CORRIGE du DS 2

EXERCICE 1

1. Soit x et y deux réels tels que $\tan(x)$ *et* $\tan(y)$existent. Montrer que :
$$\tan(x) - tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}.$$
2. Soit k un entier naturel non nul. Résoudre l'équation (e_k): $\cos(x) + \cos((2k+1)x) = 0$. On note S_k l'ensemble des solutions de (e_k).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* a un réel tel que $\forall r \in \mathbb{Q}, a \neq \frac{r\pi}{2}$.
   a) Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*, a \notin S_k$.
   b) Calculer :
$$S_n(a) = \frac{1}{\cos(a)+\cos(3a)} + \frac{1}{\cos(a)+\cos(5a)} + \cdots + \frac{1}{\cos(a)+\cos((2n+1)a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(a)+\cos((2k+1)a)}.$$

1. x et y sont deux réels tels que $\tan(x)$ *et* $\tan(y)$existent donc $\cos(x)$ et $\cos(y)$ sont non nuls.
$$\frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)} = \frac{\sin(x)\cos(x) - \sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)} = \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)} - \frac{\sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(y)}{\cos(y)} = \tan(x) - \tan(y).$$
2. *Soit x un réel.*
x solution de (e_k) $\Leftrightarrow \cos(x) + \cos((2k+1)x) = 0$
$\overset{\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}{\Leftrightarrow} 2\cos((k+1)x)\cos(kx) = 0$
$\Leftrightarrow \cos((k+1)x) = 0$ *ou* $\cos(kx) = 0$
$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / (k+1)x = \frac{\pi}{2} + p\pi$ *ou* $kx = \frac{\pi}{2} + p\pi$
$\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi(2p+1)}{2(k+1)}$ *ou* $x = \frac{\pi(2p+1)}{2k}$
Ainsi, $S_k = \left\{\frac{\pi(2p+1)}{2k} ; \frac{\pi(2p+1)}{2(k+1)} / p \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* a un réel tel que $\forall r \in \mathbb{Q}, a \neq \frac{r\pi}{2}$.
   a. Soit k un entier naturel non nul. $\forall r \in \mathbb{Q}, a \neq \frac{r\pi}{2}$ donc, comme $\forall p \in \mathbb{Z}, \frac{(2p+1)}{k}$ *et* $\frac{(2p+1)}{k+1}$ sont rationnels, $\forall p \in \mathbb{Z}, a \neq \frac{(2p+1)}{k}\frac{\pi}{2}$ *et* $a \neq \frac{(2p+1)}{(k+1)}\frac{\pi}{2}$. Donc, $a \notin S_k$.
   Alors $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(a)+\cos((2k+1)a)}$ est bien définie.
   b. Soit k un entier naturel non nul.

$$\frac{1}{\cos(a)+\cos((2k+1)a)} \overset{\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}{=} \frac{1}{2\cos((k+1)a)\cos(ka)}.$$

Or comme $\cos((k+1)a)\cos(ka) \neq 0$, $\tan((k+1)a)$ *et* $tan(ka)$ existent donc, d'après 1,

$\tan((k+1)a) - tan(ka) = \frac{\sin((k+1)a - ka)}{\cos((k+1)a)\cos(ka)} = \frac{\sin(a)}{\cos((k+1)a)\cos(ka)}$.

De plus, $\sin(a) \neq 0$ car pour tout entier r pair, $a \neq \frac{r\pi}{2}$. Donc, $\frac{1}{\cos((k+1)a)\cos(ka)} = \frac{\tan((k+1)a) - \tan(ka)}{2\sin(a)}$ et par suite, $\frac{1}{\cos(a)+\cos((2k+1)a)} = \frac{\tan((k+1)a) - \tan(ka)}{2\sin(a)}$

Alors, $S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan((k+1)a) - tan(ka)}{2\sin(a)} = \frac{1}{2\sin(a)}\sum_{k=1}^{n} \tan((k+1)a) - tan(ka) \overset{telescopage}{=} \frac{\tan((n+1)a) - tan(a)}{2\sin(a)}$.

