Exercices très détaillés à faire pendant les vacances

- **Faire un exercice (parmi les exos 1 à 16) par jour en travaillant son cours en parallèle**
- **Calculer une dérivée par jour parmi celles proposées dans les exercices 17 et 18**
- **Exercice 19 pour anticiper le cours ….vous pouvez me le rendre en DL 4 à la rentrée (facultatif).**

1. BUT : Montrer que $f\colon \left(x \mapsto 2sin\left(\frac{3x}{2}\right) - 7cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)$ est périodique et bornée.
   a. Trouver la plus petite période de u: $\left(x \mapsto sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right)$.. (on cherche $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, sin\left(\frac{3(x+T)}{2}\right) = sin\left(\frac{3x}{2}\right)$)
   b. Faire de même, pour $v : \left(x \mapsto cos\left(\frac{x}{5}\right)\right)$
   c. Trouver une période commune pour u et v . En déduire la périodicité de f.
   d. Justifier par un simple résultat de cours que f est bornée.
2. Déterminer les asymptotes en $+\infty$ $et - \infty$ de Cf où $f(x) = \sqrt{4x^2 - 5x + 6}$ en calculant successivement
   a. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ (mettre les termes dominants sous la $\sqrt{.}$)
   b. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{def}{=} a$ (mettre les termes dominants en facteur sous la $\sqrt{.}$ et utiliser les propriétés de $\sqrt{.}$)
   c. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax \overset{def}{=} b$. (utiliser la quantité conjuguée puis mettre les termes dominants en facteur et utiliser les propriétés de $\sqrt{.}$)

   ATTENTION : $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x\ si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases}$.
3. BUT : Trouver tous les $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la fonction f suivante est -elle continue sur $\mathbb{R}$? $f(x) = \begin{cases} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ \frac{b+x^3}{x^2+3x+2}\ si\ x \in]-1,0] \\ c\,\frac{e^{x+1}-1}{x^2-1}\ si\ x \leq -1 \end{cases}$.

   On pose $u(x) = (1 + x)^{\frac{a}{x}}$, $v(x) = \frac{b+x^3}{x^2+3x+2}$ et $w(x) = c\,\frac{e^{x+1}-1}{x^2-1}$.
   a. Quelle forme spéciale a u et comment doit -on écrire u ?
   b. Pourquoi u, v et w sont-elles continues sur $]0, +\infty[,]-1,0[\ et\ ]-\infty, -1[$? Qu'en déduit-on sur f ?
   c. Montrer que v a une limite finie en $(-1)^+\ sietssi\ b = 1$. Déterminer cette limite. Quelle est l'unique valeur de b possible ?
   d. En déduire l'unique valeur de a qui rend f continue en 0. (faire apparaitre la limite usuelle $\lim\limits_{t\to0} \frac{ln(1+t)}{t}$dans le calcul de $\lim\limits_{x\to0^+} u(x)$)
   e. En déduire l'unique valeur de c qui rend f continue en -.1 (faire apparaitre la limite usuelle $\lim\limits_{t\to0} \frac{e^t-1}{t}$ dans le calcul de $\lim\limits_{x\to(-1)^-} w(x)$))
4. BUT : Montrer que $f\colon \left(x \mapsto \begin{cases} xsin\left(\frac{1}{x-1}\right)\ si\ x \in]-1,1[\\ \frac{1}{2}\ si\ x = \pm1 \end{cases}\right)$ n'est continue ni en 1, ni en -1.
   a. **En 1 :** Si f est continue sur 1 i.e. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \cdots = \cdots$.., alors pour toute suite réelle (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \frac{1}{2}$.

   Nous allons donc chercher une suite réelle (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \frac{1}{2}$. Et plus exactement , cherchons une suite réelle (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n sin\left(\frac{1}{u_n-1}\right) = 0$.

   Or, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1^-$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n sin\left(\frac{1}{u_n-1}\right) = 0$ alors nécessairement , $\lim\limits_{n\to+\infty} sin\left(\frac{1}{u_n-1}\right) = \cdots$...

   Mais $sin\left(\frac{1}{u_n-1}\right) = \cdots \Leftarrow \frac{1}{u_n-1} = \cdots ... \Leftarrow u_n - 1 = \cdots ... \Leftarrow u_n = \cdots$ … ..

   Posons $u_n = \cdots$ … . .. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \cdots$ … . . et $sin\left(\frac{1}{u_n-1}\right) = \cdots$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n sin\left(\frac{1}{u_n-1}\right) = \cdots$ … . .. .

