Programme de colle 5

CHAP 4 Nombres complexes

I Forme algébrique

- Ensemble $\mathbb{C}$:
  - définition, forme algébrique (existence et unicité) , partie réelle, partie imaginaire, imaginaire pur
  - Règles de calculs : égalité de deux complexes, parties réelle et imaginaire d'une somme de nombres complexes.
- Représentation d'un nombre complexe :
  - Définition de l'affixe d'un point, d'un vecteur, images ponctuelle et vectorielle d'un complexe
  - Affixe de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, affixe de $\overrightarrow{MM'}$ .Caractérisation par les complexes de deux points symétriques par rapport à O .
- Conjugué d'un nombre complexe :
  - définition du conjugué et son image ponctuelle
  - propriétés :
    - ✓ écriture des parties réelle et imaginaire de z à l'aide de z et de son conjugué
    - ✓ caractérisation d'un réel ou d'un imaginaire pur grâce au conjugué.
    - ✓ conjugué d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes
    - ✓ le produit d'un complexe par son conjugué.

II Forme trigonométrique

- Module : 4 définitions équivalentes : par les parties réelle et imaginaire - par le conjugué - par une distance - par une norme de vecteur .

  Propriétés du module :
  - module d'un réel
  - comparaison entre $|Re(z)|\ et\ |z|$, entre $|Im(z)|\ et\ |z|$
  - module de l'inverse d'un complexe, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance de complexes
  - module de $\frac{z}{|z|}$
  - inégalités triangulaires, cas d'égalité dans la première inégalité triangulaire.
  - Applications « géométriques » Distance entre deux points . Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
- Exponentielle imaginaire.
  - Définition
  - Caractérisation (écriture) des complexes de module 1.
  - Propriétés :
    - ✓ égalité de deux exponentielles imaginaires
    - ✓ produit et quotient d'exponentielle imaginaire
    - ✓ formules de Moivre
    - ✓ Formule d'Euler
    - ✓ Identités du losange.
- La forme trigonométrique et les arguments d'un nombre complexe non nul :
  - Définition (géométrique) d'un argument d'un complexe non nul
  - Forme trigonométrique d'un complexe non nul : existence et unicité.
  - Caractérisation de l'égalité de deux complexes non nuls.
  - Forme quasi-trigonométrique : réel×exponentielle imaginaire
  - Relation entre forme trigo et forme algébrique
  - Propriétés des arguments : $arg(zz')$, $arg\left(\frac{1}{z}\right)$, $arg\left(\frac{z'}{z}\right)$, $arg(z^n)$ où $n \in \mathbb{Z}$, $arg(\bar{z})$.
- Applications « algébriques » à savoir retrouver
  - Identités du losange généralisées : $e^{i\theta} + e^{i\theta'}\ et\ e^{i\theta} - e^{i\theta'}$.
  - Quotient et puissance de complexes
  - Linéarisation d'un produit de sinus et cosinus
  - Calcul de $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}, \sum_{k=0}^{n} cos(k\theta)\ et\ \sum_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.
- Applications « géométriques »
  - Distance entre deux points . Description par les complexes d'un cercle et d'une médiatrice.
  - Angle entre deux vecteurs. Description par les complexes de l'alignement de points, d'un cercle de diamètre connu.

- Exponentielle complexe :
  - définition de l'exponentielle complexe
  - module, arguments, parties réelle et imaginaire d'une exponentielle complexe
  - propriétés : $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow \cdots$, $e^{z+z'} = \cdots$, $e^{z-z'} = \cdots$, $e^{-z} = \cdots$, $\overline{e^z} = \cdots$.

III Racines carrées complexes-Equations polynomiales.

- Racines carrées d'un complexe :
  - Définition
  - Théorème d'existence
  - Deux méthodes d'obtention.
- Théorème de factorisation dans $\mathbb{C}$ d'une expression polynômiale de degré 2 à coefficients complexes. Somme et produit des racines. Cas d'une expression à coefficients réels et $\Delta < 0$.
- $\begin{cases} u+v=s \\ us=p \end{cases} \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ sont les racines de } P(z) = z^2 - sz + p.$
- Factorisation d'une fonction polynomiale connaissant une de ces racines.

IV Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe , $n \in \mathbb{N}^*$

- Définition d'une racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe.
- Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :
  - théorème donnant les n racines $nièmes$ de l'unité
  - illustration : polygone régulier
  - Racines $3^{\text{ièmes}}$ de l'unité : définition et propriétés de $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
  - somme des racines $n$ièmes de l'unité $(n \geq 2)$.
- Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul:
  - théorème donnant les n racines $nièmes$ d'un complexe non nul
  - méthode d'obtention.

TOUS LES ENONCES DES DEFINITIONS, PROPRIETES ET THEOREMES DOIVENT ETRE CONNUS.

La question de cours demandée peut être :

A. Enoncer une définition et /ou une propriété de cours .

ET /OU

B. Enoncer et démontrer les résultats suivants:.

1) $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\big||z| - |z'|\big| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$.
2) Formule d'Euler et identités du losange.
3) Le théorème de factorisation d'une expression polynomiale de degré 2 à coefficients complexes.
4) Le théorème explicitant les racines $n$ièmes de l'unité où $n \in \mathbb{N}^*$.
5) Le théorème donnant les racines $n$ièmes d'un complexe a non nul où $n \in \mathbb{N}^*$.
6) Savoir compléter et démontrer les formules : Soit A , B C et D des points du plan

$$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$

$$(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}}) \equiv arg(z_B - z_A)[2\pi] \text{ si } A \neq B$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \text{ si } A \neq B \text{ et } C \neq D \text{ sont distincts.}$$

Rappeler soigneusement le résultat avant de le démontrer.