EXERCICE 2

1. Exprimer $cos(4x)$ en fonction de cos(x) puis de $\sin(x)$.
2. On note α ,l' unique réel de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tel que : $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Exprimer α en fonction de $Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$
3. Montrer que : $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$.
4. En déduire la valeur de α.
5. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
6. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ *et* $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points communs au cercle (C) de centre $\Omega(-\frac{1}{4}, 0)$, de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et à l'axe réel.
7. Soit H le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Montrer que $\Omega H = \frac{\sqrt{5}}{4}$.
8. En déduire la construction d'un pentagone régulier sur l'annexe ci-jointe avec un simple compa et une règle.

1. $cos(4x) = 2cos^2(2x) = 2[2cos^2(x) - 1]^2 - 1 = 2[4cos^4(x) - 4cos^2(x) + 1] - 1 = 8cos^4(x) - 8cos^2(x) + 1$.
2. $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que : $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Or, $A = Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$ est l' unique réel $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\sin(A) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin(\alpha)$.
   Donc, $\alpha = \pi - A = \pi - Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$.
3. $cos(4\alpha) = 8cos^4(\alpha) - 8cos^2(\alpha) + 1$.

4. Or, $sin(\alpha)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ donc $sin^2(\alpha)=\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ donc $cos^2(\alpha)=1-sin^2(\alpha)=1-\frac{3-\sqrt{5}}{8}=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $cos^4(\alpha)=\frac{30+10\sqrt{5}}{64}=\frac{15+5\sqrt{5}}{32}$. Donc, $cos(4\alpha)=\frac{15+5\sqrt{5}}{4}-(5+\sqrt{5})+1=\frac{15+5\sqrt{5}-20-4\sqrt{5}+4}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=sin\,(\alpha)$.

5. $cos(4\alpha)=sin(\alpha)=cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. Donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $4\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi$ ou $4\alpha=-\frac{\pi}{2}+\alpha+2k\pi$.

   Donc, $5\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $3\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ i.e. $\alpha=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $\alpha=-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$. Comme $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, $\alpha=\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}=\frac{9\pi}{10}$ car les autres valeurs ne sont pas dans le bon intervalle.

6. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{9\pi}{10}\right)=sin(\alpha)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)-1=2\frac{3-\sqrt{5}}{8}-1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

7. Soit M un point de l'axe des abscisses. Notons $(x,0)$ ses coordonnées. Alors $\Omega M=\left|x-\left(-\frac{1}{4}\right)\right|=\left|x+\frac{1}{4}\right|$. Alors,

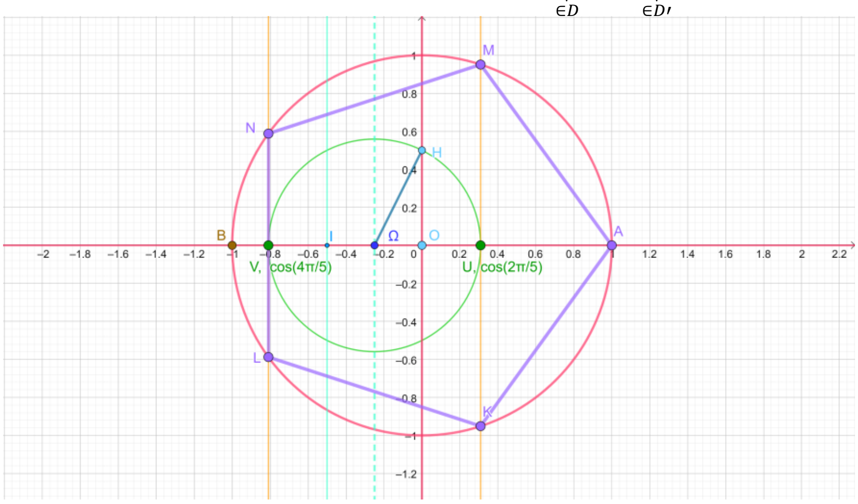
$M\in C(\Omega,\frac{\sqrt{5}}{4})\Leftrightarrow \Omega M=\frac{\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow \left|x+\frac{1}{4}\right|=\frac{\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow x+\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{5}}{4}\Leftrightarrow x=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ ou\ x=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ et\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points d'intersection du cercle de centre Ω et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et de l'axe des abscisses.

8. Distance $\frac{\sqrt{5}}{4}$: Je constate que $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{5}{16}=\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux cotés formant l'angle droit sont de longueur $\frac{1}{2}\ et\ \frac{1}{4}$ a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$.
   On trace un triangle rectangle dont les cotés adjacents à l'angle droits ont pour longueurs, ½ et ¼ (faciles à obtenir avec des médiatrices). Alors le troisième coté a pour longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Matériel : un compas et un règle non gradué.