   J'en conclus que ……………………………………………… .
   b. **En -1 :** faire de même en -1.
5. BUT : Montrer que $f\colon (x \mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x - \lfloor x\rfloor})$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   a. Déterminer Df.
   b. Dans l'expression de f, quelle fonction n'est pas continue sur tout son domaine de définition. Où est-elle continue ? En déduire que f est continue au moins sur …………. .
   c. Soit k un entier relatif.
      i. Calculer $\lim\limits_{x\to k^+} f(x)$ en se plaçant sur un bon voisinage de k^+.
      ii. Faire de même pour $\lim\limits_{x\to k^-} f(x)$.
      iii. Conclure.
6. BUT : Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair a au moins une racine réelle.
   a. Considérer une fonction polynomiale réelle de degré impair. Que peut-on dire de sa continuité ?

b. Que peut-on dire de ses limites en $+\infty$ et en$-\infty$?
c. Conclure grâce au corollaire du TVI.

7. Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur un intervalle I et telles que : $\forall x \in I, f(x)^2 = g(x)^2 \; et \; f(x) \neq 0$.
BUT : Montrer que $\forall x \in I, f(x) = g(x) \; ou \; \forall x \in I, f(x) = -g(x)$.
   a. En quoi ces deux phrases mathématiques sont-elles différentes :
      - $\forall x \in I, f(x) = g(x) \; ou \; \forall x \in I, f(x) = -g(x)$.
      - $\forall x \in I, f(x) = g(x) \; ou \; f(x) = -g(x)$.
   b. Justifier que f et g conservent un signe strict sur l'intervalle I en appliquant le corollaire du TVI.
   c. Conclure.
8. BUT : Montrer que $f : \left(x \mapsto \begin{cases} 3 - x \; si \; x \in [1,2] \\ x^2 si \; x \in [0,1[\end{cases}\right)$ est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$ sans être ni continue, ni strictement monotone sur l'intervalle $[0,2]$. Donner une expression de f^{-1}. Tracer enfin Cf et Cf^{-1}sur un même dessin.
   a. Montrer que $x \in [0,1[\Leftrightarrow f(x) \in [0,1[$ et $x \in [1,2] \Leftrightarrow f(x) \in [1,2]$.
   b. Fixer $y \in [0,2]$. Résoudre $f(x) = y$ d'inconnue $x \in [0,2]$ en distinguant deux cas qui découlent de 1.
   c. En déduire que f est bijective de $[0,2]$ sur $[0,2]$ et décrire f^{-1}.
   d. Justifier que f n'est ni croissante, ni décroissante.
   e. Justifier que f n'est pas continue sur $[0,2]$.
9. BUT : Montrer que $f : \left(x \mapsto \frac{x}{1+|x|}\right)$ est bijective de Df sur un domaine F à déterminer et donner une expression de f^{-1}. Tracer enfin Cf et Cf^{-1}sur un même dessin.
   a. Déterminer Df.
   b. Tracer rapidement Cf pour découvrir F.
   c. Montrer que $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$.
   d. Fixer $y \in \mathbb{R}$. Résoudre $f(x) = y$ d'inconnue x en distinguant deux cas qui découlent de 1.
   e. En déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un domaine $\mathbb{R}$ et décrire f^{-1}
10. On pose $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

BUT : Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer et donner une expression de sh^{-1}. Tracer enfin C_{sh} et $C_{sh^{-1}}$ sur un même dessin.

11. Etudier rapidement sh dans le but le tracer sa courbe C_{sh}.
12. Appliquer le $TBCSM$ à sh. En déduire J.
13. Fixer $y \in J$. Soit x l'unique antécédent de y par sh (d'après 2. cet antécédent existe et est unique). Exprimer x en fonction de y. En déduire une expression de sh^{-1}.
14. Tracer enfin $C_{sh^{-1}}$ sur le même dessin.
15. BUT : Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une seule solution u_n dans chaque intervalle $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ où $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
   a. Sait-on résoudre algébriquement l'équation $\tan(x) = x$. Quelle méthode va-t-on alors appliquer pour résoudre cette équation ? Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une seule solution u_n dans chaque intervalle I_n.
   b. Trouver un encadrement de u_n qui permet d'en déduire sa limite.
16. BUT : montrer que : pour tout réel x de $[0, \pi]$, $1 - \frac{2}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| \leq \sin(x) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{x(\pi - x)}$.
   a. Comme on ne se sait pas montrer algébriquement ces inéquations, posons :
   $\forall x \in [0, \pi], f(x) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots et \; g(x) = sin^2(x) - \frac{4}{\pi^2}x(\pi - x)$.
   b. Montrer que $\forall x \in [0, \pi], f(\pi - x) = f(x)$. Déduisez-en un axe de symétrie de Cf. Réduisons en conséquence le domaine d'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   c. Etudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Il sera sûrement nécessaire de dériver plusieurs fois ... tant que le signe de $f'(x) > 0$ ou $f''(x) > 0$ ou $f'''(x) > 0$ n'est possible à résoudre algébriquement !
   d. Faites de même avec g.
17. On admet que les fonctions $Arcsin$ et $Arccos$ sont définies sur $[-1,1]$ et dérivables uniquement sur $]-1;1[$ et la fonction $Arctan$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in]-1,1[, Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -Arccos(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Déterminer pour chacune des fonctions f suivantes, un domaine D où elle est définie et un domaine D' dérivable et donner une expression de $f'(x)$:

