DS 2

CALCULATRICE <u>NON</u> AUTORISEE. DUREE 4 HEURES.

Le sujet comporte 4 pages (le sujet -feuille1- et 2 annexes-feuille 2-). Les 6 exercices sont indépendants .Quelques consignes :

- Bien lire tout le sujet avant de commencer.
- Traiter les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
- Justifier toutes vos réponses. Bien relire chaque raisonnement et s'assurer que :

•Vous <u>n'avez pas d'emblée affirmé que la propriété à démontrer est vraie</u> (sans justifier). Posez - vous les bonnes questions : je sais que ? ou je cherche quand ou qui ?

•Le <u>raisonnement</u> est clairement exposé : avec une syntaxe correcte en maths et en français. Relisez-vous pour vous assurer que vous avez bien écrit ce que vous vouliez dire (en maths comme en français).

•Les <u>liens logiques</u> (donc, si et seulement si, car, alors, si, par conséquent, je sais que, en conclusion, …, ⇔,⟹) sont utilisés et utilisés à bon escient.

•La <u>phrase réponse</u>, attendue et soulignée (ou encadrée ou surlignée) répond clairement à la question posée.

Si vous avez un doute sur l'énoncé (erreur d'énoncé ??), n'hésitez pas à demander au professeur-surveillant.

EXERCICE 1

1. Soit x et y réels tels que $\tan(x)$ et $\tan(y)$ existent. Montrer que : $\tan(x) - tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}$.
2. Soit k un entier naturel non nul. Résoudre l'équation (e_k): $\cos(x) + \cos\big((2k+1)x\big) = 0$. On note S_k l'ensemble des solutions de (e_k).
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel tel que $\forall r \in \mathbb{Q}, a \neq \frac{r\pi}{2}$.
   a) Vérifier que $sin(a) \neq 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, a \notin S_k$.
   b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$S_n(a) = \frac{1}{\cos(a)+\cos(3a)} + \frac{1}{\cos(a)+\cos(5a)} + \cdots + \frac{1}{\cos(a)+\cos\big((2n+1)a\big)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos(a)+\cos\big((2k+1)a\big)}.$$

EXERCICE 2

1. Soit x un réel. Montrer que $\cos(4x) = 8cos^4(x) - 8cos^2(x) + 1$.
2. On note α l' unique réel de $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, tel que : $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.Exprimer α en fonction de $Arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$.
3. Montrer que : $\cos(4\alpha) = \sin(\alpha)$.
4. En déduire la valeur de α.
5. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.
6. On munit le plan d'un repère orthonormé direct (appelé plan complexe et illustré en annexe 1).

On note (C') le cercle de rayon $\frac{\sqrt{5}}{4}$ et de centre Ω d' affixe $\left(-\frac{1}{4}\right)$. Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ sont les abscisses des points d'intersection entre le cercle (C') et l'axe réel.

7. Soit H le point d'affixe $\frac{i}{2}$. Montrer que $\Omega H = \frac{\sqrt{5}}{4}$.
8. En déduire la construction, sur l'annexe 1, d'un pentagone régulier à l'aide d'un compas, d' une règle et d'un équerre.

EXERCICE 3 Une fonction expo - sinusoïdale.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = e^{-x}\big(\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)\big)$.

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = Ae^{-x}\cos(x+\varphi)$ où A et φ constantes.
2. Chercher les points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de le prouver) . Ecrire $f'(x)$ sous la forme : $f'(x) = Be^{-x}\cos(x+\theta)$ où B et θ constantes.
4. Résoudre sur $[0,2\pi]$, l'inéquation $f'(x) > 0$. (**indication :** $si\ x \in [0,2\pi]\ alors\ x - \theta \in [-\theta, 2\pi - \theta]$).
5. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0,4\pi]$.

EXERCICE 4 Propriétés des solutions d'une équation bicarrée.

Soit $\theta \in [0,\pi]$ et (E) l'équation $Z^2 + 2(1+\cos(\theta))\cos(\theta)Z + (1+\cos(\theta))^2 = 0$ d'inconnue Z complexe.

1. Résoudre (E) . On note Z_1 et Z_2 les deux solutions complexes (éventuellement confondues).
2. Exprimer $1 + \cos(\theta)$ en fonction de $cos\frac{\theta}{2}$.
3. En déduire les racines carrées complexes de Z_1 et Z_2 .
4. Résoudre alors l'équation (e) : $z^4 + 2(1+\cos(\theta))\cos(\theta)z^2 + (1+\cos(\theta))^2 = 0$ d'inconnue z complexe.

On note $z_1 = i\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, z_2, z_3 et z_4 les solutions de cette équation (e) et M_1 , M_2, M_3 et M_4 leurs images ponctuelles respectives.

5. Exprimer z_2, z_3 et z_4 en fonction de z_1. Que forment les points M_1, M_2, M_3 et M_4 ?
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = {z_1}^n + {z_2}^n + {z_3}^n + {z_4}^n$
   a. Montrer que si n est impair alors $S_n = 0$.
   b. Montrer que si n est pair tel que $n = 2p$, alors $S_n = (-1)^p 2^{p+2} cos^{2p}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(p\theta)$.

EXERCICE 5 Propriétés des solutions d'une équation aux racines $2n^{\text{ièmes}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2\}$ et (E) l'équation $(1-z)^{2n} = (1+z)^{2n}$ d'inconnue z complexe.