9. Distance $\frac{\sqrt{5}}{4}$: Soit $H\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Le triangle ΩOH est donc rectangle en O et ses cotés adjacents à l'angle droit sont de longueurs ½ et ¼.
   Donc l'hypoténuse $[\Omega H]$ a pour longueur $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

10 Valeurs $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$: Je trace le cercle de centre Ω et de rayon $\Omega H=\frac{\sqrt{5}}{4}$. Les points d'intersection U et V de ce cercle avec l'axe des abscisses ont pour abscisses $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\ et\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.
   Sommets du pentagone. Je trace les perpendiculaires D et D' à l'axe des abscisses aux points U et V. Ces deux droites interceptent le cercle trigonométrique : on note $\underbrace{M,K}_{\in D}\ et\ \underbrace{N,L}_{\in D'}$ les points d'intersection. Alors, le $AMNLK$ est un pentagone régulier.



EXERCICE 3 Une fonction expo-sinusoidale.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x)=e^{-x}\left(\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)\right)$.

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x)=Ae^{-x}\cos(x+\varphi)$.
2. Chercher les points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée f'.
4. Résoudre sur $[0,2\pi]$, l'inéquation $f'(x)>0$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0,4\pi]$.

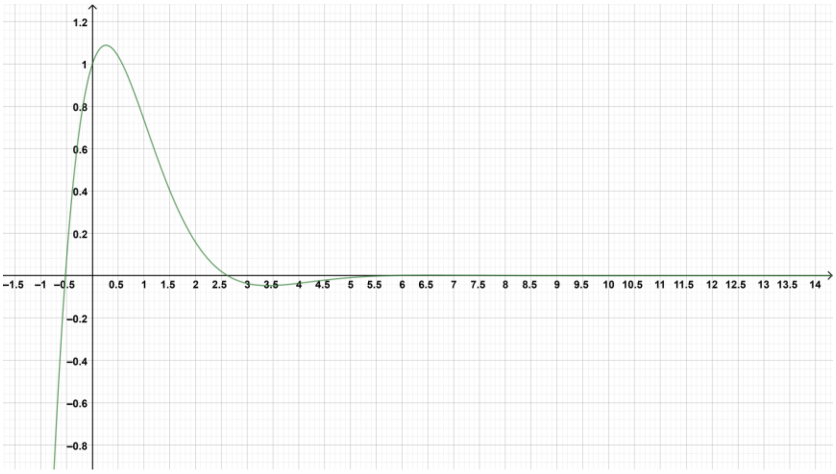
1. Soit x un réel. $f(x)=e^{-x}2\left(\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)=2e^{-x}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right)=2e^{-x}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.
2. $f(x)=0\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}/x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$.
3. $f'(x)=-2e^{-x}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)-2e^{-x}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)=-2e^{-x}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
   $f'(x)=-2\sqrt{2}e^{-x}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
   $f'(x)=-2\sqrt{2}e^{-x}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
   $f'(x)=-2\sqrt{2}e^{-x}\left(\cos\left(x-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
   $f'(x)=-2\sqrt{2}e^{-x}\left(\cos\left(x-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

4. $x \in [0,2\pi]$ donc $x - \frac{7\pi}{12} \in \left[-\frac{7\pi}{12}, 2\pi - \frac{7\pi}{12}\right]$. Alors,

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}e^{-x}\left(\cos\left(x - \frac{7\pi}{12}\right)\right) > 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{7\pi}{12}\right) < 0 \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12} \leq x - \frac{7\pi}{12} < -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{7\pi}{12} \leq 2\pi - \frac{7\pi}{12}$

$\Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}$ ou $\frac{13\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} \leq x \leq 2\pi$.

x	0		$\frac{\pi}{12}$	π	$\frac{13\pi}{12}$	2π	$\frac{25\pi}{12}$	3π	$\frac{37\pi}{12}$		4π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	



EXERCICE 4 Propriétés des solutions d'une équation bicarrée.

Soit $\theta \in [0, \pi]$ *et* (E) l'équation $Z^2 + 2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta)Z + (1 + \cos(\theta))^2 = 0$ d'inconnue Z complexe.

