM) \perp (QM) \Leftrightarrow (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{QM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z^3}{z-z^2}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg(1+z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{où \\ Aff(B)=-1}} (\vec{\imath}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M$ est sur la droite D passant par B et dirigée par $\vec{\jmath}$.

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en P

$\Leftrightarrow (PM) \perp (QP) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^2-z^3}{z^2-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \underbrace{\Leftrightarrow}_{où \; Aff(B)=-1} (\vec{\imath}, \overrightarrow{0M}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M$ est sur la droite des imaginaires.

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle rectangle en Q

$\Leftrightarrow (QM) \perp (QP) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z^3-z^2}{z^3-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \underbrace{\Leftrightarrow}_{où \; Aff(B)=-1} (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de diamètre [O,B] .

Ainsi, $Sol = (D \cup (Oy) \cup C_{[O,B]}) \setminus \{O, B\}$

<u>TRIANGLE ISOCELE</u> :

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle en M

$\Leftrightarrow PM = QM \Leftrightarrow |z - z^3| = |z - z^2| \Leftrightarrow \frac{|z-z^3|}{|z-z^2|} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z^3}{z-z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+1| = 1 \Leftrightarrow BM = 1 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de centre B et de rayon 1.

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle en P

$\Leftrightarrow PM = QP \Leftrightarrow |z^2 - z^3| = |z - z^2| \Leftrightarrow \frac{|z^2-z^3|}{|z-z^2|} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z^2-z^3}{z-z^2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow OM = 1 \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

- M, P d'affixe z^2 et Q d'affixe z^3 soient les sommets d'un triangle en Q

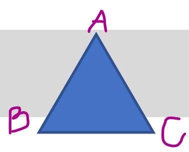
$\Leftrightarrow QM = QP \Leftrightarrow |z^3 - z^2| = |z^3 - z| \Leftrightarrow \frac{|z^3-z^2|}{|z^3-z|} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{z+1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z|}{|z+1|} = 1 \Leftrightarrow |z+1| = |z| \Leftrightarrow BM = OM \Leftrightarrow M$ est sur la médiatrice de [O,B].

Ainsi, $Sol = (C(O,1) \cup C(B,1) \cup med[O,B])$

2) Si $M = P$ ou $M = Q$ ou $P = Q$ alors les points $M, P \; et \; Q$ sont alignés.
Or $M = P \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \; ou \; z = 1$.
$M = Q \Leftrightarrow z^4 = z \Leftrightarrow z(z^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z^2+z+1) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{car \; les \; solutions \\ de \; 1+z+z^2=0 \\ sont \; les \; racines \; 3ièmes \\ de \; l'unité \; sauf \; 1}} z = 0 \; ou \; z = 1 \; ou \; z = j \; ou \; z = j^2$.
$P = Q \Leftrightarrow z^4 = z^2 \Leftrightarrow z^{2(z^2-1)} = 0 \Leftrightarrow z^2(z-1)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \; ou \; z = 1 ou \; z = -1$.
Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), B(-1), C(j), D(j^2)\}$ alors M,P et Q sont alignés.
Prenons maintenant $z \notin \{0,1,-1; j; j^2\}$. Alors, M,P et Q sont distincts. Par conséquent,
M,P et Q sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} \,; \overrightarrow{PQ}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^4-z^2}{z^2-z}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^2(z-1)(z+1)}{z(z-1)}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg(z(z+1)) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow z(z+1) \in \mathbb{R}^*$
$\Leftrightarrow z(z+1) = \overline{z(z+1)} \Leftrightarrow z(z+1) = \bar{z}(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 + z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})(z+\bar{z}+1) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \; ou \; 2Re(z) = -1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \; ou \; Re(z) = -\frac{1}{2}$.
$\Leftrightarrow M \; est \; sur \; l'axe \; réel \; ou \; sur \; la \; droite \; D \, vertciale \; d'équation \; x = -\frac{1}{2}$.
Ainsi, *$Sol = D \cup (Ox)$ puisque les points 0,A,B,C et D sont aussi dans cet ensemble*.

1) Si $M = A$ (i.e $z = 1$) ou $A = P$ (i.e $z = 0$) ou $P = M$ ((i.e $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$) alors les points $M, P \; et \; A$ sont alignés.
(en effet , $P = M \Leftrightarrow 1 + z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\Delta=1-4=-3=(i\sqrt{3})^2} z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \; ou \; z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$) .
Donc finalement, si $M \in \{O, A(1), C\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right), D\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\}$ alors A, M et P sont alignés.
Prenons maintenant $z \notin \left\{0,1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$. Alors, M,P et Q sont distincts. Par conséquent,
M,P et A sont alignés $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} \,; \overrightarrow{PA}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{1+z^2-1}{z-1}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z^2}{(z-1)}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow a \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} = \overline{\left(\frac{z^2}{(z-1)}\right)} \Leftrightarrow \frac{z^2}{(z-1)} = \frac{\bar{z}^2}{(\bar{z}-1)}$
$\Leftrightarrow z^2(\bar{z}-1) = \bar{z}^{2(\bar{z}-1)} \Leftrightarrow z(z\bar{z}) - \bar{z}(z\bar{z}) - (z^2 - \bar{z}^2) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})|z|^2 - (z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow (z-\bar{z})[|z|^2 - (z+\bar{z})] = 0$
$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \; ou \; |z|^2 - (z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \; ou \; |z|^2 = 2Re(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \; ou \; x^2 + y^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \; ou \; (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0$
$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \; ou \; (x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \; ou \; |z-1|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \; ou \; |z-1| = 1 \Leftrightarrow M \; est \; sur \; l'axe \; réel \; ou \; AM = 1$
$\Leftrightarrow M \; est \; sur \; l'axe \; réel \; ou \; M \; est \; sur \; le \; cercle \; de \; centre \; A \; et \; de \; rayon \; 1$.
Comme O, D et C sont sur le cercle de centre A et de rayon 1, je peux conclure que $Sol = C(A,1) \cup (axe \; réel)$.