1. Montrer, sans résoudre (E), que toutes les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2. Résoudre (E). On donnera les solutions sous une forme qui permette de lire qu'elles sont imaginaires pures.
3. On note P_n le produit des solutions non nulles de (E).

   On a donc $P_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]\left[\prod_{k=n+1}^{2n-1} i\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right]$.

   a. Montrer en effectuant un changement d'indice que : $\prod_{k=n+1}^{2n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = (-1)^{n-1}\prod_{p=1}^{n-1}\tan\left(\frac{p\pi}{2n}\right)$.
   b. En déduire que : $P_n = \prod_{k=1}^{n-1}\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
   c. Démontrer que : $\prod_{k=1}^{n-1}\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.
   d. Déduire de ce qui précède que le produit des solutions non nulles de (E) vaut 1.

EXERCICE 6 Une construction géométrique .

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (Cf verso de l'annexe).

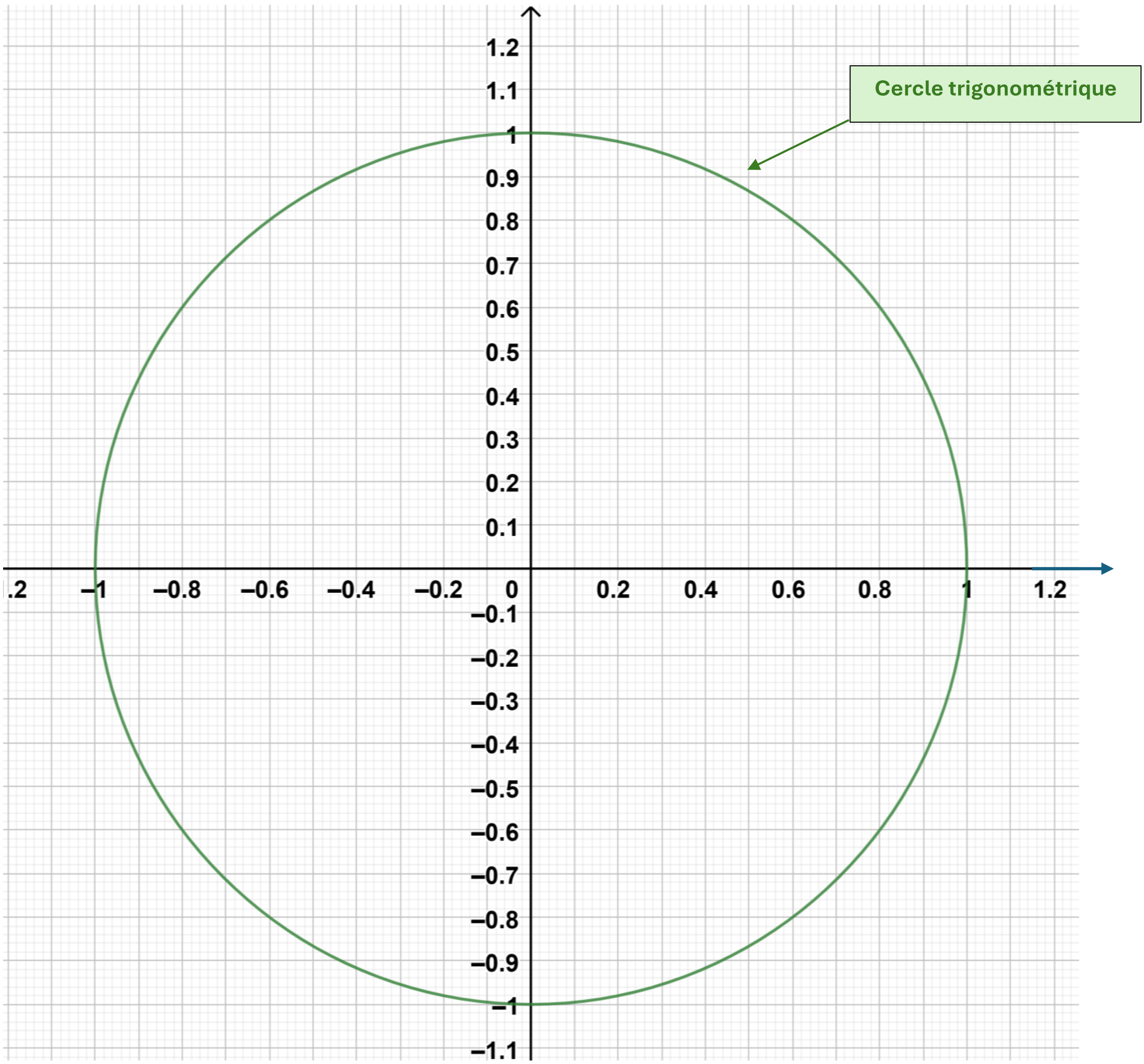
Soit a un nombre complexe non nul. On note A le point d'affixe a et A' celui d'affixe $-a$

Soit z un complexe distinct de a. On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}}\bar{z}$.

1. Que peut-on dire des points A et A' ?
2. Démontrer que : $OM' = OM$.
3. Montrer que : $M' = M \Leftrightarrow M \in (OA)\backslash\{A\}$.
4. Montrer que : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ sont $colinéaires$.
5. Monter que : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MM'}$sont $orthogonaux$.
6. En déduire une construction géométrique de M' à partir de M (à faire sur l'annexe 2)

NOM : .... Prénom : ....

ANNEXE 1



ANNEXE 2