1. Résoudre (E) . On note Z_1 *et* Z_2 les deux solutions complexes (éventuellement confondues).
2. Exprimer $1 + \cos(\theta)$ en fonction de $cos\frac{\theta}{2}$.
3. En déduire les racines carrées complexes de Z_1 et Z_2 .
4. Résoudre alors l'équation (e) : $z^4 + 2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta)z^2 + (1 + \cos(\theta))^2 = 0$ d'inconnue z complexe.

On note $z_1 = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}, z_2, z_3$ *et* z_4 les solutions de cette équation (e) et M_1 , M_2, M_3 *et* M_4 leurs images ponctuelles respectives.

5. Exprimer z_2, z_3 *et* z_4 en fonction de z_1. Que forment les points M_1, M_2, M_3 *et* M_4 ?
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = {z_1}^n + {z_2}^n + {z_3}^n + {z_4}^n$
   a. Montrer que si n est impair alors $S_n = 0$.
   b. Montrer que si n est pair tel que $n = 2p$, alors $S_n = (-1)^p 2^{p+2} cos^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(p\theta)$.

1. Posons $\Delta = [2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta)]^2 - 4(1 + \cos(\theta))^2 = 4(1 + \cos(\theta))^2[\cos^2(\theta) - 1] = 4(1 + \cos(\theta))^2[-\sin^2(\theta)] = [2i\sin(\theta)(1 + \cos(\theta))]^2$.

   Et $Z_1 = \frac{-2(1+\cos(\theta))\cos(\theta) - 2i\sin(\theta)(1+\cos(\theta))}{2} = -(1 + \cos(\theta))(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = -(1 + \cos(\theta))e^{i\theta}$.

   $Z_2 = \frac{-2(1+\cos(\theta))\cos(\theta) + 2i\sin(\theta)(1+\cos(\theta))}{2} = -(1 + \cos(\theta))(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = -(1 + \cos(\theta))e^{-i\theta} = \overline{Z_1}$.
2. $1 + \cos(\theta) = 2cos^2\frac{\theta}{2}$ d'après la formule de l'angle double.
3. $Z_1 = -(1 + \cos(\theta))e^{i\theta} = -2cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\theta} = i^2\sqrt{2}^2 cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^2 = \left[i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}\right]^2$. Donc, $i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $-i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ sont les racines carrées de Z_1. Par suite, comme $Z_2 = \overline{Z_1}$, les racines carrées de Z_2 sont les conjuguées des racines carrées de Z_1. Donc, $-i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\theta}{2}}$ et $i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\theta}{2}}$ sont les racines carrées de Z_2.
4. Soit z un complexe et $Z = z^2$.

z solution de $(e) \Leftrightarrow Z$ solution de $(E) \Leftrightarrow Z = Z_1\ ou\ Z = Z_2 \Leftrightarrow z^2 = Z_1\ ou\ z^2 = Z_2 \Leftrightarrow z\ est\ une\ racine\ carrée\ de\ Z_1\ ou\ Z_2$

Ainsi, les solutions de (e) sont $i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $-i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $-i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\theta}{2}}$ et $i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\theta}{2}}$.

5. $z_1 = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}, z_2 = -i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}} = -z_1, z_3 = -i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\theta}{2}} = \overline{z_1}\ et\ z_4 = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{-i\theta}{2}} = -\overline{z_1}$.

   Donc les points M_1, M_2, M_3 *et* M_4 forment, dans cet ordre M_1, M_3, M_2 *et* M_4 , un rectangle.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = {z_1}^n + {z_2}^n + {z_3}^n + {z_4}^n = {z_1}^n + (-z_1)^n + {\overline{z_1}}^n + (-\overline{z_1})^n = (1 + (-1)^n){z_1}^n + (1 + (-1)^n){\overline{z_1}}^n = (1 + (-1)^n)({z_1}^n + {\overline{z_1}}^n) = 2(1 + (-1)^n)Re({z_1}^n)$
   a. Si n est impair alors $1 + (-1)^n = 0\ donc\ S_n = 0$.
   b. Si n est pair tq $n = 2p$ alors $1 + (-1)^n = 2$ donc

$$S_n = 4Re({z_1}^n) = 4Re\left(i^{2p}\sqrt{2}^{2p}\cos^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(e^{\frac{i\theta}{2}}\right)^{2p}\right) = 4Re\left((-1)^p 2^p \cos^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(e^{ip\theta}\right)\right) = 4(-1)^p 2^p \cos^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(p\theta)$$

$$S_{2p} = (-1)^p 2^{p+2}\cos^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(p\theta).$$

EXERCICE 5 Propriétés des solutions d'une équation aux racines $2n^{\text{ièmes}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ et (E) l'équation $(1 - z)^{2n} = (1 + z)^{2n}$ d'inconnue z complexe.

