# Préparation du DC 6

**du lundi 14 octobre**

## I Savoir énoncer les résultats du chap 4 suivants

Relation entre module et distance , puis antre angle de vecteurs et arguments :
Soit $A$ , $B$ $C$ $et$ $D$ des points du plan

$$OA = |z_A|$$
$$AB = |z_B - z_A| = |z_A - z_B|$$
$$(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}}) \equiv arg(z_B - z_A)[2\pi] \text{ si } A \neq B$$
$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi] \text{ si } A \neq B \text{ et } C \neq D \text{ sont distincts.}$$

Définition de l'exponentielle complexe
Définition d'une racine nième d'un complexe et racine nième de l'unité
Théorème des racines carrées d'un complexe
Théorème des racines d'une expression polynômes de degré 2 à coefficients complexes
Théorème des racines $n$ièmes de l'unité
Théorème et propriété des racines $n$ièmes d'un complexe non nul.

## II Exercices à savoir refaire

Chap 4. 92**Exemple** Soit $n \in \mathbb{N}\{0,1\}$. Résolvons $(z-1)^n = (z+1)^n$d'inconnue $z$ complexe.

Chap 4. 69bis **Exercice à compléter** Résoudre $(-4-2i)z^2 + (7-i)z + 1 + 3i = 0$ d'inconnue $z$ réelle.

TD 4.1 **EX 18** Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe complexe $z$ tels que : $M, P$ d'affixe $z^2$ et $Q$ d'affixe $z^3$ soient les sommets d'un triangle rectangle.

**TD 4.2 Ex 2** $z^4\left(1 + tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 4itan\left(\frac{\alpha}{2}\right)z^2 - 4 = 0$ $où$ $\alpha \in ]0, \pi[$

**TD 4.2 Ex 4** $z^{2n} - 2z^n \cos(\alpha) + 1 = 0$ où $\alpha \in [0, \pi]$

TD 4.2 **Ex 13** Soit $a$ un réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $(\boldsymbol{e})$ l'équation : $(1-ia)(1+iz)^n = (1+ia)(1-iz)^n$

1. Montrer, géométriquement, que toutes les solutions de $(e)$ sont réelles.
2. Justifier qu'il existe un et un seul réel $\alpha$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = a$. Qui est $\alpha$ ?
3. Montrer que $\frac{1+ia}{1-ia} = e^{2\alpha i}$.
4. Déterminer les solutions de $(e)$ en fonction de $\alpha$ et sous une forme qui permette de lire qu'elles sont réelles.

TD 4.2**Ex 14** Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $k$ de $\{0 ; 1 ; \dots ; n-1\}$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$. En déduire $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega_k - 1|^2$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $S(p) = \sum_{k=0}^{n-1} {\omega_k}^p$.
5. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^{n} (z + \omega_k)^n = n(z^n + 1)$.