Préparation au DS 1

Connaitre la formule de Pascal et savoir reconnaitre et simplifier un télescopage.

Chap 1. 31. Exercice corrigé classique : Calculons $W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{n}$.

$$W_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{2n} \binom{k}{n} \underbrace{=}_{\substack{triangle\\de\\Pascal}} \underbrace{\sum_{k=n}^{2n} \left[\underbrace{\binom{k+1}{n+1}}_{u_{k+1}} - \underbrace{\binom{k}{n+1}}_{u_k} \right]}_{somme\ télescopique} = u_{2n+1} - u_n = \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}.$$

$u_{n+1}-u_n u_{n+1}-u_n$

Savoir montrer une unicité , savpoir faire une récurrence, savoir montrer qu'une suite est constante (ou monotone)

TD 1 Ex 20

1. Soit a, b, c, d des entiers. Justifier que : $\left(a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Longrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}\right)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! \,(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 / \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
3. Trouver une relation entre $a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$.En déduire que les suites (a_n) et (b_n)sont strictement croissantes.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.

1. Supposons que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Alors, $a - c \underbrace{=}_{**} \sqrt{2}(d - b)$.

   Imaginons un instant que $d - b \neq 0$. Alors, $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$. Comme a, b, c et d sont des entiers, $\frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$, autrement dit, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux. L'hypothèse "$d - b \neq 0$" est fausse et j'en conclus que $d = b$. Et en remplaçant dans $**$, j'obtiens $a - c = 0$ i.e. $a = c$.
1. Posons $H(n)$ la propriété : $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 / \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

   Init : $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$. Donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent.

   Propagation : Soit n un entier naturel. Je suppose qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 tq \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

   $$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^{n+1} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n \left(3 + 2\sqrt{2}\right) = (a_n + b_n\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 3a_n + 4b_n + \sqrt{2}(2a_n + 3b_n).$$

   Posons $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Comme a_n et b_n sont entiers naturels, a_{n+1} et b_{n+1}sont aussi entiers naturels.

   CCL : $\forall n, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 / \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

   D'après 1. , l'écriture de $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$ $sous\ la\ forme$ $a_n + b_n\sqrt{2}$ tq $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$est unique.
2. $\forall n, a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. De plus, $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^0 = 1 = 1 + 0 \times \sqrt{2}$ .Donc, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Alors on montre facilement par récurrence sur n que $\forall n, a_n > 0$ et $b_n \geq 0$. Alors, $\forall n, a_{n+1} - a_n = 2a_n + 4b_n > 0$ et $b_{n+1} - b_n = 2a_n + 2b_n > 0$. Donc, les suites (a_n) et (b_n)sont strictement croissantes.
3. Posons $u_n = a_n^2 - 2b_n^2$. Montrons que la suite (u_n) est constante égale à 1.
   $\forall n, u_{n+1} = a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (3a_n + 4b_n\ )^2 - 2(2a_n + 3b_n\ )^2 = a_n^2 - 2b_n^2 = u_n$. Donc la suite (u_n) est constante. De plus, $u_0 = a_0^2 - 2b_0^2 = 1$. J'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = 1$.

Savoir trouver l'expression explicite de u_n connaissant $u_{n+1} - u_n$:

TD 1 Ex 23.3 Soit (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$. Montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire une expression de u_n en fonction de n et de u_0 et u_1 .

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) - u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)(u_n - u_{n+1}). = \left(-\frac{1}{2}\right)(u_{n+1} - u_n)$. Donc, la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_1 - u_0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n a$ $en\ posant$ $a = u_1 - u_0$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a \underbrace{=}_{\substack{car\ a\ ne\\dépend\ pas\\de\ k}} a \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = a \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2a}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Cette égalité étant encore vraie pour $n = 0$, je peux conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + \frac{2(u_1 - u_0)}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

Savoir reconnaitre les coefficients binomiaux et appliquer la formule du binôme de Newton pour factoriser une expression. Savoir reconnaitre et simplifier un télescopage.

Chap 1 38bis Exercices corrigés: Calculons $H_n = \sum_{k=0}^{n} 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.