1. Montrer, sans résoudre (E), que les images ponctuelles des solutions de (E) sont alignées sur l'axe imaginaire. Les solutions de (E) sont donc imaginaires pures.
2. Résoudre (E). On donnera les solutions sous une forme qui permette de lire qu'elles sont imaginaires pures.
3. On note P_n le produit des solutions non nulles de (E). On a donc $P_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1} i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]$.
   a. Montrer en effectuant un bon changement d'indice que : $\prod_{k=n+1}^{2n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1}\prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.
   b. En déduire que : $P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
   c. Démontrer que : $\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
   d. Déduire de ce qui précède que le produit des solutions non nulles de (E) vaut 1.

1.Supposons que z soit une solution de (E), affixe du point M.
Alors $(1-z)^{2n} = (1+z)^{2n}$ donc $|(1-z)^{2n}| = |(1+z)^{2n}|$ soit $|1-z|^{2n} = |1+z|^{2n}$. Comme $|1-z|$ et $|1+z|$ sont des réels positifs et que la fonction $(x \mapsto x^{2n})$ est injective, $|1-z| = |1+z|$. Cela se traduit géométriquement par $MA = MB$ où A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe -1. Donc M est sur la médiatrice de $[A,B]$ qui est l'axe imaginaire. Ainsi, toutes les images ponctuelles des solutions de (E) sont alignées sur l'axe imaginaire et les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2. Le réel 1 n'est pas solution de (E). Soit z un complexe distinct de 1.

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow (1-z)^{2n} = (1+z)^{2n} \\ &\Leftrightarrow \frac{(1+z)^{2n}}{(1-z)^{2n}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \text{ est une racine } 2n^{\text{ième}} \text{ de l'unité} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n-1]\!], \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n-1]\!], \left(1+e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)z = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1 . \end{aligned}$$

Or, $1+e^{\frac{ik\pi}{n}} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{ik\pi}{n}} = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow \frac{k\pi}{n} \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow k \equiv n[2n] \underset{k\in[\![0,2n-1]\!],}{\overset{car}{\Leftrightarrow}} k = n$.
Et pour $k = n$, $\left(1+e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)z = 0 \neq -2 = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1$. Donc le cas "$k = n$" est impossible.

Et par suite, z est solution de $(E) \Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n-1]\!]\backslash\{n\}, \underbrace{\left(1+e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}_{\neq 0\ car\ k\neq n} z = e^{\frac{ik\pi}{n}} - 1$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,2n-1]\!]\backslash\{n\}, z = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}-1}{e^{\frac{ik\pi}{n}}+1} = \frac{2i\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{\frac{ik\pi}{2n}}}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)e^{\frac{ik\pi}{2n}}} = i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Ainsi, les solutions de (E) sont tous les imaginaires purs : $i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ tels que $k \in [\![0,2n-1]\!]\backslash\{n\}$.

3a. $\prod_{k=n+1}^{2n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \underbrace{=}_{\substack{p=2n-k \\ k=2n-p \\ n+1\leq k\leq 2n-1 \Leftrightarrow 1\leq 2n-k\leq n-1}} \prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{(2n-p)\pi}{2n}\right)$

$= \prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\pi+\frac{(-p)\pi}{2n}\right) \underbrace{=}_{car\ \tan\ est\ \pi-périodique} \prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(-\frac{p\pi}{2n}\right) \underbrace{=}_{car\ \tan\ est\ impaire} \prod_{p=1}^{n-1}\left[-\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\right] = (-1)^{n-1}\prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.

3.b.Alors, $P_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1} i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right] = i^{2(n-1)}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]$

$P_n = (-1)^{(n-1)}\left[\prod_{k=1}^{n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right](-1)^{n-1}\prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right) = \left[\prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\right]^2$.

3.c. $\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n}\right) \underbrace{=}_{\substack{p=n-k \\ k\in[\![1,n-1]\!]\Leftrightarrow p\in[\![1,n-1]\!]}} \prod_{p=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.