1. $f(x) = Arcsin(2x - 1)$
2. $f(x) = Arccos(\sqrt{1 - x^2})$
3. $f(x) = x\sin(Arctan(x))$
4. $f(x) = \frac{Arcsin(x)}{Arccos(x)}$
5. $f(x) = Arctan(\cos(x))$.

18. Déterminer pour chacune des fonctions f suivantes, un domaine D où elle est dérivable et donner une expression de $f'(x)$.
   a. $f(x) = sin(5x^2 - 3 + 2\sqrt[3]{x})$
   b. $f(x) = \cos(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{\cos(x)}$
   c. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1 - 8x^3}$
   d. $f(x) = \ln(\ln(x))$
   e. $f(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1-2x}}$
   f. $f(x) = e^{\sqrt[5]{x^2}}$
   g. $f(x) = \frac{1}{2-x}$
   h. $f(x) = \frac{1}{3x-7}$
   i. $f(x) = \frac{1-2x^5}{x^2+7x+6}$

19. DL 4 Propriétés du logarithme népérien :

Définition : Le logarithme népérien est l'unique primitive de $\left(x \mapsto \frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui s'annule en 1. C'est donc ln est l'unique fonction réelle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui vérifie : $\ln(1) = 0 \ et \ \forall x > 0, ln'(x) = \frac{1}{x}$.

a. BUT : Montrer que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Pour cela fixons $a > 0$. Et posons $\forall x > 0, u(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$.

- i. Justifier que u est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $u'(x)$.
- ii. En déduire que $\forall x > 0, u(x) = 0$.

b. Déduire de ce qui précède que :

- i. $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$. (on écrira $1 = a \times \frac{1}{a}$) .
- ii. $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^{*}, \ln(a^n) = nln(a)$.
- iii. $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^{*}, \ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}ln(a)$. (on écrira $a = (a^{\frac{1}{n}})^n$)

c. BUT : Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

- i. Montrer que $\forall x > 0, \ln(x) \le x - 1 < x$.
- ii. En déduire que $\forall x > 0, 0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- iii. Conclure.

d. BUT : Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$

- i. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$
- ii. Compléter : $\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = e^{\alpha \ldots\ldots\ldots - \beta \ldots\ldots}$. On pose $h(x) = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \beta \ldots\ldots\ldots$..
- iii. Mettre le terme dominant en facteur dans h et conclure.

e. BUT : Définir l'exponentielle.

- i. En admettant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \ et \ \lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$. Justifier, par le TBCSM, que ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$sur $\mathbb{R}$. On note exp sa bijection réciproque.
- ii. exp est donc bijective de ...... sur .... Que peut(on dire de la continuité et la monotonie de exp ?
- iii. Lire et appliquer théorème de la bijection réciproque pour prouver que exp est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer une expression de $exp'(x)$.
- iv. Soit a et b deux réels. On pose $x = e^a \ et \ y = e^b$. Alors a =........ et b =......... . Puis,

$$e^{a+b} = e^{\cdots\cdots} \underbrace{=}_{propriété\ du\ \ln} \ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{=}_{car\ \ln\circ\exp(t)\ldots} \ldots\ldots\ldots. \underbrace{=}_{par\ déf^\circ\ de\ x\ et\ y.} \ldots\ldots\ldots.$$

$$e^{-a} = e^{\cdots\cdots} \underbrace{=}_{propriété\ du\ \ln} \ldots\ldots\ldots\ldots \underbrace{=}_{car\ \ln\circ\exp(t)\ldots} \ldots\ldots\ldots. \underbrace{=}_{par\ déf^\circ\ de\ x\ .} \ldots\ldots\ldots.$$