$D'après\ la\ FBN, (k + 1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1. Donc, H_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(k + 1)^5}_{u_{k+1}} - \underbrace{k^5}_{u_k} \underbrace{=}_{télescopage} (n + 1)^5 - 0^5 = (n + 1)^5.$

Savoir reconnaitre une suite arithmético-géométrique et trouver sa forme explicite/ Cf exercice ci-dessous

Chap 1. 46bis Exemple corrigé : Soit u la suite définie par : $u_0 = (-1)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+1} - 3u_n = 5$. Exprimons u_n en fonction de n puis calculons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Je constate que u est arithmético-géométrique $\left(a = \frac{3}{2}\, et\ b = \frac{5}{2}\right)$. Je cherche alors le réel L tel que : $L = \frac{3}{2}L + \frac{5}{2}$ $ie.\ L = -5$. Je pose alors pour tout n , $v_n = u_n - (-5)$.

On a donc, $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}$ et $L = \frac{3}{2}L + \frac{5}{2}$. Donc, $u_{n+1} - L = \left(\frac{3}{2}u_n + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}L + \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}(u_n - L)$. Autrement dit, $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n$. Donc la suite v est géométrique et ainsi, pour tout n , $v_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n v_0$ ie. $u_n + 5 = \left(\frac{3}{2}\right)^n (u_0 + 5)$.

J'en conclus que pour tout n , $u_n = -5 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Alors, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(-5 + 4\left(\frac{3}{2}\right)^k\right) = -5(n+1) + 4\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$. Ainsi, $S_n = -9 - 5n + 12\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Savoir appliquer la formule du binôme de Newton pour développer une expression. Connaitre la caractérisation d'une partie entière.

TD 2 Ex 48 Soit n un entier naturel.

1) Développer $(3+\sqrt{5})^n$ et $(3-\sqrt{5})^n$.
2) En déduire que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
3) Montrer que $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor$ est un entier impair.

1) $(3+\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{5}^k 3^{n-k}$ et $(3-\sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\sqrt{5})^k 3^{n-k}$.

2) $\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left[\sqrt{5}^k + \left(-\sqrt{5}\right)^k\right] 3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{[1 + (-1)^k]}_{\substack{=0\ si\ k\ impair \\ =2\ si\ k\ pair}} \sqrt{5}^k 3^{n-k}$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ k\ pair}} \binom{n}{k} 2\sqrt{5}^k 3^{n-k} = \sum_{0\le 2p\le n} \binom{n}{2p} 2\sqrt{5}^{2p} 3^{n-2p} = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2p} 2\times 5^p \times 3^{n-2p} = 2\underbrace{\left[\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2p} 5^p \times 3^{n-2p}\right]}_{\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair .

3) D'après ce qui précède, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2k$ tel que $k \in \mathbb{N}$. donc $(3+\sqrt{5})^n = 2k - (3-\sqrt{5})^n$. De plus, $0 < 3-\sqrt{5} < 1$ $donc$ $0 < (3-\sqrt{5})^n < 1$ et par conséquent, $\underbrace{2k - 1 < (3+\sqrt{5})^n < 2k}_{\substack{(3+\sqrt{5})^n\ est\ encadré\ par\ deux\ entiers \\ consécutifs\ et\ ne\ peut\ pas\ être\ égal \\ au\ plus\ grand\ des\ deux.}}$

La caractérisation de la partie entière permet alors de conclure que $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor = 2k - 1$ donc $\lfloor (3+\sqrt{5})^n \rfloor$ est impair.

Savoir comparer deux nombres en étudiant le signe de leur différence et comprendre et savoir appliquer la propriété « somme d'inégalités » suivante: $\forall k, a_k \le b_k \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{n} b_k$. Cf exercice corrigé ci-dessous :

TD 2 Ex 22 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels positifs.

1. Montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \ge i + j - 1$.
2. En déduire que : $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.

1. Soit i et j deux entiers compris entre 1 et n. $ij - i - j + 1 = i(j-1) - (j-1) = \underbrace{(j-1)}_{\ge 0}\underbrace{(i-1)}_{\ge 0} \ge 0$. Ainsi, $ij \ge i + j - 1$.
2. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, ij \ge i + j - 1 \ge 1 > 0$ $donc$ $0 < \frac{1}{ij} \le \frac{1}{i+j-1}$; $alors, comme$ $a_i a_j \ge 0$, $0 \le \frac{a_i a_j}{ij} \le \frac{a_i a_j}{i+j-1}$. En sommant ces n^2 inégalités, j' obtiens, $0 \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_j}{ij} \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$. Enfin, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i a_j}{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\frac{a_j}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2$.
   J'en déduis que $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}$.