EX 19 Soit $a, b \; et \; c$ trois complexes distincts et $A, B \; et \; C$ leurs images ponctuelles respectives. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.



1. Compléter $j^3 = \cdots . \, et \;\; 1 + j + j^2 = \cdots$.
2. Montrer que : le triangle ABC est équilatère direct (Cf dessin)si et ssi $a + bj + cj^2 = 0$

1. $j^3 = 1, \; j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \; et \; j^2 = (e^{i\frac{2\pi}{3}})^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \bar{\jmath}$. Donc, 1 ; j et j² sotn les racines troisièmes de l'unité, leur somme est nulle i.e. $1 + j + j^2 == 0$.

2. ABC est équilatère direct **sietssi** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $AB = AC$ **sietssi** $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \; et \; |b-a| = |c-a|$
sietssi $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \; et \; \left|\frac{b-a}{c-a}\right| = 1$ **sietssi** $\frac{c-a}{b-a} = 1e^{i\frac{\pi}{3}} \underbrace{\textbf{sietssi}}_{car \; e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2 = 1+j} \frac{c-a}{b-a} = 1 + j$ **sietssi** $(c-a) - (1+j)(b-a) = 0$
sietssi $ja - (1+j)b + c = 0$ **sietssi** $a - \left(\frac{1}{j} + 1\right)b + \frac{1}{j}c = 0 \underbrace{\textbf{sietssi}}_{car \; \frac{1}{j} = \bar{j} = j^2} a + (j^2+1)b + j^2c = 0 \underbrace{\textbf{sietssi}}_{car \; 1+j+j^2=1} a + jb + j^2c = 0$.

EX 20

1) Soit $\alpha = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$. Représenter les points M_n d'affixe α^n tq $n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0 = 1 \; et \; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}i$ et u_n affixe de M_n .
   a) Montrer que tous les points M_n sont alignés.
   b) Exprimer $u_n \; en \; fonction \; de \; n$. Déterminer la limite des suites $Re(u_n) \; et \; Im(u_n)$.
3) Soit (z_n) la suite de nombres complexes définie par : $z_0 = i$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + 2(1-i)}{z_n - 3i}$ (**).
   On note M_n le point image de z_n.
   a) Calculer $z_1 \; et \; z_2$.

b) Trouver deux suites constantes égales à $p\ et\ q$ (telles que $|p|>|q|$.)qui vérifient la même relation de récurrence $(**)$ que la suite (z_n) .

c) Montrer que la suite $\left(\frac{z_n-p}{z_n-q}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

d) En déduire z_n en fonction de n et Déterminer la limite des suites $Re(z_n)\ et\ Im(z_n)$.

Ex 21 Soit a un nombre complexe . Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x+jy+j^2z=0 \\ j^2x+y+jz=0 \\ jx+j^2y+z=0 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$.

Ex 21 bis Soit a un nombre complexe . Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ \bar{a}x+y+az=0 \\ \bar{a}^2x+\bar{a}y+z=0 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$.

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ \bar{a}x+y+az=0 \\ \bar{a}^2x+\bar{a}y+z=0 \end{cases} \overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-\bar{a}L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-\bar{a}^2L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ (1-a\bar{a})y+(a-a^2\bar{a})z=0 \\ (\bar{a}-a\bar{a}^2)y+(1-\bar{a}^2a^2)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ (1-|a|^2)y+a(1-|a|^2)z=0. \\ \bar{a}(1-|a|^2)y+(1-|a|^4)z=0 \end{cases}$$

Si $|a|^2=1\ i.e.\ |a|=1$ alors $(S)\Leftrightarrow x+ay+a^2z=0\Leftrightarrow x=-ay-a^2z$. Donc $Sol=\{(-ay-a^2z,y,z)/y,z\ réels\}$.

Si $|a|\neq 1$ alors (S) $\overset{\substack{L_2\leftarrow\frac{1}{(1-|a|^2)}L_2 \\ L_3\leftarrow\frac{1}{(1-|a|^2)}L_3}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ y+az=0 \\ \bar{a}y+(1+|a|^2)z=0 \end{cases} \overset{L_3\leftarrow L_3-\bar{a}L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ y+az=0 \\ (1+|a|^2-|a|^2)z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ y+az=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$. Donc $Sol=\{(0,0,0)\}$.

Pour l'ex 21 , il suffit de prendre $a=j\ et,$ comme $|j|=1$, $Sol=\{(-jy-j^2z,y,z)/y,z\ réels\}$.