3.d.$P_n\left[\prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)\right]^2 = \prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)^2 = \prod_{p=1}^{n-1}\frac{\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{\cos^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} = \frac{\prod_{p=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}{\prod_{p=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right)} = 1$ d'après ce qui précède.

EXERCICE 4 Une construction géométrique .
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Soit a un nombre complexe non nul. On note A le point d'affixe a et A'celui d'affixe $-a$
Soit z un complexe distinct de a. On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\bar{z}$.
1. Que peut-on dire des points $A\ et\ A'$?
2. Démontrer que : $OM' = OM$.
3. Montrer que : $M' = M \Leftrightarrow M \in (OA)\backslash\{A\}$.
4. Montrer que : $\overrightarrow{AM}\ et\ \overrightarrow{A'M'}$ sont $colinéaires$.
5. Monter que : $\overrightarrow{AM}\ \ et\ \overrightarrow{MM'}$sont $orthogonaux$.
6. En déduire une construction géométrique de M' à partir de M.

1. A et A' sont symétriques par rapport à O.
2. $OM' = |z'| = \left|\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\bar{z}\right| = \frac{|z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|}|\bar{z}| \underbrace{=}_{\substack{car\ un\ complexe\ et\ son\ conjugué \\ ont\ même\ module}} \frac{|z-a|}{|\overline{z-a}|}|z| \underbrace{=}_{\substack{car\ un\ complexe\ et\ son\ conjugué \\ ont\ même\ module}} |z| = OM$.
3. $M' = M \Leftrightarrow z' = z$

$\Leftrightarrow \dfrac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\bar{z} = z$

$\Leftrightarrow a\bar{z} = z\bar{a}$

$\Leftrightarrow z\bar{a} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} / z\bar{a} = \beta$

$\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{R} / z = \dfrac{\beta}{\bar{a}} = \dfrac{\beta}{|a|^2}a$

$\Leftrightarrow \exists \beta' \in \mathbb{R} / z = \beta' a$

$\Leftrightarrow \exists \beta' \in \mathbb{R} / \overrightarrow{OM} = \beta' \overrightarrow{OA}$

$\Leftrightarrow M \in (OA) \underbrace{\setminus\{A\}}_{car\ z\neq a}$.

4. $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ sont *colinéaires* $\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \overrightarrow{AM}\neq\vec{O}} \exists \alpha \in \mathbb{R} / \overrightarrow{A'M'} = \alpha\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \operatorname{aff}(\overrightarrow{A'M'}) = \operatorname{aff}(\alpha\overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, z' + a = \alpha(z-a)$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \frac{z'+a}{z-a} = \alpha \Leftrightarrow \frac{z'+a}{z-a} \in \mathbb{R}.$$

$Or, \frac{z'+a}{z-a} = \frac{\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\bar{z}.+a}{z-a} = \frac{(z-a)\bar{z}+a(\bar{z}-\bar{a})}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})} = \frac{z\bar{z}-a\bar{a}}{(z-a)(\overline{z-a})} = \frac{|z|^2-|a|^2}{|z-a|^2} \in \mathbb{R}$. J'en conclus que $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{A'M'}$ sont *colinéaires*.

5. Ou bien $M = M'$ *i.e.* $\overrightarrow{MM'} = \vec{O}$. Alors $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MM'}$

Ou bien $M = M'$ *i.e.* $\overrightarrow{MM'} \neq \vec{O}$. Alors, $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$sont *orthogonaux* $\underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ \overrightarrow{AM}\neq\vec{O}} (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z'-z}{z-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow \frac{z'-z}{z-a} \in i\mathbb{R}$.

Or, $\frac{z'-z}{z-a} = \frac{\frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\bar{z}-z}{z-a} = \frac{(z-a)\bar{z}-z(\bar{z}-\bar{a})}{(z-a)(\overline{z-a})} = \frac{z\bar{a}-a\bar{z}}{|z-a|^2} = \frac{z\bar{a}-\overline{z\bar{a}}}{|z-a|^2} = \frac{2iIm(z\bar{a})}{|z-a|^2} \in i\mathbb{R}$. J'en conclus que $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{MM'}$sont orthogonaux.

6. On place les points A et A' dans le plan et on choisit un point M distinct de A.
   Si M est aligné avec O et A alors $M' = M$.
   Si M n'est pas alignés avec O et A alors on trace la parallèle à (AM) passant par A', et on trace la droite perpendiculaire à (AM) en M. Alors M' est le point d'intersection de ces deux droites.